* Exercice 1 Domaine de définition

$f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ Contrainte $x-5 \neq 0$

On cherche $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$g(x) = \frac{3}{|x|+4}$ Contrainte $|x|+4 \neq 0$

On cherche $|x|+4=0 \Leftrightarrow |x|=-4$ impossible car $|x| \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

tout x est donc solution

donc $D_g = \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{1}{|x+4|}$ Contrainte $|x+4| \neq 0$

On cherche $|x+4|=0 \Leftrightarrow x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$

Donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$k(x) = \frac{x}{x^2-9}$ Contrainte $x^2-9 \neq 0$

On cherche $x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$

Donc $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,3\}$

* Exercice 2 $f(x) = 2x^2+3$ $g(x) = \sqrt{x^2+4}$

$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(2x^2+3) = \sqrt{(2x^2+3)^2+4} = \sqrt{4x^4+12x^2+9+4}$

$g\circ f(x) = \sqrt{4x^4+12x^2+13}$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2+4}) = 2(\sqrt{x^2+4})^2+3 = 2(x^2+4)+3$

$f\circ g(x) = 2x^2+8+3 = 2x^2+11$

* Exercice 3 Résoudre E_1 $x^2+x-3=0$

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times1\times(-3) = 1+12 = 13$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions

$x' = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ $x'' = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\,;\,\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

E_2 $\quad 2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Posons $X = x^2$ l'équation E_2 devient $2X^2 - 3X - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$

$X' = \dfrac{3 - \sqrt{25}}{4} = \dfrac{3-5}{4} = -1/2$ $\qquad X'' = \dfrac{3 + \sqrt{25}}{4} = \dfrac{3+5}{4} = 2$

Résolvons maintenant $x^2 = -1/2$ et $x^2 = 2$

$x^2 = -1/2 \rightarrow$ impossible car $x^2 \geq 0$

$x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

finalement $S = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$

I_1 $\quad \dfrac{3x+1}{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x-1} - \dfrac{3(x-1)}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1-3x+3}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{x-1} \leq 0$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
donc $x = 1$ est une valeur interdite

On fait un tableau de signes

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\dfrac{4}{x-1}$	$-$	$\|\|$	$+$

Donc $x \in]-\infty ; 1[$

I_2 $\quad \dfrac{x-1}{3x-7} \leq \dfrac{x-4}{x}$

Recherche des valeurs interdites des fonctions

$3x - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = 7/3$

$x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{3x-7} - \dfrac{x-4}{x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)x}{(3x-7)x} - \dfrac{(x-4)(3x-7)}{x(3x-7)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x - (3x^2 - 7x - 12x + 28)}{x(3x-7)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x - 3x^2 + 7x + 12x - 28}{x(3x-7)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 + 18x - 28}{x(3x-7)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2(x^2 - 9x + 14)}{x(3x-7)} \leq 0$

Factorisons $x^2 - 9x + 14$ $\qquad ax^2+bx+c = a(x-x')(x-x'')$

Pour cela Résolvons $x^2-9x+14=0$ avec $x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2-4ac = (-9)^2 - 4\times 1\times 14$

$\Delta = 81-56 = 25$ $\quad\Delta$ est positif donc il y a 2 solutions

$x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-5}{2} = 2$ et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+5}{2} = 7$

Donc $x^2-9x+14 = (x-2)(x-7)$

l'inéquation à résoudre est donc $Q(x) = \dfrac{-2(x-2)(x-7)}{x(3x-7)} \leq 0$

cherchons les valeurs qui annulent le numérateur et le dénominateur

$(x-2)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $x-7=0$ donc $x=2$ ou $x=7$

