GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGENIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN
TELECOM Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE
Mercredi 17 mai 2006
SUJET DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE I **7,5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$orthogonal.

Partie A

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. **a.** Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.
   b. Dresser le tableau des variations de f sur $]0~;~+\infty[$. Préciser $f(1)$ et $f(\text{e})$.
   c. En déduire que f admet un maximum M que l'on donnera.
3. Tracer la courbe C_f. On placera avec soin les points de C_f d'abscisses respectives 1 et e.
4. Donner, suivant les valeurs de x appartenant à $]0~;~+\infty[$, le signe de $f(x)$.
5. Soit A un réel. On veut déterminer, suivant les valeurs de A, le nombre de solutions de l'équation :
$$f(x) = A$$
   Distinguer les différents cas et préciser, pour chacun d'eux, le nombre de solutions appartenant à chaque intervalle $]0~;~1]$, $]1~;~\text{e}]$ ou $]\text{e}~;~+00[$.

Partie B

Soit a un réel strictement positif.
On se propose dans cette partie de déterminer tous les réels x, strictement positifs, qui vérifient l'inéquation (ϵ_a) suivante :

$$(\epsilon_a) : \quad a^x \leqslant x^a.$$

1. Justifier que l'inéquation $a^x \leqslant x^a$ est équivalente à l'inéquation $f(a) \leqslant f(x)$.
2. On suppose dans cette question que : $a = \text{e}$.
   a. En utilisant la partie A, donner l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation $(\epsilon_{\text{e}}) : \quad \text{e}^a \leqslant x^{\text{e}}$.
   b. *Application* : Sans les calculer, comparer e^π et π^{e}. Justifier la réponse.
3. On suppose dans cette question que : $0 < a \leqslant 1$.
   Quel est le signe de $f(a)$? En utilisant la partie A, donner l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation (ϵ_a), en fonction de a.
4. On suppose dans cette question que : $a > 1$ et $a \neq \text{e}$.
   a. En utilisant la partie A, expliquer pourquoi l'équation $f(x) = \dfrac{\ln a}{a}$ admet deux solutions a_1 et a_2 qui vérifient : $1 < a_1 < \text{e} < a_2$.
   On remarquera que l'une des solutions a_1 ou a_2 est égale à a.
   b. Donner alors l'ensemble S_3 des solutions de l'inéquation (ϵ_a), en fonction de a_1 et a_2.

5. Application : On suppose dans cette question que : $a = 2$.
   a. Déterminer l'entier naturel n, différent de 2, tel que : $f(n) = f(2)$.
   b. En déduire l'ensemble S_4 des solutions de l'inéquation : (ϵ_2) : $2^x \leqslant x^2$.

EXERCICE II **7 points**

Ariane et Benjamin échangent des balles au ping-pong.
Soient les évènements suivants :
A : « Ariane marque le point » et B : « Benjamin marque le point ».
Ariane étant légèrement plus expérimentée que Benjamin, la probabilité qu'elle marque un point est : $p = P(A) = \dfrac{53}{100}$.
Ils décident d'engager une partie selon les modalités suivantes :

— Le joueur qui « gagne un set » est le premier qui marque deux points, consécutifs ou non.
— La partie s'arrête dès qu'un des deux joueurs a remporté trois sets, consécutifs ou non. On dit alors que ce dernier a gagné la partie.

Partie A

Dans cette partie, on étudie la probabilité pour Ariane de « gagner un set » (deux points marqués, de façon consécutive ou non).

1. Dans un échange de balles, quelle est la probabilité q que Benjamin marque le point ?
2. Dresser et compléter l'arbre de tous les évènements élémentaires.
3. Donner la probabilité P_1 qu'Ariane marque les deux premiers points.
4. Donner la probabilité P_2 qu'Ariane gagne le set, Benjamin ayant marqué un point.
5. Donner la probabilité P_3 qu'Ariane gagne le set. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B

On étudie maintenant la probabilité pour Ariane de « gagner la partie » (trois sets gagnés, consécutifs ou non).
Tous les sets sont joués dans des conditions identiques et indépendantes.
Pour le jeu d'un set, on note les évènements :
S : « Ariane gagne le set » et E : « Ariane perd le set ».
On suppose que, pour chaque set, les probabilités de ces évènements sont :

$$P = P(S) = 0,545 \quad \text{et} \quad Q = P(E) = 0,455.$$

Ariane et Benjamin engagent une partie.

1. Finir le dessin de l'arbre des évènements élémentaires et le compléter.
2. Donner, en fonction de P, la probabilité T_1 qu'Ariane gagne les trois premiers sets.
3. Donner, en fonction de P et Q, la probabilité T_2 qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté un set.
4. Donner, en fonction de P et Q, la probabilité T_3 qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté deux sets.
5. a. Donner, en fonction de P et Q, la probabilité T qu'Ariane gagne la partie.
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité T.

6. **a.** Déterminer, en fonction de P et Q, la probabilité H qu'Ariane gagne la partie, sachant que Benjamin a remporté le premier set.
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité H.

Partie C

On suppose maintenant que chaque joueur gagne 10 euros pour chaque set gagné et perde 10 euros pour chaque set perdu. Ariane et Benjamin engagent une partie dans les mêmes conditions que précédemment.
On note G_A la variable aléatoire représentant le gain en euros d'Ariane à la fin de la partie et G_B la variable aléatoire représentant le gain de Benjamin. Ces gains peuvent être positifs ou négatifs.

1. Donner le tableau représentant la loi de probabilité de G_A. On donnera les probabilités en fonction de P et Q.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'espérance de gain $\text{E}(G_A)$ d'Ariane à l'issue de la partie.
3. Donner, en fonction de $\text{E}(G_A)$, l'espérance de gain $\text{E}(G_B)$ de Benjamin.

EXERCICE III **5,5 points**

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Pour tous les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le réel égal au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On considère un vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ du plan, c'est-à-dire tel que $\left\|\overrightarrow{k}\right\|^2 = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$.
On rappelle qu'un point N du plan appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel x_N tel que : $\overrightarrow{\text{O}N} = x_N\overrightarrow{k}$.
Pour tout point M du plan, on note $p(M)$ le produit scalaire suivant :

$$p(M) = \overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{k}.$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les points M du plan qui vérifient : $p(M) = 0$.
2. Soit N un point quelconque de la droite $\mathcal{D}$ et x_N le réel tel que $\overrightarrow{\text{O}N} = x_N\overrightarrow{k}$. Déterminer $p(N)$ en fonction de x_N.

