

Devoir de mathématiques
Dérivation et étude de fonctions

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , orienté dans le sens direct.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Déterminer les limites aux bornes de D et justifier l'existence éventuelle d'asymptote(s) (horizontale(s) ou verticale(s)) au graphe G de f .
3. Justifier que f est dérivable sur D , calculer sa fonction dérivée puis déterminer son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b, c tels que pour tout x appartenant à D :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x + 1}$$

puis en déduire que G admet une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation réduite.

6. Montrer que G admet un centre de symétrie Ω dont on donnera les coordonnées.
7. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à G à l'origine.
8. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de G avec les axes de coordonnées.
9. Tracer l'allure de G et faire figurer le(s) asymptote(s), la (les) tangente(s) horizontale(s), la tangente T , le point Ω , et le(s) point(s) obtenu(s) en 8.