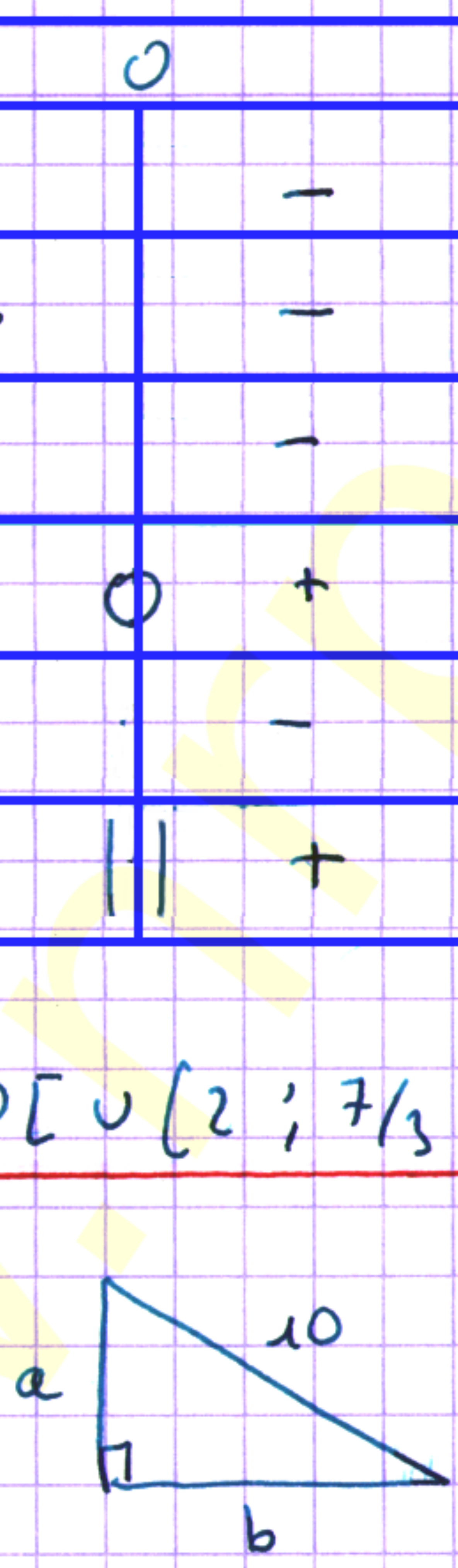
$x(3x-7) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $3x-7=0$ donc $x=0$ ou $x=7/3$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		$7/3$		7		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

d'où $S =]-\infty ; 0[\cup [2 ; 7/3[\cup [7 ; +\infty[$

* Exercice 4



Périmètre $a+b+10 = 24$

Comme le triangle est rectangle

On a aussi $a^2+b^2 = 10^2$

On a donc un système de 2 équations à 2 inconnues a et b

$\begin{cases} a+b = 14 \\ a^2+b^2 = 100 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} b = 14-a \\ a^2+(14-a)^2 = 100 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} b = 14-a \\ a^2+196-28a+a^2-100 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 14-a \\ 2a^2-28a+96 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} b = 14-a \\ a^2-14a+48 = 0 \end{cases}$

Suite de l'exercice 4

On a donc $\begin{cases} b = 14 - a \\ a^2 - 14a + 48 = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 48$

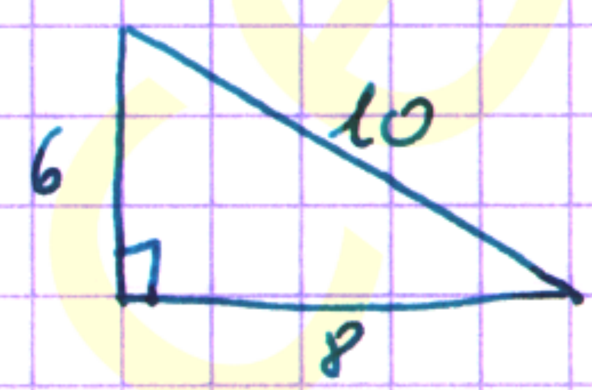
$\Delta = 196 - 192 = 4 \quad \Delta > 0$

On a donc 2 solutions $\quad a' = \dfrac{14-2}{2} = 6 \quad$ et $a'' = \dfrac{14+2}{2} = 8$

si $a' = 6$ alors $b' = 14 - 6 = 8 \qquad$ si $a'' = 8$ alors $b'' = 14 - 8 = 6$

Les dimensions du triangle rectangle sont donc

le périmètre vaut donc bien $6 + 8 + 10 = 24$.



