

Equation de droite

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $a b' - a' b = 0$

Cette relation sur la colinéarité de deux vecteurs va nous permettre de déterminer l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et l'équation réduite $y = mx + p$ d'une droite

* Exemple 1 On se propose de déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) passant par les deux points $A(2; -5)$ et $B(4; -7)$ en utilisant la relation de colinéarité de deux vecteurs.

\vec{AB} est donc un vecteur directeur de (AB) et $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+5 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+5 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ M est un point quelconque de (AB) $\Rightarrow (x; y)$ mais comme $M \in (AB)$ $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+5 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur \vec{AB}

$$\text{Donc } (x-2) \times (-2) - (y+5) \times 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(-1) - (y+5) = 0 \\ \Leftrightarrow -x+2 - y-5 = 0 \Leftrightarrow -x-y-3 = 0 \Leftrightarrow \underline{x+y+3=0}$$

Cette équation est l'équation cartésienne de (AB) , si on isole y , on obtient l'équation réduite de (AB) $y = -x - 3$

* Exemple 2 On veut déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par $C(-3; -7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_d \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Pour cela, on considère un point $M(x; y)$ quelconque appartenant à (d) , dans ce cas les vecteurs \vec{u}_d et \vec{CM} sont colinéaires et vérifient la relation $ab' - a'b = 0$

On a donc $\vec{CM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y+7 \end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{u}_d \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow (x+3) \times 2 - (y+7) \times (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+6 + 3y+21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{2x+3y+27=0} \quad \text{qui est l'équation cartésienne de } (d)$$

En continuant le calcul et en isolant y , on obtient

l'équation réduite de (d)

$$\Leftrightarrow 3y = -2x - 27$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = -\frac{2}{3}x - 9}$$