Partie B

On considère la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point $M' = f(M)$ défini par :

$$\overrightarrow{\text{O}M'} = 2p(M)\overrightarrow{k} - \overrightarrow{\text{O}M}.$$

1. Déterminer l'image N' d'un point quelconque N de la droite $\mathcal{D}$. Justifier la réponse.
2. Soit M un point quelconque du plan, M' son image par f et I_M le milieu du segment $[MM']$.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{O}I_M}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}M'}$ et montrer que I_M appartient à la droite D.

b. Déterminer $p\left(M'\right)$ en fonction de $p(M)$. On fera le détail du calcul.

c. En déduire l'image $M'' = f\left(M'\right)$ de M'. On justifiera la réponse.

d. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{k}$.

3. En déduire quelle est la transformation f.

GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGENIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN
TELECOM Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE
Mercredi 9 mai 2007
SUJET DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE I **10 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{x}.$$

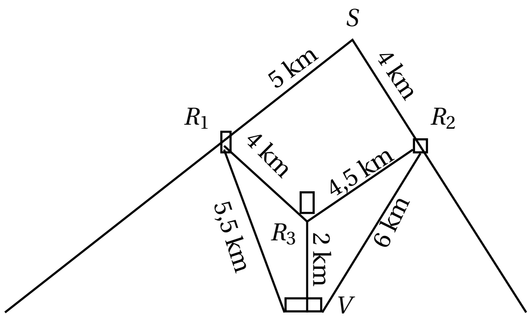
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. **a.** Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   b. En déduire que f admet une asymptote Δ au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.
2. **a.** Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.
   b. Compléter le tableau des variations de f.
3. **a.** Déterminer une équation de la tangente T_1 au point A d'abscisse 1 de la courbe $\mathscr{C}_f$ et une équation de la tangente T_{-1} au point B d'abscisse -1.
   b. Expliquer pourquoi l'on peut affirmer que les tangentes T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires.
4. On se propose d'étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_{-1}.
   Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{x} - \left(\frac{x+3}{\mathrm{e}}\right).$$
   a. Déterminer $g'(x$ et $g''(x)$ où g' et g'' sont les dérivées première et seconde de g.
   b. Étudier le signe de g'' et le sens de variation de g'. Préciser la valeur de $g'(-1)$.
   Étudier le signe de g' et le sens de variation de g. Préciser la valeur de $g(-1)$.
   Enfin donner le signe de g.
   c. Indiquer alors la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente T_{-1}.
5. Tracer l'asymptote Δ, les tangentes T_1 et T_{-1} et la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Pour tracer ces courbes, on considèrera les valeurs approchées suivantes :
   $$\mathrm{e} \approx 2,7 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,4.$$

EXERCICE II **4 points**

Pour descendre du sommet S d'une montagne, des skieurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. Ils doivent impérativement passer par l'un des deux restaurants se trouvant tous les deux à 2 200 mètres d'altitude. Les deux restaurants ne sont pas situés sur le même versant de la montagne. On les nomme R_1 et R_2.
Après la pause repas, pour atteindre le village V qui se trouve à 1 100 m d'altitude, les skieurs ont deux possibilités : ils peuvent descendre directement au village ou faire une halte au restaurant R_3 qui se trouve à 1 800 m d'altitude, pour prendre un café.

La probabilité que les skieurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\dfrac{1}{3}$.
En partant de R_1, la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\dfrac{3}{4}$.
En partant de R_2, la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\dfrac{2}{3}$.



1. Compléter l'arbre représentant tous les trajets possibles du sommet S au village V.
2. **a.** Déterminer la probabilité P que les skieurs prennent un café au restaurant R_3, sachant qu'ils ont déjeuné ensemble au restaurant R_1.

   b. Déterminer la probabilité P_2 que les skieurs prennent un café au restaurant R_3.

   c. Déterminer la probabilité P_3 que les skieurs aient déjeuné au restaurant R_1, sachant qu'ils ont pris un café au restaurant R_3.
3. Les distances en kilomètres entre les différents points sont :
   $SR_1 = 5,\ SR_2 = 4,\ R_2R_3 = 4,\ 5, R_1R_3 = 4,\ R_3V = 2, R_1V = 5,\ 5,\ R_2V = 6$
   (cf. figure ci-dessus)
   Soit D la variable aléatoire représentant la distance parcourue par les skieurs pour aller du sommet S au village V.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire D.

EXERCICE III **6 points**

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les trois points non alignés A, B, C suivants, donnés par leurs coordonnées :

$$\text{A}(1\ ;\ 0\ ;\ -1)\quad \text{B}(3\ ;\ -1\ ;\ 2)\quad \text{C}(2\ ;\ -2\ ;\ -1),$$

et le point E de coordonnées : E$(4\ ;\ -1\ ;\ -2)$.

1. **a.** Montrer que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A, B et C.

   c. Calculer la distance $d(\text{E}\ ;\ \mathscr{P})$ du point E au plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AE).
3. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& 2+t \\ z &=& -1+t\end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

4. **a.** Donner un point J et un vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ de $\mathcal{D}$.

   b. Expliquer pourquoi la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

5. **a.** Déterminer le point M de $\mathcal{D}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{E}M}$ et $\overrightarrow{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ soient orthogonaux.

   b. En déduire la distance $d(E\,;\,\mathcal{D})$ du point E à la droite $\mathcal{D}$.

Durée : 1 heure 30

∾ Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH ∾ mai 2008

QCM DE MATHEMATIQUES

Ce QCM comporte 15 questions.

Donner la réponse à chaque question sur la feuille des réponses.

Question 1 **1,5 points**

Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2. Ces deux concours sont indépendants.

Il a une chance sur trois de réussir le concours C_1 et une chance sur trois de réussir le concours C_2.

Pensant augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours. Quelle probabilité P a-t-il de réussir au moins un concours ?

A : $P = \dfrac{2}{3}$ B : $P = \dfrac{5}{9}$ C : $P = \dfrac{2}{9}$ D : $P = \dfrac{4}{9}$ E : $P = \dfrac{1}{9}$

Question 2 **1 point**

Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)}$$

A : $\mathcal{D} = \mathbb{R}_*^+$

B : $\mathcal{D} =]1\,;\,+\infty[$

C : $\mathcal{D} =]1\,;\,\text{e}[\cup]\text{e}\,;\,+\infty[$

D : $\mathcal{D} =]1\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$

E : $\mathcal{D} =]2\,;\,+\infty[$

Question 3 **1 point**

On tire au hasard une boule dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la boule tirée. Donner la valeur de l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

A : $\text{E}(X) = 1$

B : $\text{E}(X) = \dfrac{1}{10}$

C : $\text{E}(X) = \dfrac{11}{2}$

D : $\text{E}(X) = 5$

E : $\text{E}(X) = 11$

Question 4 **1 point**

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier n, $w_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$, vérifie :

A : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

B : la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

C : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

D : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$

E : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

Question 5 **1,5 point**

On considère dans l'espace rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les deux plans suivants :

$$\mathcal{P}_1 : 2x+y-3z+1=0 \quad ; \quad \mathcal{P}_2 : x-y+2=0$$

Donner l'équation du plan passant par le point O et contenant la droite d'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

A : $x+y-2z=0$

B : $x+y+z+3=0$

C : $x+y=0$

D : $y-2z=0$

E : $2x+y-3z=0$

Question 6 **1,5 point**

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \text{e}^{2x}\,\text{d}x$.
Une intégration par parties permet de trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
Quelle est cette relation ?

