Asymptote horizontale

Rappel : Si $\lim\limits_{x \to \substack{-\infty \\ +\infty}} f(x) = b$, alors la droite horizontale d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f $\quad b \in \mathbb{R}$

* Exemple 1 $\quad f(x) = \dfrac{2x^2+3x-7}{5x^2+4x-2}$

Cherchons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x-7 = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+3x-7 = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4x-2 = +\infty \end{array}\right\}$ Par limite d'une somme $\lim 5x^2+4x-2 = +\infty$

On obtient une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

Rappel : la limite d'un rapport de deux polynomes est la limite du rapport des deux termes de plus haut degré de chaque polynome (⚠ valable uniquement en $-\infty$ et $+\infty$)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{5x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{5} = 2/5$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2/5$, on en déduit que la droite d'équation $y = 2/5$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f

* Exemple 2 $\quad g(x) = \dfrac{-5x}{x^2+8}$

Cherchons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -5x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+8 = +\infty \end{array}\right\}$ On obtient une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

Théorème du rapport

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{x} = 0^+$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0^+$, la droite $y = 0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction g

Asymptote verticale

Rappel : Si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = \begin{vmatrix} -\infty \\ +\infty \end{vmatrix}$, alors la droite verticale d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f $\quad a \in \mathbb{R}$

* Exemple 1 $\quad f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x - 1}$

Cherchons $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x < 1}} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x < 1}} 2x^2 - x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x < 1}} x - 1 = 0^- \end{array}\right\}$$

Par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$, on en déduit que la droite verticale $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f.

* Exemple 2 $\quad g(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

Cherchons $\lim\limits_{\substack{x \mapsto -1 \\ x < -1}} g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \mapsto -1} 2x^2 + 8x + 2 = -4 \\ \lim\limits_{x \mapsto -1} x^2 + 2x + 1 = 0^+ \end{array}\right\}$$

Par limite d'un quotient, $\lim\limits_{\substack{x \mapsto -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \mapsto -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty$, on en déduit que la droite verticale $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction g.

* Exemple 3 $\quad h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}$

Cherchons $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x > 2}} h(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x > 2}} x^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x > 2}} x^2 - 4x + 4 = 0^+ \end{array}\right\}$$

Par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x > 2}} h(x) = +\infty$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 2 \\ x > 2}} h(x) = +\infty$, on en déduit que la droite verticale d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction h

Asymptote oblique

Rappel Si $\lim\limits_{x \to \left|\begin{smallmatrix}-\infty\\+\infty\end{smallmatrix}\right.} f(x) - (ax+b) = \left|\begin{smallmatrix}0^-\\0^+\end{smallmatrix}\right.$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f

Exemple 1 $\quad f(x) = 2x - 3 + \dfrac{7}{5-x}$

Cherchons $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) - (2x-3)$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) - (2x-3) = \lim_{x \mapsto -\infty} 2x - 3 + \frac{7}{5-x} - 2x + 3 = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{7}{5-x}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \mapsto -\infty} 7 = 7 \\ \lim\limits_{x \mapsto -\infty} 5 - x = +\infty \end{array}\right\}$ Par quotient de limites $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) - (2x-3) = 0^+$

Comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) - (2x-3) = 0^+$, on en déduit que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$

Exemple 2 $\quad g(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{2x-1}$ Écrivons $g(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{2x-1}$

$$ax + b + \frac{c}{2x-1} = \frac{(ax+b)(2x-1) + c}{2x-1} = \frac{2ax^2 - ax + 2bx - b + c}{2x-1}$$

$$\frac{4x^2 + 2x}{2x-1} = \frac{2ax^2 + (2b-a)x - b + c}{2x-1}$$

Rappel deux polynômes sont égaux si les coefficients qui se trouvent devant les variables de même puissance sont égaux

On a donc $\begin{cases} 4 = 2a \\ 2 = 2b - a \\ 0 = -b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 = 2b - 2 \\ 0 = -b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4 = 2b \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

donc $g(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{2x-1} = 2x + 2 + \dfrac{2}{2x-1}$ Cherchons $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) - (2x+2)$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} g(x) - (2x+2) = \lim_{x \mapsto -\infty} 2x + 2 + \frac{2}{2x-1} - 2x - 2 = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{2}{2x-1}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \mapsto -\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \mapsto -\infty} 2x - 1 = -\infty \end{array}\right\}$ Par quotient de limites $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) - (2x+2) = 0^-$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$