Second Degré

Soit le polynome du second degré $p(x) = -3x^2 - 5x + 8$

1) Détermination de la forme canonique de $p(x)$, $a(x-\alpha)^2+\beta$

$p(x) = -3x^2 - 5x + 8$

$p(x) = -3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}\right)$

$p(x) = -3\left(\left(x + 5/6\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{8}{3}\right)$

$p(x) = -3\left(\left(x + 5/6\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{96}{36}\right)$

$p(x) = -3\left(\left(x + 5/6\right)^2 - \frac{121}{36}\right)$

$p(x) = -3\left(x + 5/6\right)^2 + \frac{121}{12}$

finalement $p(x) = -3\left(x - (-5/6)\right)^2 + \frac{121}{12}$ d'ou $\alpha = -5/6$ et $\beta = \frac{121}{12}$

2) Détermination de la forme canonique de $p(x)$ en utilisant les definitions des valeurs α et β

$p(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad \alpha = -b/2a$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

$p(x) = -3x^2 - 5x + 8$ $\quad a = -3$ $\quad b = -5$ $\quad c = 8$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(-3)8$

$\Delta = 25 + 96 = 121$ $\quad$ On a donc $\alpha = \frac{5}{-6}$ et $\beta = \frac{-121}{-12} = \frac{121}{12}$

La forme canonique de $p(x)$ est donc $p(x) = -3\left(x - (-5/6)\right)^2 + \frac{121}{12}$

3) Résolution de l'équation du second degré $p(x) = 0$

$-3x^2 - 5x + 8 = 0$ $\quad a = -3$ $\quad b = -5$ $\quad c = 8$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 121$

$\Delta > 0$ donc deux solutions distinctes

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 - \sqrt{121}}{-6} = \dfrac{5 - 11}{-6} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ \text{et } x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 + \sqrt{121}}{-6} = \dfrac{5 + 11}{-6} = \dfrac{16}{-6} = -\dfrac{8}{3} \end{array}\right\} \text{ d'ou } S = \left\{-\frac{8}{3} ; 1\right\}$$

4) Factorisation de $p(x)$ sous la forme $a(x-x')(x-x'')$

Dans ce cas comme $\Delta = 121$, la condition $\Delta \geq 0$ est vérifiée

On peut donc factoriser $p(x)$

Les deux valeurs x' et x'' valent $+1$ et $-\frac{8}{3}$ respectivement d'après 3)

$$p(x) = -3x^2 - 5x + 8 = -3(x-1)\left(x - \left(-\tfrac{8}{3}\right)\right) = -3(x-1)\left(x + \tfrac{8}{3}\right)$$

5) Résolution de l'inéquation du second degré $p(x) \leq 0$

Dans un premier temps, il faut résoudre $p(x) = 0$ ce qui a été fait dans la partie 3) pour trouver les valeurs de x à placer sur notre axe des réels

On obtient

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2-5x+8$		signe de a : $-$	0	signe de $-a$: $+$	0	signe de a : $-$	

Puis on utilise le théorème du signe d'un trinôme du second degré afin de déterminer le signe de $p(x)$ en fonction des valeurs de x

Ce qui nous donne pour $p(x) \leq 0$ $\quad S = \left]-\infty ; -\frac{8}{3}\right] \cup [1 ; +\infty[$

De même $p(x) < 0$ a pour solution $\quad S = \left]-\infty ; -\frac{8}{3}\right[\cup]1 ; +\infty[$

Pour $p(x) \geq 0$ on obtient $\quad S = \left[-\frac{8}{3} ; 1\right]$

et finalement pour l'inéquation $p(x) > 0$ $\quad S = \left]-\frac{8}{3} ; 1\right[$