A : $I_n = \dfrac{\text{e}^2}{2} + \dfrac{n}{2} I_{n-1}$

B : $I_n = \dfrac{\text{e}^2}{4} - \dfrac{n-1}{2} I_{n-1}$

C : $I_n = \dfrac{\text{e}^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$

D : $I_n = \dfrac{\text{e}^2}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1} + C,\ C \in \mathbb{R}$

E : $I_n = 2\text{e}^2 - 2nI_{n-1}$

Question 7 **1 point**

La fonction f définie sur $[0\ ;\ 1[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x^2+5x-3}{x^2+6x-7}}$ vérifie :

A : $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

B : $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

C : $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

D : $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

E : f n'a pas de limite quand x tend vers 1.

Question 8 **1,5 point**

Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ vérifiant l'équation :

$$\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$$

A : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\ ;\ -\dfrac{\pi}{3}\right\}$

B : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ \dfrac{7\pi}{6}\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

C : $S = \left\{0\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

D : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ -\dfrac{\pi}{3}\ ;\ -\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

E : $S = \left\{0\ ;\ \pi\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\ ;\ \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Question 9 **1,5 point**

Donner la solution de l'équation différentielle : $y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos x$, vérifiant la condition $y(0) = 1$.

A : $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos x$
B : $f(x) = \ln\left(1 + \cos x\mathrm{e}^{-2x}\right)$
C : $f(x) = (1 + \sin x)\mathrm{e}^{-2x}$
D : $f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\sin x$
E : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)\cos x$

Question 10 **1,5 point**

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (\mathrm{e}^{x} - 2)(\mathrm{e}^{x} + 1)$.
On note $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Donner l'équation de la tangente T à $\mathscr{H}$ au point d'intersection de $\mathscr{H}$ avec l'axe des abscisses.

A : $y = x - 2$ B : $y = 3x - \ln 6$

C : $y = x + 2$ D : $y = 6(x - \ln 2)$

E : $y = 2(x - \ln 2)$

Question 11 **1,5 point**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$.
Une des cinq affirmations suivantes est exacte. Laquelle ?

A : g est majorée par 2
B : Pour tout réel x, on a : $g'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$
C : Pour tout réel x, on a : $g'(x) < 0$
D : La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$
E : La fonction G définie par : pour tout réel x, $G(x) = 2x + \ln\left(x^2 + 1\right)$ est une primitive de g

Question 12 **1,5 point**

On considère, dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points M et N d'affixes respectives :

$$z_M = 1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_N = 3 + 2\mathrm{i}.$$

Le milieu I du segment $[MN]$ a pour image, par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, le point J. Donner l'affixe de J.

A : $z_J = \mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$ B : $z_J = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$

C : $z_J = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{11\mathrm{i}\pi}{12}}$ D : $z_J = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$

E : $z_J = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

Question 13 **1 point**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$\mathscr{C} : \quad y = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x$$

On note $\mathscr{A}$, l'aire, en unités d'aires, de la partie de plan délimitée par $\mathscr{C}$, les axes du repère et la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$. Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

A : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{4}$

B : $\mathscr{A} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}$

C : $\mathscr{A} = 1 + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}$

D : $\mathscr{A} = 1 + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$

E : $\mathscr{A} = -1 + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$

Question 14 **1,5 point**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées :

$$A(2\,;\,4),\ B(-2\,;\,1)\ \text{ et }\ C(4\,;\,3).$$

On note d la distance du point A à la droite (BC). Donner la valeur de d.

A : $d = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ B : $d = \dfrac{9}{\sqrt{10}}$ C : $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D : $d = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ E : $d = -\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

Question 15 **1,5 point**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, soit le point A d'affixe i.
On considère la fonction T qui associe à tout point M, différent de A et d'affixe z, le point M', d'affixe z', tel que :

$$z' = \frac{\text{i}}{2(z - \text{i})}$$

Alors l'image par T du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1 est :

A : le cercle de centre O et de rayon 0, 5
B : le cercle de centre O et de rayon 2
C : le cercle de centre A et de rayon 0,5
D : le cercle de centre A et de rayon 1
E : le cercle de centre A et de rayon 2

Durée : 1 heure 30

∽ Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH ∽ 6 mai 2009

Exercice 1 **8 points**

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$$

Soit $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ orthogonal, l'unité sur l'axe des abscisses étant de 1 cm et sur l'axe des ordonnées de 2 cm.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$.

   b. En déduire que $\mathscr{C}_n$ admet une asymptote Δ_n, au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation.

2. **a.** Déterminer $f_n'(x)$, pour $x \in [0~;~+\infty[$, où f_n' désigne la dérivée de f_n.

   b. Dresser le tableau des variations de f_n.
   Préciser les valeurs de $f_n(0)$, $f_n'(0)$ et $f_n(n)$.

3. La fonction f_2 est définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f_2(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

   a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de f_2 dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ orthogonal donné.

   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection B_1 et B_2 des courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

   c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par les deux points B_1 et B_2.

4. **a.** Donner la valeur exacte de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   On indiquera les calculs intermédiaires.

   b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $K = \displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.
   On indiquera les calculs intermédiaires et on donnera la valeur exacte de l'intégrale.

   c. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, en fonction de K, l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^2 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   On indiquera les calculs intermédiaires.

   d. On note $\mathscr{Q}$ la partie de plan délimitée par les axes du repère, la courbe $\mathscr{C}_2$ et la droite d'équation $x = 2$.
   Donner une valeur approchée à $10^{?2}$ près de l'aire $\mathscr{A}(\mathscr{Q})$ de la partie $\mathscr{Q}$, en unités d'aire, puis en cm2.

   e. Hachurer la partie $\mathscr{Q}$ sur le graphique de la question 3. a.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera **sa valeur exacte**, écrite sous forme de **fraction irréductible**.

