BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

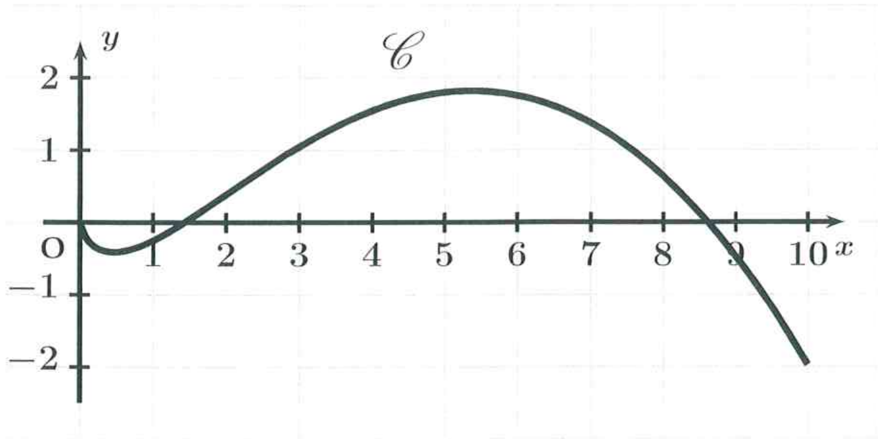
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8 .

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;10]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

   (a) 1 (b) 2 (c) 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

   (a) nul (b) strictement positif (c) strictement négatif

3. La fonction f' est :

   (a) croissante sur $]0\,;10]$ (b) croissante sur $[4\,;7]$ (c) décroissante sur $[4\,;7]$

4. On admet que pour tout x de l'intervalle $]0\,;10]$ on a : $f'(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + 1$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet sur cet intervalle un point d'inflexion :

   (a) d'abscisse $2,1$ (b) d'abscisse $0,9$ (c) d'abscisse 2

EXERCICE 2 (5 points)

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.

Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :

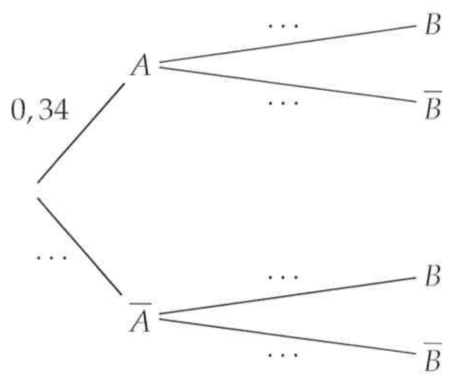
- 34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.

On sélectionne au hasard un coureur et on considère les évènements suivants :

- A : « le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes » ;
- B : « le coureur a moins de 60 ans » ;

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2. **a)** Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.

   b) Vérifier que $P\left(\overline{B}\right) \simeq 0,123$.

   c) Calculer $P_{\overline{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Partie B

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 39$.

1. Calculer $P(210 \leqslant T \leqslant 270)$.

2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.
   Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.

3. **a)** Calculer $P(T \leqslant 300)$.

   b) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant $P(T \geqslant t) = 0,9$.

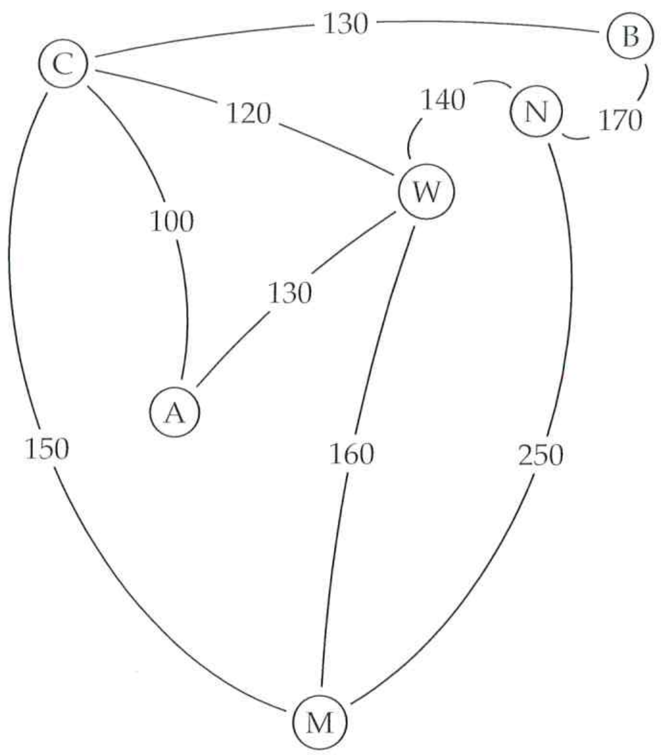
   c) Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

Alexis part en voyage dans l'Est des États-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes :

Atlanta (A), Boston (B), Chicago (C), Miami (M), New York (N) et Washington (W).

Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion.

1. **a)** Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permette à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

   b) Donner un exemple d'un tel trajet.

2. Alexis veut relier Boston à Miami.

   En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le moins cher ainsi que le coût de ce trajet.

3. **a)** Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

   b) Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes. Combien y a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

EXERCICE 4 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe en page 8/8.
Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0\,;7]$.

2. Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.

3. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

   (a) $[9\,;17]$ (b) $[18\,;26]$ (c) $[27\,;35]$

Partie B

La courbe donnée en annexe page 8/8 est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$ d'expression :

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x+3}$$

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;7]$, $f'(x) = (-2x+2)\,\mathrm{e}^{-x+3}$.

2. **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.

   b) Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

3. **a)** Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0\,;7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

b) On admet que $\alpha \simeq 0,36$ à 10^{-2} près.

Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;7]$ par :

$$F(x) = (-2x - 2)\,\mathrm{e}^{-x+3}$$

a) Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

b) Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

a) Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.

b) L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.

Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

ANNEXE

N'est pas à rendre avec la copie