$$f(x) = \frac{x^2+2x}{2x+1}$$

1) Détermination de D_f

f est une fonction rationnelle dont le dénominateur doit etre différent de zéro

la contrainte est donc $2x+1 \neq 0$ cherchons $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-1/2$

la valeur interdite est donc $-1/2$ d'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\} =]-\infty ; -1/2[\cup]-1/2 ; +\infty[$

2) Limites aux bornes

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty \end{array}\right\}$ FI $\infty - \infty$ On a une forme indéterminée au numérateur de f

Comme f est le rapport de deux fonctions polynomes on peut utiliser le theorème du rapport de deux polynomes pour trouver la limite cherchée, on a donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x < -1/2}} f(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x < -1/2}} x^2+2x = -3/4 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x < -1/2}} 2x+1 = 0^- \end{array}\right\}$ Par limite d'un quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x < -1/2}} f(x) = +\infty$

D'après le cours la droite verticale d'équation $x=-1/2$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}f$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x > -1/2}} f(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x > -1/2}} x^2+2x = -3/4 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x > -1/2}} 2x+1 = 0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient de limites $\lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x > -1/2}} f(x) = -\infty$

Même remarque que pour la limite précédente $x=-1/2$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}f$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty\end{array}\right\}$ FI $\frac{\infty}{\infty}$ On utilise le même théorème que pour la limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

3) f est une fonction dérivable car elle est composée de deux fonctions polynomes qui sont elles aussi dérivables (quotient de deux fonctions polynomes dérivables)

$f(x) = \frac{x^2+2x}{2x+1}$

Rappel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{(x^2+2x)'(2x+1) - (x^2+2x)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{(2+2x)(2x+1) - (x^2+2x)2}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{4x+2+4x^2+2x - (2x^2+4x)}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{4x+2+4x^2+2x-2x^2-4x}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2+2x+2}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2(x^2+x+1)}{(2x+1)^2}$

Etudions le signe de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \iff 2(x^2+x+1) = 0 \iff x^2+x+1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = 1-4 = -3$ $\Delta < 0$ donc pas de solution $S = \emptyset$

D'après le théorème du signe du trinome, $x^2+x+1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Comme $(2x+1)^2 > 0$ $\forall x \in D_f$ On a finalement $f'(x) > 0$ $\forall x \in D_f$

Ce qui signifie que $\forall x \in D_f$ f est strictement croissante

4) Tableau de variations

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$

Rappel 2 polynômes sont égaux si les coefficients qui se trouvent devant les inconnues qui ont même puissance sont égaux

$f(x) = \frac{(ax+b)(2x+1) + c}{2x+1}$

$f(x) = \frac{2ax^2 + ax + 2bx + b + c}{2x+1}$

$f(x) = \frac{2ax^2 + (a+2b)x + b + c}{2x+1} = \frac{x^2 + 2x}{2x+1}$

On a donc le système de trois équations suivant avec les inconnues a, b, c

$\begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 2 \\ b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1/2 \\ \frac{1}{2} + 2b = 2 \\ b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1/2 \\ 2b = 3/2 \\ b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/4 \\ c = -b \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/4 \\ c = -3/4 \end{cases}$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2x+1}$

Montrons que Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$

$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{2x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{4(2x+1)}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -3 = -3 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 4(2x+1) = -\infty \end{array}\right\}$ Par limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{4(2x+1)} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = 0^+$

La droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ est bien une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

De même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{4(2x+1)} = 0^-$

La droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ est aussi asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

6) Montrons que $\Omega \left| \begin{array}{l} -1/2 \\ 1/2 \end{array} \right.$ est le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f

Calculons $f\left(-\frac{1}{2} + h\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + h\right) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4(-1+2h+1)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}h + \frac{3}{4} - \frac{3}{4 \times 2h}$

et $f\left(-\frac{1}{2} - h\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - h\right) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4(-1-2h+1)} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}h + \frac{3}{4} - \frac{3}{4(-2h)}$

$f\left(-\frac{1}{2} + h\right) + f\left(-\frac{1}{2} - h\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h - \frac{3}{8h} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8h} = 1$

$\frac{f\left(-\frac{1}{2} + h\right) + f\left(-1/2 - h\right)}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\Omega \left| \begin{array}{l} -1/2 \\ 1/2 \end{array} \right.$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

Rappel si $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$, alors $\Omega \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ est centre de symétrie de la courbe

L'équation de la tangente à une courbe en un point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 = f(x_0) \end{vmatrix}$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

7) Equation de la tangente T à l'origine $O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $\qquad f(0) = \dfrac{0^2 + 2\times 0}{2\times 0 + 1} = 0$

