Limites

Rappel Il y a quatre formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty \times 0$, $\infty - \infty$. Chaque fois que l'on rencontre une forme indéterminée, il faut transformer l'écriture de l'expression pour pouvoir donner une réponse sur le calcul de la limite.

* $\lim_{x \to +\infty} 2x^2+3x-1 = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 3x-1 = +\infty \end{array}\right\}$ Par limite d'une somme $\lim_{x \to +\infty} 2x^2+3x-1 = +\infty$

* $\lim_{x \to -\infty} 2x^2+3x-1 = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} 3x-1 = -\infty \end{array}\right\}$ FI $\infty - \infty$

Rappel $\lim_{x \to \left|\begin{smallmatrix}-\infty\\+\infty\end{smallmatrix}\right.} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \to \left|\begin{smallmatrix}-\infty\\+\infty\end{smallmatrix}\right.} a_n x^n$ (terme de plus haut degré)

Donc $\lim_{x \to -\infty} 2x^2+3x-1 = \lim_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} -x^3+4x+1 = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 4x+1 = +\infty \end{array}\right\}$ FI $\infty - \infty$

Donc $\lim_{x \to +\infty} -x^3+4x+1 = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

* $\lim_{x \to -\infty} -x^3+4x+1 = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} 4x+1 = -\infty \end{array}\right\}$ FI $\infty - \infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} -x^3+4x+1 = \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

* $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^4+3x+2} = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} 3x+2 = -\infty \end{array}\right\}$ FI $\infty - \infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^4+3x+2} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^4} = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^4+3x+2} = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 3x+2 = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme de limites $\lim_{x \to +\infty} x^4+3x+2 = +\infty$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^4+3x+2} = +\infty$

* $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x+5} = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} -x+5 = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme de limites $\lim_{x \to -\infty} x^2-x+5 = +\infty$

Donc $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x+5} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+5} = ?$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x+5 = -\infty\end{array}\right\}$ FI $\infty-\infty$

Rappel $\sqrt{A^2}=|A|$ par définition

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = ?$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x-3 = -\infty\end{array}\right\}$ FI $\dfrac{\infty}{\infty}$

Rappel $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$

(Rapport des termes de + haut degré)

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$

* $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \dfrac{2x+1}{x-3} = ?$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} 2x+1 = 7 \\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3 = 0^-\end{array}\right\}$ Par limite d'un quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \dfrac{2x+1}{x-3} = -\infty$

* $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{2x+1}{x-3} = ?$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} 2x+1 = 7 \\ \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x-3 = 0^+\end{array}\right\}$ Par quotient de limites

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{2x+1}{x-3} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = ?$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-3 = +\infty\end{array}\right\}$ FI $\dfrac{\infty}{\infty}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2+3}{x^2} = ?$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ FI $\dfrac{\infty}{\infty}$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2+3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 5 = 5$

* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5x^2+3}{x^2} = ?$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} 5x^2+3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0\end{array}\right\}$ Par limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5x^2+3}{x^2} = +\infty$

Ici il est inutile de séparer la limite en 0 en 2 cas 0^- et 0^+ car la variable x est au carré et par conséquent $\lim\limits_{x\to0^-} x^2 = \lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2+2x-5}{x} = ?$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2+2x-5 = -5$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ } Par quotient de limites $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2+2x-5}{x} = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2x-5}{x} = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x-5 = -\infty$ } FI $\infty - \infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2x-5}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 - 5/x = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+2x+3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 = +\infty$ } FI $\dfrac{\infty}{\infty}$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = ?$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^2+2x+3 = 2$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x+1)^2 = 0$ } Par limite d'un quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = +\infty$

comme le dénominateur $(x+1)^2$ donne le même résultat en -1^- et en -1^+ on obtient le même résultat quand on cherche la $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$ qui donne donc $+\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x+3 = -\infty$ } FI $\infty - \infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1.$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{(x-4)^2} = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x+3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-4)^2 = +\infty$ } FI $\dfrac{\infty}{\infty}$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{(x-4)^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{x^2-8x+16} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0^-$

* $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \dfrac{2x+3}{(x-4)^2} = ?$

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} 2x+3 = 11$; $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} (x-4)^2 = 0^+$ } Par quotient de limites $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \dfrac{2x+3}{(x-4)^2} = +\infty$

Comme le dénominateur $(x-4)^2$ donne le même résultat en 4^- et en 4^+, on obtient le même résultat quand on cherche la $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \dfrac{2x+3}{(x-4)^2}$ qui donne donc aussi $+\infty$