Dans une classe de terminale S, comprenant 39 élèves, on relève les voœux d'orientation suivants :

30 élèves veulent faire des études scientifiques dont 22 envisagent des études longues.
6 élèves souhaitent s'engager dans des études de droit dont 2 envisagent des études courtes.
3 élèves veulent faire des études d'arts (études longues).
Toutes les filles veulent faire des études longues.
Il y'a autant de filles que de garçons qui souhaitent faire des études scientifiques.
Il y'a autant de filles que de garçons qui souhaitent faire des études de droit.
Un seul garçon envisage de s'engager dans des études d'arts.

1. Compléter le tableau à l'aide des informations données en hypothèse.

2. On interroge un élève pris au hasard dans la classe.

a. Donner la probabilité $P(F)$ que l'élève interrogé soit une fille et la probabilité $P(G)$ que ce soit un garçon.

b. Sachant que l'élève interrogé veut faire des études longues, quelle est la probabilité P_1 que ce soit une fille qui envisage de faire des études scientifiques ?

c. Sachant que l'élève interrogé n'envisage pas de faire des études scientifiques, quelle est la probabilité P_2 qu'il se destine à des études d'arts ou envisage des études courtes ?

3. Deux filles et un garçon sortent de la classe.

a. Quelle est la probabilité Q_1 que ce soit trois élèves qui envisagent des études scientifiques ?

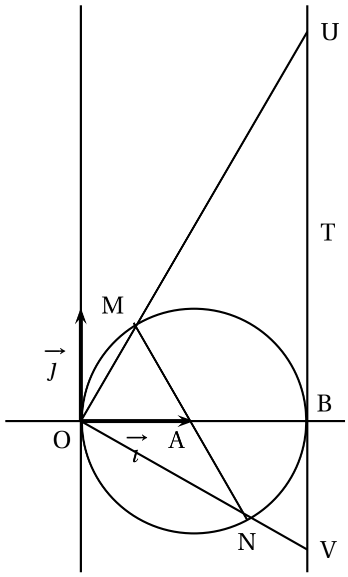
b. Quelle est la probabilité Q_2 qu'il y'ait au moins un élève envisageant des études d'arts ?

EXERCICE 3 **8 points**

On se place dans le plan rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthomormé, direct.
Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 2.
On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1 et la droite T, tangente à $\mathscr{C}$ en B, d'équation $x = 2$.
Pour tout réel φ vérifiant $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, on pose :

$$z_{\varphi} = \left(\cos(\varphi) + 1\right) + \text{i}\sin(\varphi)$$

On désigne par M_{φ} le point du plan d'affixe z_{φ}.



1. Où se trouve le point M_{φ} lorsque : $\varphi = -\pi$? $\varphi = \pi$? $\varphi = 0$?

2. Soit $\varphi \in]-\pi\ ;\ \pi[$.

a. Déterminer, en fonction de φ, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{A}M_{\varphi}}$.

b. Justifier que M_{φ} appartient au cercle $\mathscr{C}$.

3. Pour la suite de l'exercice, on pose : $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

On désigne par M le point d'affixe : $z = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On note N le point du cercle $\mathscr{C}$ diamétralement opposé au point M (N est le symétrique de M par rapport à A).

Déterminer l'affixe Z du point N.

4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment $[MN]$.

5. On considère U le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente T et V le point d'intersection de la droite (ON) et de la tangente T.

a. Déterminer l'affixe u du point U et l'affixe v du point V.

b. Déterminer l'affixe k du milieu K du segment $[UV]$.

c. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[UV]$.

6. **a.** Déterminer l'affixe ω du point Ω d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et Δ.

b. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et Δ ainsi que le cercle $\mathscr{C}'$ de centre Ω passant par M.

Quels sont les trois points cités dans cet exercice, autres que M, qui appartiennent à ce cercle $\mathscr{C}'$?

Durée : 1 heure 30
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés. Chaque exercice est noté sur 10 points. Le sujet est donc noté sur 30 points. Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
5 mai 2010

EXERCICE I

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ orthomormé, direct.
Soient A le point d'affixe $Z_A = 1 + 3\text{i}$ et B le point d'affixe $Z_B = 2$.

I. **I-1.** Dessiner le triangle OAB.

I-2. Expliquer pourquoi le triangle OAB est isocèle en A.

I-3. On considère le point C, symétrique du point O par rapport au point A et le point D, symétrique du point B par rapport au point O.
Placer les points C et D sur la figure de I-1-.
Déterminer les affixes Z_C et Z_D des points C et D.

I-4. On considère le point E, image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$.
Placer le point E sur la figure de I-1-.
Déterminer l'affixe Z_E du point E.

I-5. On désigne par F le barycentre des points pondérés $(A\ ;\ 2)$, $(B\ ;\ -3)$ et $(D\ ;\ 2)$.
Déterminer l'affixe Z_F du point F.
Placer le point F sur la figure de I-1-.

I-6. Justifier que les points B, E et F sont alignés.

I-7. On note Z le complexe défini par : $Z = \dfrac{Z_F - Z_C}{Z_B - Z_C}$

a. Déterminer le réel a tel que $Z = a\text{i}$. On détaillera les calculs.

b. Déterminer le module $|Z|$ et un argument $\arg(Z)$ de Z.

c. En déduire la nature du triangle CBF. On justifiera la réponse.

EXERCICE II

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $]1\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé (1 cm d'unité).

II. **II-1.** **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b. En déduire que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 dont on donnera les équations.

II-2. **a.** Soit g la fonction définie, pour tout réel x de $]1\ ;\ +\infty[$, par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Justifier que sa dérivée g' vérifie, pour tout réel x de $]1\ ;\ +\infty[$: $g'(x) = f(x)$.

b. f' désigne la dérivée de f. Justifier que, pour tout réel x de $]1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

c. Dresser le tableau des variations de f.

d. Compléter le tableau suivant, en donnant des valeurs approchées à $0,01$ près des images $f(x)$.

x	1,1	1,25	1,5	1,75	2	4
$f(x)$						

e. Tracer la courbe $\mathscr{C}$, Δ_1 et Δ_2 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ donné.

II-3. Soient deux réels a et b tels que $1 < a < b$.

On définit l'intégrale : $J(a,\,b) = \displaystyle\int_a^b [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$.

a. En utilisant la question II-2-a, justifier que l'on a :

$$J(a,\,b) = \sqrt{b^2-1} - \sqrt{a^2-1} - b + a$$

b. Déterminer, en fonction de b, la limite : $I(b) = \displaystyle\lim_{a\to 1^+} J(a,\,b)$.

II-4. **a.** On admet que, pour tout réel $b > 1$, on a : $\sqrt{b^2-1} - b = \dfrac{-1}{\sqrt{b^2-1}+b}$.

Déterminer la limite $K = \displaystyle\lim_{b\to+\infty} I(b)$.

b. Donner une interprétation géométrique de ce que représente K.

