

Second Degré

Soit le polynôme du second degré $p(x) = -3x^2 - 5x + 8$

1) Détermination de la forme canonique de $p(x)$, $a(x-d)^2 + \beta$

$$p(x) = -3x^2 - 5x + 8$$

$$p(x) = -3 \left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{8}{3} \right)$$

$$p(x) = -3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{8}{3} \right)$$

$$p(x) = -3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{96}{36} \right)$$

$$p(x) = -3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{121}{36} \right)$$

$$p(x) = -3 \left(x + \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{121}{12}$$

finalment $p(x) = -3 \left(x - \left(-\frac{5}{6} \right) \right)^2 + \frac{121}{12}$ d'où $d = -\frac{5}{6}$ et $\beta = \frac{121}{12}$

2) Détermination de la forme canonique de $p(x)$ en utilisant les définitions des valeurs d et β

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad d = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$p(x) = -3x^2 - 5x + 8 \quad a = -3 \quad b = -5 \quad c = 8 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(-3)8$$

$$\Delta = 25 + 96 = 121 \quad \text{On a donc} \quad d = \frac{5}{-6} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-121}{-12} = \frac{121}{12}$$

La forme canonique de $p(x)$ est donc $p(x) = -3 \left(x - \left(-\frac{5}{6} \right) \right)^2 + \frac{121}{12}$

3) Résolution de l'équation du second degré $p(x) = 0$

$$-3x^2 - 5x + 8 = 0 \quad a = -3 \quad b = -5 \quad c = 8 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 121$$

$\Delta > 0$ donc deux solutions distinctes

$$x^1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{121}}{-6} = \frac{5 - 11}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$\text{et } x^2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{121}}{-6} = \frac{5 + 11}{-6} = \frac{16}{-6} = -\frac{8}{3}$$

d'où $S = \left\{ -\frac{8}{3}; 1 \right\}$

4) Factorisation de $p(x)$ sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$

Dans ce cas, comme $\Delta = 121$, la condition $\Delta \geq 0$ est vérifiée

On peut donc factoriser $p(x)$

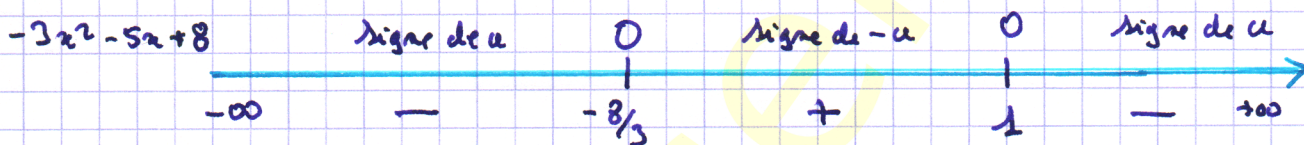
Les deux valeurs réelles sont $+1$ et $-\frac{8}{3}$ respectivement d'après 3)

$$\underline{p(x) = -3x^2 - 5x + 8 = -3(x-1)(x - (-\frac{8}{3})) = -3(x-1)(x + \frac{8}{3})}$$

5) Résolution de l'équation du second degré $p(x) \leq 0$

Dans un premier temps, il faut résoudre $p(x) = 0$ ce qui a été fait dans la partie 3) pour trouver les valeurs de x à placer sur notre axe des réels

On obtient



Puis on utilise le théorème du signe d'un binôme du second degré afin de déterminer le signe de $p(x)$ en fonction des valeurs de x

Ce qui nous donne pour $p(x) \leq 0$ $S =]-\infty; -\frac{8}{3}] \cup [1; +\infty[$

De même $p(x) < 0$ a pour solution $S =]-\infty; -\frac{8}{3}[\cup]1; +\infty[$

Pour $p(x) \geq 0$ on obtient $S = [-\frac{8}{3}; 1]$

et finalement pour l'équation $p(x) > 0$ $S =]-\frac{8}{3}; 1[$