Suites : exercices

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - n + 1$.
a) Calculer U_0 et U_{10}.
b) Exprimer, en fonction de n, $U_n + 1$ et U_{n+1}.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.
a) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n.
b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_{10}.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$.
Calculer la raison r et U_0 .

Exercice 5 :

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 7$ et de raison $q = 3$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_5.

Exercice 6 :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%.
Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.
a) On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000+n)$.
Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
b) Calculer la production de l'usine en 2005.

Exercice 7 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \dfrac{3+2U_n}{5}$ (pour tout $n \geqslant 0$).
a) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ (pour tout $n \geqslant 0$).
Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{2}{5}V_n$ (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison b et le premier terme V_0.
b) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).
c) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 .

2°) On admet que $u_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer v_0 ; v_1 ; v_2 ; v_3 .

3°) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n .

En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

4°) Exprimer v_n en fonction de n.

5°) Démontrer que $u_n = \dfrac{3}{3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + 2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) Calculer u_1 et u_2 .

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \neq -1$ et $u_n \neq 0$.

3°) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer v_0 ; v_1 ; v_2

4°) Justifier que $v_n \neq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $u_n = \dfrac{1}{v_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5°) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

6°) Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice

a) Soit $q \neq 1$. Donner une expression simplifiée de la somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.
Démontrer cette relation.

b) Résoudre l'équation : $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 0$

Exercice

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait de plus que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100}$.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, et par la relation, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2. La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ? géométrique ?
2. On pose, pour tout entier n, $w_n = 3u_n - 2$.
   Calculer w_0, w_1, w_2.
3. Prouver que la suite (w_n) est géométrique.
   Exprimer alors w_n en fonction de n, puis u_n en focntion de n.
4. Déterminer alors la limite de u_n.