EXERCICE III

Un certain concours d'entrée dans une école d'ingénieurs consiste en plusieurs épreuves :

- Après examen de leur dossier scolaire, 15 % des candidats (les meilleurs) sont admis directement sans passer d'autres épreuves.
- Les autres candidats, non admis sur dossier, passent une épreuve écrite. On estime que 60 % des candidats réussissent cette épreuve écrite et les autres sont recalés.
- Les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont alors convoqués pour passer une épreuve orale. Les candidats réussissant l'épreuve orale sont alors admis. On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On considère les évènements suivants :

- D : « Le candidat est admis sur dossier »
- E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite »
- O : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale »
- A : « Le candidat est admis ».

On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

On note $P(D)$ la probabilité de l'évènement D et $P_E(O)$ la probabilité de l'évènement O sachant que l'évènement E est réalisé.

III.III-1. Compléter le schéma donné.

III-2. **a.** Compléter à l'aide des hypothèses :

$P(D) = \ldots \qquad P_{\overline{D}}(E) = \ldots \qquad P_R(O) = \ldots$

b. Déterminer la probabilité $P(E)$ qu'un candidat passe et réussisse l'épreuve écrite et la probabilité $P(O)$ qu'un candidat passe et réussisse l'épreuve orale.

c. On note p la probabilité $P(A)$ qu'un candidat soit admis dans cette école d'ingénieurs. Justifier que p vaut $0,32$.

III-3. Cinq amis décident de passer ce concours (les résultats obtenus par chaque candidat sont indépendants les uns des autres).

a. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_1 que les cinq soient admis.
Puis donner une valeur approchée de P_1 à 10^{-4} près.

b. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_2 qu'au moins un des cinq soit recalé.
Puis donner une valeur approchée de P_2 à 10^{-4} près.

c. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_3 qu'au moins un des cinq soit admis.
Puis donner une valeur approchée de P_3 à 10^{-4} près.

d. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_4 que trois exactement soient admis.
Puis donner une valeur approchée de P_4 à 10^{-4} près.

III-4. Par hasard, je rencontre un candidat qui me dit avoir été admis dans cette école d'ingénieurs. Quelle est la probabilité $P_A(D)$ qu'il ait été admis sur dossier ?

EXERCICE IV

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, par :

$$u_n = \mathrm{e}^{-n}$$

IV. IV-1. **a.** Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $0 < u_n \leqslant 1$.

IV-2. Étudier le signe de la fonction h définie, pour tout réel t de $]0~;~+\infty[$, par :

$$h(t) = 1 - \ln(t)$$

IV-3. Soit la fonction g définie, pour tout réel t de $]0~;~+\infty[$, par :

$$g(t) = t(2 - \ln(t))$$

a. Déterminer $g'(t)$ où g' est la dérivée de g. On détaillera le calcul.

b. En déduire la primitive H de la fonction h qui s'annule en e^2. On justifiera la réponse.

IV-4. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, par :

$$v_n = \int_{\mathrm{e}^{-(n+1)}}^{\mathrm{e}^{-n}} (1 - \ln(t))\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $v_n \geqslant 0$.

b. À l'aide de la question IV-3-b-, calculer v_n en fonction de n. On détaillera le calcul.

c. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

IV-5. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + .. \cdots + v_n$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH mai 2011

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé. Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit. Aucun document n'est autorisé.
L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 10 points. Le sujet est donc noté sur 30 points. Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

EXERCICE I

On se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, direct.
Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = 1$, $z_{\text{B}} = 3 - 2\text{i}$.
Pour tout complexe z, on pose :

$$z' = \text{i}z + 1 - \text{i}.$$

On considère la fonction F qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

1. Placer A et B sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Dans cette question, on considère un point M, différent de A, donc d'affixe $z \neq 1$.
   a. Déterminer le complexe $Z = \dfrac{z' - 1}{z - 1}$.
   b. Déterminer le module $|Z|$ et un argument $\arg(Z)$ de Z.
   c. Exprimer $\text{A}M'$ en fonction de $\text{A}M$. Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right)$.
   d. En déduire la nature de la fonction F. On précisera tous ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer les affixes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ des images A′ et B′ par F des points A et B.
4. Soit C le point dont l'image par la fonction F est le point C′ d'affixe
   $Z_{\text{C}'} = -3 - 3\text{i}$.
   Déterminer l'affixe z_{C} du point C. Justifier le calcul.
   Dessiner les triangles ABC′ et ACB′ sur la figure du 1.
5. On désigne par I le milieu du segment [BC′].
   a. Déterminer l'affixe z_{I}, du point I.
   Dans le triangle ABC′, tracer la médiane (D) issue de A.
   b. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AI}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}'}$.
   c. Déterminer la position relative des droites (AI) et (CB′). On justifiera la réponse.
   d. Que représente la droite (D) pour le triangle ACB′ ?
6. On note (D′) l'image de la droite (AI) par la fonction F. Déterminer (D′) et tracer (D′) sur la figure.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 3.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

   c. On en déduit que $\mathscr{C}$ admet, au voisinage de $-\infty$, une asymptote Δ dont on donnera une équation.

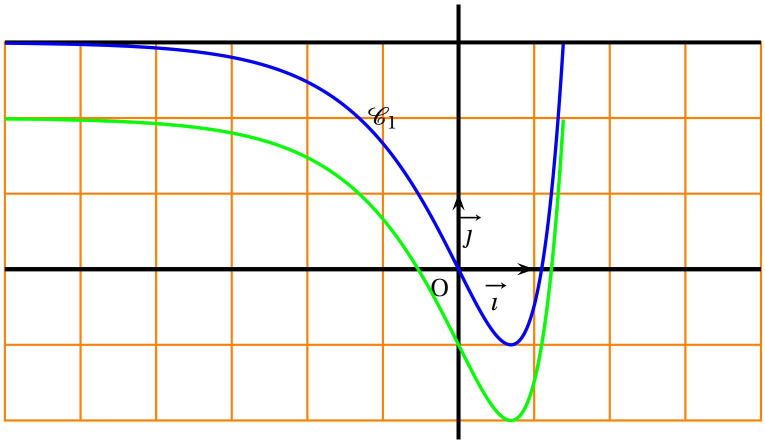
2. **a.** f' désigne la dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.

   b. Pour tout réel x, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = g(x)\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)$.
   Donner l'expression de $g(x)$.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   d. f présente un minimum au point $M\left(x_M\ ;\ y_M\right)$. Déterminer les coordonnées $\left(x_M\ ;\ y_M\right)$ de M. Détailler le calcul de y_M.

