Equation bicarrée

Pour résoudre une équation bicarrée de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $a \neq 0$ (E_0), on fait un changement de variable en posant $X = x^2$, pour obtenir l'équation du second degré d'inconnue X $aX^2 + bX + c = 0$ (E_1) que l'on va résoudre.

Pour cela on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et suivant son signe, on obtient $\neq$ cas

si $\Delta < 0$ alors

$S(E_1) = \{\emptyset\}$

et $S(E_0) = \{\emptyset\}$

si $\Delta = 0$ alors

$S(E_1) = \{ X_0$ (solution double) $X_0 = -b/2a \}$

si $X_0 < 0$ alors $S(E_0) = \{\emptyset\}$

si $X_0 = 0$ alors $S(E_0) = \{0\}$

si $X_0 > 0$ alors $S(E_0) = \{-\sqrt{X_0} ; +\sqrt{X_0}\}$

si $\Delta > 0$ alors $S(E_1) = \left\{ X' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; X'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

si $X' < 0$ et $X'' < 0$ alors $S(E_0) = \{\emptyset\}$

si $X' \geq 0$ ou $X'' \geq 0$ alors $X_0 =$ solution positive et $S(E_0) = \{-\sqrt{X_0} ; +\sqrt{X_0}\}$

si $X' > 0$ et $X'' > 0$ alors $S(E_0) = \{-\sqrt{X'} ; -\sqrt{X''} ; +\sqrt{X'} ; +\sqrt{X''}\}$

*** Exemple 1**

On doit résoudre l'équation bicarrée $2x^4 + 4x^2 + 5 = 0$ (E_0)

posons $X = x^2$, l'équation (E_0) devient $2X^2 + 4X + 5 = 0$ (E_1)

$a = 2$ $b = 4$ $c = 5$ donc $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 5 = 16 - 40 = -24$

$\Delta < 0$ donc $S(E_1) = \{\emptyset\}$ et par conséquent $\underline{S(E_0) = \{\emptyset\}}$

*** Exemple 2**

On veut résoudre l'équation bicarrée $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (E_0)

On pose $X = x^2$ ce qui donne $X^2 - 13X + 36 = 0$ (E_1)

$a = 1$ $b = -13$ $c = 36$ donc $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 169 - 144 = 25$

$\Delta > 0$ donc $X' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13 - 5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ et $X' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{18}{2} = 9$

$S(E_1) = \{4 ; 9\}$ comme $X = x^2$ on doit résoudre deux équations provenant du changement de variable

$x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$ et $x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$

Finalement $\underline{S(E_0) = \{-3 ; -2 ; 2 ; 3\}}$

Equation bicarrée

* **Exemple 3** On se propose de résoudre l'équation bicarrée $4x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ (E_0)

Posons $X = x^2$ donc (E_0) devient $4X^2 - 7X + 2 = 0$ (E_1)

$a = 4$ $b = -7$ $c = 2$ d'où $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 49 - 32 = 17$

$\Delta > 0$ donc $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-\sqrt{17}}{8}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+\sqrt{17}}{8}$

$S(E_1) = \left\{ \frac{7-\sqrt{17}}{8} ; \frac{7+\sqrt{17}}{8} \right\}$ $x' > 0$ et $x'' > 0$

Comme $x^2 = X$, on doit résoudre les équations provenant du changement de variable pour trouver x

$x^2 = \frac{7-\sqrt{17}}{8} \iff x = -\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{8}}$ ou $x = +\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{8}}$

$x^2 = \frac{7+\sqrt{17}}{8} \iff x = -\sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{8}}$ ou $x = \sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{8}}$

Finalement $S(E_0) = \left\{ -\sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{8}} ; -\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{8}} ; \sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{8}} ; \sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{8}} \right\}$

* **Exemple 4** On veut résoudre l'équation bicarrée $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ (E_0)

On pose $X = x^2$ donc (E_0) devient $4X^2 - 4X + 1 = 0$ (E_1)

$a = 4$ $b = -4$ $c = 1$ d'où $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 4 \times 1 = 0$

Il y a une solution double $x_0 = -b/2a = \frac{4}{8} = 1/2$

$S(E_1) = \{1/2\}$ comme on a posé $x^2 = X$, on doit résoudre l'équation provenant de ce changement de variable

$x^2 = 1/2 \iff x = -\sqrt{1/2} = -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}/2$

ou $x = +\sqrt{1/2} = +\sqrt{2}/2$

Finalement $S(E_0) = \{-\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2\}$

* **Exemple 5** On veut résoudre l'équation bicarrée $-7x^4 + 5x^2 = 0$ (E_0)

Posons $X = x^2$ donc (E_0) devient $-7X^2 + 5X = 0$ (E_1) $a = -7$ $b = 5$ $c = 0$

d'où $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(-7)0 = 25$ $\Delta > 0$ il y a deux solutions x', x''

$X' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-5}{-14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ et $X'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+5}{-14} = 0$

$S(E_1) = \{0 ; 5/7\}$ et comme $x^2 = X$ on a $x^2 = 0 \iff x = 0$ et

$x^2 = 5/7 \iff x = -\sqrt{5/7}$ ou $x = \sqrt{5/7}$ Finalement $S(E_0) = \left\{-\sqrt{5/7} ; 0 ; \sqrt{\frac{5}{7}}\right\}$