Equation paramétrique du second degré

Une équation paramétrique du second degré est une équation du second degré dans laquelle les valeurs a, b, c peuvent dépendre d'un paramètre m, $m \in \mathbb{R}$.
Elle se résout comme une équation du second degré classique, avec cependant une étape d'analyse supplémentaire due à la présence du paramètre m qui va influer sur le signe du discriminant Δ et par conséquent sur le nombre de solutions de l'équation.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation paramétrique (E) suivante

$$(2m-3)x^2 - (3m+2)x + m - 2 = 0$$

Il y a une contrainte sur $a = 2m-3$, il faut que $a \neq 0$ donc $2m-3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3/2$

sinon ce n'est pas une équation du second degré mais du premier degré en x

donc si $m = 3/2$ on a $-\left(\frac{9}{2}+2\right)x + \frac{3}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2}x = +\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{-13}$

si $m \neq 3/2$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 2m-3$, $b = -(3m+2)$, $c = m-2$

d'où $\Delta = (-(3m+2))^2 - 4(2m-3)(m-2) = 9m^2 + 12m + 4 - 4(2m^2 - 4m - 3m + 6)$

$\Delta = 9m^2 + 12m + 4 - 8m^2 + 28m - 24 = \underline{m^2 + 40m - 20}$

Le nombre de solutions de (E) dépend du signe de Δ, il faut donc étudier ce signe, pour cela on utilise le théorème du signe d'un trinôme et on résout d'abord l'équation $m^2 + 40m - 20 = 0$ avec $a=1$ $b=40$ $c=-20$

d'où $\Delta' = b^2 - 4ac = 1600 - 4 \times 1 \times (-20) = 1680$ $\quad \Delta' > 0$ il y a deux solutions $m' = \frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-40-\sqrt{16 \times 105}}{2} = \frac{-40-4\sqrt{105}}{2} = \underline{-20-2\sqrt{105}}$

et $m'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{2a} = \underline{-20+2\sqrt{105}}$

m	$-\infty$		$-20-2\sqrt{105}$		$-20+2\sqrt{105}$		$+\infty$
$\Delta = m^2+40m-20$		signe de a $+$	0	signe de $-a$ $-$	0	signe de a $+$	

- Si $m \in \left]-20-2\sqrt{105}; -20+2\sqrt{105}\right[$, alors $\Delta < 0$ et $\underline{S_{(E)} = \{\emptyset\}}$
- Si $m = -20-2\sqrt{105}$ ou $m = -20+2\sqrt{105}$, alors $\Delta = 0$ et (E) a une solution double $x' = x'' = -b/2a = \frac{3m+2}{2(2m-3)} = \underline{-\frac{13+3\sqrt{105}}{169}}$
- Si $m \in \left]-\infty; -20-2\sqrt{105}\right[\cup \left]-20+2\sqrt{105}; +\infty\right[$, alors (E) admet deux solutions distinctes $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3m+2-\sqrt{m^2+40m-20}}{4m-6}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3m+2+\sqrt{m^2+40m-20}}{4m-6}$

Equation Paramétrique du second degré

On se propose de résoudre les équations paramétriques suivantes :

1) $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m - 21 = 0$ $\quad a = 1 \quad b = -2(m+2) \quad c = m^2 + 4m - 21$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2(m+2))^2 - 4 \times 1 \times (m^2 + 4m - 21) = 4(m+2)^2 - 4(m^2 + 4m - 21)$

$\Delta = 4(m^2 + 4m + 4) - 4m^2 - 16m + 84 = 4m^2 + 16m + 16 - 4m^2 - 16m + 84 = 100$

Donc $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2(m+2) - 10}{2} = m + 2 - 5 = m - 3$

$x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2(m+2) + 10}{2} = m + 2 + 5 = m + 7$

$S = \{m-3 \,;\, m+7\}$

2) $(m-3)x^2 + (7-4m)x + 20 = 0$ $\quad a = m - 3 \quad b = 7 - 4m \quad c = 20$

Contrainte $m - 3 \neq 0$ donc il faut que $m \neq 3$ sinon pas d'équation du second degré

$\Delta = b^2 - 4ac = (7-4m)^2 - 4(m-3)20 = 49 - 56m + 16m^2 - 80m + 240 = 16m^2 - 136m + 289$

$\Delta = (4m - 17)^2$

Donc $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7 + 4m - (4m - 17)}{2(m-3)} = \dfrac{-7 + 4m - 4m + 17}{2(m-3)} = \dfrac{10}{2(m-3)} = \dfrac{5}{m-3}$

et $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7 + 4m + 4m - 17}{2(m-3)} = \dfrac{8m - 24}{2(m-3)} = \dfrac{8(m-3)}{2(m-3)} = 4$

donc $S = \left\{\dfrac{5}{m-3} \,;\, 4\right\}$

3) $(4m+1)x^2 - 2(7-2m)x + m + 3 = 0$ Contrainte $4m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{-1}{4}$

Sinon pas d'équation du second degré $\quad a = 4m+1 \quad b = -2(7-2m) \quad c = m+3$

$\Delta = (-2(7-2m))^2 - 4(4m+1)(m+3) = 4(7-2m)^2 - 4(4m^2 + 12m + m + 3)$

$\Delta = 4(49 - 28m + 4m^2) - 16m^2 - 52m - 12 = 196 - 112m + 16m^2 - 16m^2 - 52m - 12$

$\Delta = -164m + 184$ Le nombre de solutions dépend du signe de Δ

→ Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow -164m + 184 < 0 \Leftrightarrow -164m < -184 \Leftrightarrow m > \dfrac{46}{41}$ $\quad S = \{\emptyset\}$

→ Si $\Delta = 0$ ou $m = \dfrac{46}{41}$ une seule solution $x' = x'' = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2(7-2m)}{2(4m+1)} = \dfrac{7-2m}{4m+1}$

comme $m = \dfrac{46}{41}$ donc $x' = x'' = \dfrac{7 - 2 \times \frac{46}{41}}{4 \times \frac{46}{41} + 1} = \dfrac{\frac{287-92}{41}}{\frac{184+41}{41}} = \dfrac{287-92}{225} = \dfrac{195}{225} = \dfrac{39}{45} = \dfrac{13}{15}$

$S = \{13/15\}$

→ Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{46}{41}$ alors il y a deux solutions distinctes

$x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2(7-2m) - 2\sqrt{46 - 41m}}{2(4m+1)} = \dfrac{7 - 2m - \sqrt{46 - 41m}}{4m+1}$ et $x'' = \dfrac{7 - 2m + \sqrt{46 - 41m}}{4m+1}$