3. Une des deux courbes $\mathscr{C}_1$l et $\mathscr{C}_2$ dessinées sur la figure ci-dessous représente la fonction f. Laquelle ? Justifier votre réponse.



4. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T_0 sur la figure du 3.

5. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'asymptote Δ en un point E.
   Déterminer les coordonnées $\left(x_{\mathrm{E}}\ ;\ y_{\mathrm{E}}\right)$ du point E. Détailler les calculs.

6. **a.** Soit J l'intégrale définie par : $J = \displaystyle\int_0^{\ln 4} (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$.
   Calculer la valeur de J en justifiant le calcul.

   b. Sur la figure du 3. placer le point E et hachurer la partie du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, vaut J.

EXERCICE 3

Un fabricant de jouets vend un modèle de poupée qui « parle et marche » grâce à un mécanisme électronique.
On appelle « durée de vie » d'une poupée, le temps pendant lequel le mécanisme fonctionne correctement avant la première défaillance.
La variable aléatoire T, représentant la durée de vie exprimée en années d'une poupée prise au hasard dans la production, suit une loi exponentielle de paramètre 1.

La probabilité $P(T \leqslant t)$ que la durée de vie de la poupée soit inférieure à t années est alors donnée par :

$$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}.$$

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

1. **a.** Déterminer la probabilité p qu'une poupée ne fonctionne plus au bout d'une année.

b. Exprimer, en fonction de t, la probabilité $P(T > t)$ qu'une poupée n'ait aucune défaillance pendant t années.

2. J'ai acheté une poupée. On note A l'évènement : « la poupée n'a aucune défaillance pendant une année » et B l'évènement : « la poupée n'a aucune défaillance pendant trois ans ».

a. Déterminer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des évènements A et B.

b. Sachant que la poupée fonctionne parfaitement au bout d'un an, quelle est la probabilité $P_A(B)$ que la poupée fonctionne encore au bout de trois ans ? Justifier le calcul.

3. Le fabricant garantit les poupées pendant un an et s'engage à rembourser les poupées défectueuses.

a. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du pourcentage de poupées remboursées.

b. Quelle durée de garantie maximale ta devrait proposer le fabricant pour qu'il ne rembourse pas plus de 8 % des poupées vendues ? Calculer la valeur exacte, exprimée en années, de t_0. Justifier le résultat.

Donner une valeur approchée, exprimée en mois, de t_0.

4. Un commerçant achète un lot de trois poupées et le fabricant offre, pour chaque poupée, une garantie d'une année.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de poupées remboursées sur ce lot.

a. Exprimer, en fonction de p défini en 1. a., la probabilité $P(X = 3)$ que les trois poupées ne fonctionnent plus au bout d'un an.

b. Exprimer, en fonction de p, la probabilité $P(X = 3)$ qu'une seule des trois poupées ne fonctionne plus au bout d'un an.

c. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X. Les probabilités seront exprimées en fonction de p.

d. Déterminer, en fonction de p, l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable X.

EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté au repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, orthonormé, on considère les points A, B et C, de coordonnées :

$$\mathrm{A}(1\,;\,0\,;\,-1), \mathrm{B}(0\,;\,2\,;\,-2) \quad \text{et } \mathrm{C}(2\,;\,2\,;\,2).$$

1. **a.** Soit le vecteur $\overrightarrow{n_1}\,(4\,;\,1\,;\,-2)$. Calculer : $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Que peut-on dire de $\overrightarrow{n}$ par rapport au plan (ABC) ?

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit le plan P d'équation cartésienne : $x - 2y + z = 0$.

a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_2}$ normal au plan P.

b. Justifier que les plans P et (ABC) sont perpendiculaires.

c. Parmi les points A, B et C, préciser ceux qui appartiennent à P.

d. On note D_1 la droite intersection des deux plans P et (ABC).
Quelle est cette droite D_1 ?
Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{U}$ de la droite D_1.

3. Soit la droite D_2 définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$D_2 \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+\alpha \\ y & = \alpha & \\ z & = & 0-\alpha \end{array} \right.$$

On note N le point d'intersection de la droite D_2 et du plan P.
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{N}}\ ;\ y_{\text{N}}\ ;\ z_{\text{N}}\right)$ de N. Justifier le calcul.

4. Montrer que le point K(3 ; 2 ; 0) appartient à la droite D_2.

5. **a.** Soit le point $\text{L}\left(\dfrac{10}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{KL}}$ est normal au plan P.

b. Montrer que les points K et L sont symétriques par rapport au plan P.

c. On désigne par H le projeté orthogonal du point K sur le plan P. Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{H}}\ ;\ y_{\text{H}}\ ;\ z_{\text{H}}\right)$ de H.

6. Justifier que les droites D_1 et D_2 sont orthogonales.

Durée : 1 heure 30

∽ Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH ∽ mai 2012

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.
La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

EXERCICE I

On considère la fonction f définie, pour tout réel de $]0\ ;\ +\infty]$, par

$$f(x) = 2\ln x - (\ln x)^2.$$

Soit C la courbe représentant f dans un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0 x>0} f(x)$. Justifier la réponse.

   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

2. **a.** f' désigne la dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.

   b. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = g(x)(1 - \ln x)$. Donner l'expression de $g(x)$.

   c. Compléter le tableau de variation de la fonction f. f présente un extremum en un point M. Donner les coordonnées $\left(x_M\ ;\ y_M\right)$ de M.

3. La courbe C coupe l'axe des abscisses (Ox) en deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B telles que $x_\text{A} < x_\text{B}$.
   Déterminer les valeurs exactes de x_A et de x_B. Détailler les calculs. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de x_B.

4. Placer les points A, B et M. Tracer la courbe C ainsi que sa tangente au point M.

5. On considère la fonction F définie, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, par :

   $$F(x) = x\left(-4 + 4\ln x - (\ln x)^2\right).$$

   a. Montrer que F est une primitive de f. Détailler les calculs.

   b. Soit J l'intégrale définie par :

   $$J = \int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x.$$

   Calculer la valeur exacte de J en justifiant le calcul.

   c. Sur la figure de 4., hachurer la partie du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, vaut J.

EXERCICE II

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte, écrite sous forme de fraction irréductible.

Un marchand de parapluies ouvre son magasin 240 jours par an et sur ces journées, il y a 80 jours de beau temps, 40 jours de pluie et 120 jours de temps maussade.

— Il constate que lors d'une journée de beau temps, il a une probabilité de $\dfrac{3}{4}$ de ne pas vendre de parapluie, et une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre un parapluie.

— Lors d'une journée de pluie, il a une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre un parapluie, une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre deux parapluies et une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ de vendre trois parapluies.

— Lors d'une journée de temps maussade, il a une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de ne pas vendre de parapluie, une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ de vendre un parapluie et une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre deux parapluies.