* Exercice 5

Soient x et y les 2 réels cherchés : $\quad x^2 + y^2 = 169$

$x \times y = 60$

$y = 60/x \quad$ donc $x \neq 0$

donc $\quad x^2 + \left(\dfrac{60}{x}\right)^2 = 169 \iff x^2 + \dfrac{3600}{x^2} = 169$

$\iff x^4 - 169x^2 + 3600 = 0 \qquad$ Posons $X = x^2$ l'équation devient

$X^2 - 169X + 3600 = 0 \qquad \Delta = (-169)^2 - 4 \times 1 \times 3600$

$\Delta = 14161 \quad$ et $\sqrt{\Delta} = 119$

les solutions sont : $\quad X' = \dfrac{169 - 119}{2} \qquad X'' = \dfrac{169 + 119}{2}$

$X' = \dfrac{50}{2} = 25 \qquad X'' = \dfrac{288}{2} = 144$

Revenons aux équations originales $\quad x^2 = 25 \quad$ ou $x^2 = 144$

$x = \pm 5 \quad$ ou $x = \pm 12$

si $x = -12 \qquad y = \dfrac{60}{-12} = -5$

si $x = 12 \qquad y = \dfrac{60}{12} = 5$

si $x = -5 \qquad y = \dfrac{60}{-5} = -12$

si $x = 5 \qquad y = \dfrac{60}{5} = 12$

Les quatre couples solutions sont donc

$S = \{ (-12 ; -5) \; (12 ; 5) \; (-5 ; -12) \; (5 ; 12) \}$

* Exercice 6

E $\quad x^2 + (1-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} - 4 = 0$

$a = 1 \quad b = 1-\sqrt{2} \quad c = -2\sqrt{2}-4$

Calculons $\Delta = b^2 - 4ac = (1-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-2\sqrt{2}-4)$

$\Delta = 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 8\sqrt{2} + 16$

$\Delta = 19 + 6\sqrt{2}$

Cherchons un nombre qui mis au carré donne $19 - 6\sqrt{2}$

Pour cela développons $(1+3\sqrt{2})^2$

$(1+3\sqrt{2})^2 = 1 + 2 \times 1 \times 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2$

$(1+3\sqrt{2})^2 = 1 + 6\sqrt{2} + 9 \times 2$

$(1+3\sqrt{2})^2 = 19 + 6\sqrt{2}$

On a donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{19+6\sqrt{2}} = \sqrt{(1+3\sqrt{2})^2} = 1+3\sqrt{2}$

A présent nous pouvons écrire les 2 solutions

$x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{2}-(1+3\sqrt{2})}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}$

$x' = -1-\sqrt{2}$

et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{2}+1+3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$x'' = 2\sqrt{2}$

$S = \{-1-\sqrt{2} \,;\, 2\sqrt{2}\}$

* Exercice 7

1) Tableau de variations

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	$-\infty \nearrow$	3	$\searrow -1 \nearrow$	$+\infty$

2) $f(x) = 3 \rightarrow x = -1$ et $x = 2$ $\qquad f(x) \geq 3 \qquad S = \{-1\} \cup [2 ; +\infty[$

3) $f(x) = x$: l'équation $f(x) = x$ a 3 solutions car elles se coupent en trois points.

4) si $k < -1$ $\quad f(x) = k \rightarrow 1$ solution
si $k = -1$ $\quad f(x) = k \rightarrow 2$ solutions
si $-1 < k < 3$ $\quad f(x) = k \rightarrow 3$ solutions
si $k = 3$ $\quad f(x) = k \rightarrow 2$ solutions
si $k > 3$ $\quad f(x) = k \rightarrow 1$ solution