Nombre dérivé

Rappel On appelle nombre dérivé le résultat, s'il existe du calcul de la limite suivante

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, le nombre dérivé est noté $f'(x_0)$ si on peut calculer la limite.

* **Exemple 1** Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$ Calculons le nombre dérivé de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

Pour cela calculons $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(1+h)^2 - 8(1+h) + 7 - (2 \times 1^2 - 8 \times 1 + 7)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(1+2h+h^2) - 8 - 8h + 7 - 2 + 8 - 7}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2 + 4h + 2h^2 - 2 - 8h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h^2 - 4h}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} 2h - 4 = -4$ Le nombre dérivé de f au point d'abscisse $x_0 = 1$ est donc $f'(1) = -4$

* **Exemple 2** Soit $g(x) = \dfrac{-7x-4}{3x-5}$ Calculons le nombre dérivé de g au point d'abscisse $x_0 = 2$

Pour cela calculons $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-7(2+h)-4}{3(2+h)-5} - \left(\dfrac{-7 \times 2 - 4}{3 \times 2 - 5}\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{-14 - 7h - 4}{6 + 3h - 5} - \dfrac{-14 - 4}{6 - 5}\right) \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{-7h - 18}{3h + 1} + 18\right) \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{-7h - 18 + 54h + 18}{3h+1}\right)\dfrac{1}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{47h}{3h+1} \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{47}{3h+1} = 47$

Le nombre dérivé de g au point d'abscisse $x_0 = 2$ est donc $g'(2) = 47$

* **Exemple 3** Soit $h(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 5$ Calculons le nombre dérivé de h au point d'abscisse $x_0 = -1$ Pour cela calculons $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(-1+h) - h(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h-1) - h(-1)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(h-1)^3 - 5(h-1)^2 + 6(h-1) - 5 - ((-1)^3 - 5(-1)^2 + 6(-1) - 5)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 - 3h^2 + 3h - 1 - 5(h^2 - 2h + 1) + 6h - 6 - 5 - (-1 - 5 - 6 - 5)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 - 3h^2 + 3h - 1 - 5h^2 + 10h - 5 + 6h - 6 - 5 + 1 + 5 + 6 + 5}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 - 8h^2 + 19h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^2 - 8h + 19 = 19$

Le nombre dérivé de h au point d'abscisse $x_0 = -1$ est donc $h'(-1) = 19$

* **Exemple 4** Soit $i(x) = x - \dfrac{1}{x}$ Calculons le nombre dérivé de i au point d'abscisse $x_0 = 3$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{i(3+h) - i(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(3 + h - \dfrac{1}{3+h} - \left(3 - \dfrac{1}{3}\right)\right) \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(3 + h - \dfrac{1}{3+h} - 3 + \dfrac{1}{3}\right) \times \dfrac{1}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left(h - \dfrac{1}{3+h} + \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{(3+h)h - 1}{3+h} + \dfrac{1}{3}\right) \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{h^2 + 3h - 1}{3+h} + \dfrac{3+h}{3(3+h)}\right) \times \dfrac{1}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{3h^2 + 9h - 3 + 3 + h}{3(3+h)}\right) \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{3h^2 + 10h}{9 + 3h}\right) \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h + 10}{9 + 3h} = \dfrac{10}{9}$ donc $i'(3) = 10/9$