Pour une journée quelconque d'ouverture du magasin, on considère les évènements suivants :
B : « Le temps est beau »,
P : « Le temps est pluvieux »,
M : « Le temps est maussade ».
X désigne la variable aléatoire représentant le nombre de parapluies vendus ce jour-là.

1. Compléter l'arbre donné avec les probabilités correspondantes.

2. **a.** Sachant qu'il fait beau, quelle est la probabilité P_1 que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là ?

b. Sachant qu'il pleut, quelle est la probabilité P_2 que le commerçant vende au moins deux parapluies ce jour-là ?

3. **a.** Quelle est la probabilité $P(X = 0)$ que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là ?

b. Quelle est la probabilité $P(X = 2)$ que le commerçant vende deux parapluies ce jour-là ?

c. Quelle est la probabilité $P(X = 3)$ que le commerçant vende trois parapluies ce jour-là ?

4. **a.** Compléter le tableau qui donne la loi de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

5. Il vend chaque parapluie 10 euros. Quel est le gain moyen G, en euros, que lui rapporte sa vente de parapluies pour un an ?

6. Sachant que, lors d'une journée donnée, le commerçant a vendu un seul parapluie, quelle est la probabilité P_3 que ce soit une journée de beau temps ?

7. Sachant que la journée n'est pas une journée de beau temps, quelle est la probabilité P_4 que le commerçant ne vende qu'un parapluie ?

EXERCICE III

On se place dans le plan complexe P rapporté au repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormé, direct. Pour tout complexe z, on pose :

$$z' = (1 + \mathrm{i})z - \mathrm{i}.$$

On considère la fonction F qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

1. Soit le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$. Déterminer l'image A$'$ par F de A.
2. Dans cette question, on considère un point M d'affixe $z \neq 1$.
   On considère le complexe $Z = \dfrac{z' - z}{1 - z}$.
   a. Z peut s'écrire $Z = a\mathrm{i}$. Déterminer a. Justifier le calcul.
   b. Déterminer le module $|Z|$ et un argument $\arg(Z)$ de Z.
   c. Exprimer la distance MM' en fonction de MA et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{MM'}\right)$.
   d. En déduire la nature du triangle AMM'.
   e. Construire l'image M' par F du point M placé sur la figure.
3. C désigne le symétrique du point A par rapport à l'origine O du repère et B désigne le point d'affixe :

$$z_{\mathrm{B}} = \frac{-1 + \mathrm{i}}{2}.$$

   a. Donner l'affixe z_{C} du point C.
   b. Déterminer l'affixe $z_{\mathrm{B}'}$ de l'image B$'$ par F du point B. Détailler le calcul.
   c. Placer les points B, B$'$ et C sur la figure de 2. e.
4. a. Déduire de la question 2. c. la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BB}'}\right)$.
   b. Donner la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}'}\right)$. Justifier le résultat.
   c. En déduire que les points A, B, C et B$'$ appartiennent à un même cercle dont on donnera les extrémités d'un diamètre. Justifier la réponse.

EXERCICE IV

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad y'(x) + y(x) = x + 1$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y une solution de l'équation différentielle (E). On note h la fonction définie pour tout réel x de $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = y(x) - x.$$

   a. En détaillant le calcul de $h'(x) + h(x)$, vérifier que h est solution de l'équation différentielle :

$$(F) \qquad h'(x) = -h(x).$$

   b. Déterminer toutes les fonctions h solutions de l'équation différentielle (F).
2. En déduire toutes les fonctions y solutions de l'équation différentielle (E).
3. Soit un réel a quelconque. On note f_a la fonction définie, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, par :

$$f_a(x) = x + a\mathrm{e}^{-x}$$

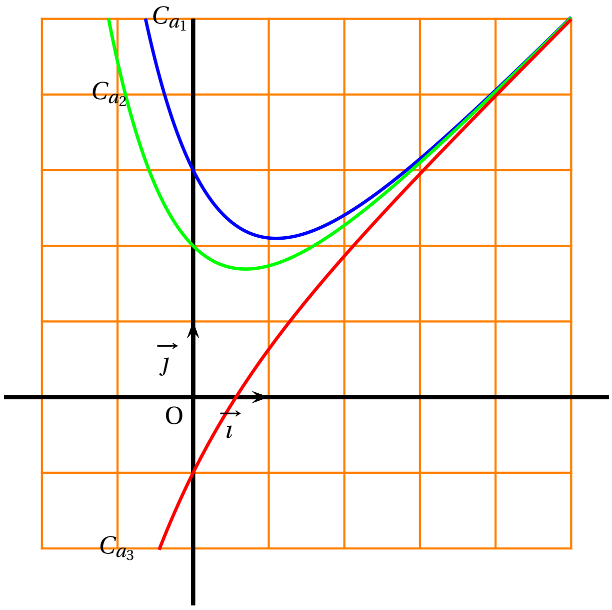
   et on note C_a sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   a. Calculer $f_a(0)$.

b. Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'_a(x)$.

c. Déterminer une équation de la tangente T_a à la courbe C_a au point A_a d'abscisse nulle.

d. Justifier que le point I(1 ; 1) appartient à la tangente T_a.

4. Voici trois courbes représentant les fonctions f_{a_1}, f_{a_2} et f_{a_3}.



Déterminer a_1, a_2 et a_3. Justifier vos affirmations.

5. Tracer, sur la figure de 4., les tangentes T_{a_1} T_{a_2} et T_{a_3} à chacune des trois courbes au point d'abscisse 0.

6. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Quel est le signe de $f_a(x) - f_b(x)$? Justifier votre réponse. Qu'en déduisez-vous pour les courbes C_a et C_b ?

Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
mai 2013

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.
La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9.
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la suite

Un distributeur de café est installé dans le hall d'un lycée.
Partie A

Durant la période de réglage de l'appareil, la tasse déborde une fois sur quatre. Le technicien fait dix essais indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de fois où la tasse déborde parmi ces dix essais.

I-A-1- X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donner les valeurs de n et p.
I-A-2- Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_1 que la tasse ne déborde jamais sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_1 à 10^{-4} près.
I-A-3- Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_2 que la tasse ne déborde qu'une fois sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_2 à 10^{-4} près.
I-A-4- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_3 que la tasse déborde au moins deux fois sur les dix essais.