$T : y = 2x$ $\qquad f'(0) = \dfrac{2(0^2+0+1)}{(2\times 0+1)^2} = \dfrac{2}{1} = 2$

8) Intersection de C_f avec les axes de coordonnées

* Intersection avec l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$

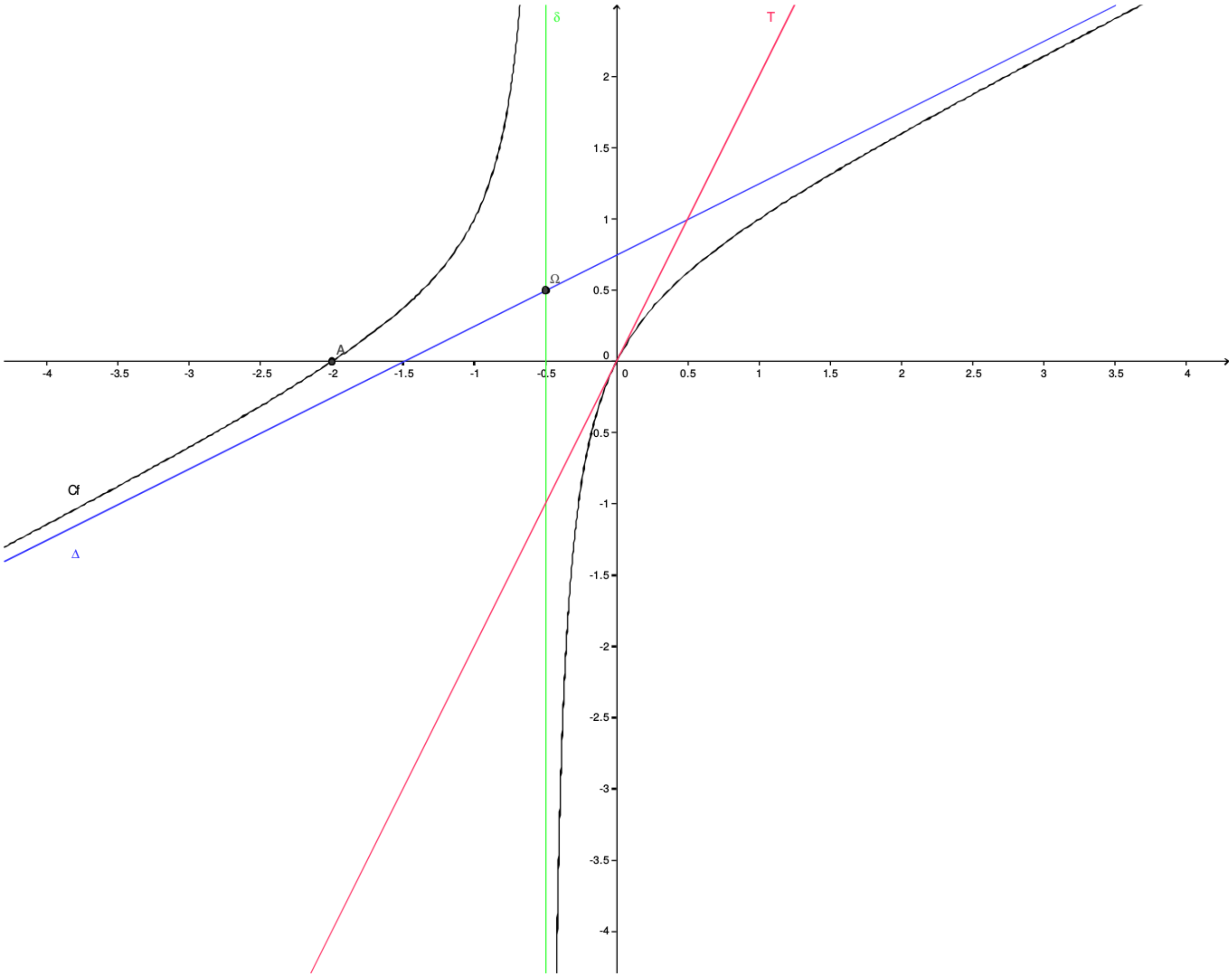
On calcule $f(0) = 0$ l'intersection est le point $O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ origine du repère

* Intersection avec l'axe des abscisses d'équation $y = 0$

On résoud $f(x) = 0 \iff x^2 + 2x = 0 \iff x(x+2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

Il y a deux points d'intersection $O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $A \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$

9) voir tracés sur la courbe



δ
T
Ω
A
Cf
Δ
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4