Partie B

Le distributeur de café est maintenant réglé. On appelle « durée de fonctionnement sans panne » du distributeur, le temps qui s'écoule avant qu'une première tasse ne déborde. La variable aléatoire T , représentant cette durée, exprimée en jours, suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Soit a un réel positif non nul. La probabilité $P(T \leqslant a)$ que la durée de fonctionnement sans panne soit inférieure ou égale à a jours est alors donnée par :

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

I-B-1- Justifier que : $P(T \leqslant a) = 1\mathrm{e}^{-\lambda a}$.
I-B-2- Dans cette question, on suppose que $\lambda = 0,02$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $P(T > 90)$ que le distributeur fonctionne sans panne plus de 90 jours.
I-B-3- Quelle devrait être la valeur de λ pour que la probabilité que le distributeur fonctionne sans panne plus de 120 jours soit de $0,4$? Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de λ. Justifier les calculs.

Partie C

Le distributeur de café étant réglé, le volume de café dans une tasse en centilitres peut être modélisé par une variable aléatoire V suivant une loi normale d'espérance 6 et d'écart type $0,8$.

I-C-1- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \dfrac{V-6}{0,8}$? On précisera les paramètres de cette loi.
I-C-2- Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité P_4 que le volume de café dans une tasse soit compris entre $5,2$ et $6,8$ centilitres.

EXERCICE II

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0~;~1], \quad f(x) = \frac{2x+5}{x+1}.$$

Partie A

II-A-1- Donner les réels a et b tels que, pour tout $x \in [0~;~1]$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

II-A-2- Soit L l'intégrale définie par : $L = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer la valeur exacte de L en justifiant les calculs.

Partie B

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$.
II-B-1- Soit $n \geqslant 1$ fixé. Justifier que, pour tout réel $x \in [0~;~1]$, $1 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.
II-B-2-a- Justifier alors que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad L \leqslant u_n \leqslant L\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.
II-B-2-b- En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et donner sa limite. Justifier la réponse.
II-B-2-c- Justifier que,pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n - L \leqslant L\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Partie C

On considère l'algorithme suivant :

Variables
 p est un entier
 n est un entier
 L est un réel
Début de l'Algorithme
 L prend la valeur $2 + 3\ln 2$
 n prend la valeur 1
 Entrer la valeur de p
Tant que $L\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} 1\right) > 10^{-p}$ faire
  n prend la valeur $n+1$
 Fin de Tant que
Afficher n
Fin de l'algorithme

Lors de l'exécution de cet algorithme, la valeur entrée pour la variable p est 5. À la fin de l'exécution, la valeur affichée de la variable n est notée N.
II-C-1- Que représente N ?
II-C-2- Donner un réel β tel que : $|u_N - 3\ln 2| \leqslant \beta$.

EXERCICE III

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ orthonormé, direct.
On considère la fonction polynomiale P définie par :
pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, $\quad P(z) = z^4 6z^3 + 14z^2 6z + 13$.

III-1-a- Calculer $P(\text{i})$ et $P(-\text{i})$.
III-1-b- Pour tout complexe z, on a l'égalité : $P(z) = \left(z^2+1\right) Q(z)$ où $Q(z)$ s'écrit sous la forme : $Q(z) = z^2 + cz + d$.
Donner les valeurs des réels c et d.
III-1-c- Déterminer l'ensemble S_1 des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation Q(z) = 0. Justifier le résultat.
III-1-d- En déduire l'ensemble S2 des solutions, dans C, de l'équation $P(z) = 0$.
III-2- Placer sur la figure les points A, C et Ω d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \text{i}, \quad z_{\text{C}} = 3 + 2\text{i}, \quad z_{\Omega} = 2.$$

III-3-a- On note Z_1, Z_2 et Z_3 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$, $\overrightarrow{\Omega\text{A}}$ et $\overrightarrow{\Omega\text{C}}$.
Donner les valeurs de Z_1, Z_2 et Z_3.
III-3-b- Donner alors les modules $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$ de Z_1, Z_2, Z_3.
III-3-c- Déterminer alors les valeurs exactes des distances AC, ΩA et ΩC. Justifier les réponses.
III-3-d- Déterminer une mesure, en radians, de l'angle géométrique $\widehat{\text{A}\Omega\text{C}}$. Justifier le résultat.
III-3-e- Quelle est la nature précise du triangle AΩC ?
III-4- On considère les points B et D d'affixes respectives : $z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}}$ et $z_{\text{D}} = \overline{z_{\text{C}}}$ où $\overline{z_{\text{A}}}$ et $\overline{z_{\text{C}}}$ désignent respectivement les complexes conjugués de z_{A} et z_{C}.
III-4-a- Placer les points B et D sur la figure de III-2-.
III-4-b- Justifier que les points A, B, C et D sont sur un même cercle. Préciser son centre I et son rayon r.
III-4-c- Tracer ce cercle sur la figure de III-2-.
III-5- Donner l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aires, du trapèze ABDC.

EXERCICE IV

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points E et F de coordonnées :

$$\text{E}(2\ ;\ 2\ ;\ 0) \quad \text{et} \quad \text{F}(0\ ;\ 2\ ;\ 4)$$

et la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t+3 \\ y & = & t1 \\ z & = & 4 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}.$$

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.
IV-1-b- Justifier que le point E n'appartient pas à Δ.
IV-1-c- Justifier que le point F appartient à Δ.
IV-1-d- En déduire la position relative des droites (EF) et Δ.
IV-2- On considère le plan P contenant les deux droites (EF) et Δ.
Soit le vecteur $\vec{n}\,(2\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
IV-2-a- Donner les produits scalaires $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{EF}}$ et $\vec{n} \cdot \vec{u}$.
IV-2-b- Que peut-on en déduire pour le vecteur $\vec{n}$ par rapport au plan P ?
IV-2-c- Déterminer une équation cartésienne du plan P. Justifier la réponse.
IV-3- On note H le projeté orthogonal du point E sur la droite Δ.

IV-3-a- Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{\text{EH}} \cdot \overrightarrow{u}$.
IV-3-b- Justifier alors que les coordonnées $\left(x_{\text{H}}\ ;\ y_{\text{H}}\ ;\ z_{\text{H}}\right)$ de H vérifient :
$x_{\text{H}} - y_{\text{H}} = 0$
IV-3-c- Donner alors les coordonnées de H.
IV-4- On note G le point de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{\text{FG}} = 2\overrightarrow{n}$.
IV-4-a- Donner les coordonnées de G.
IV-4-b- Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ' parallèle à δ et passant par G.
IV-4-c- Que dire précisément sur la position relative des deux droites Δ' et (EH) ?

Durée : 1 heure 30

∽ Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH ∽
mai 2014

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.
La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

EXERCICE I

Une enquête réalisée dans le Centre de Documentation et d'Information (CDI) d'un lycée donne les résultats suivants :
60 % des élèves fréquentant le CDI sont des filles et, parmi elles, 40 % sont en seconde, 30 % en première et le reste en terminale. Parmi les garçons fréquentant le CDI, 50 % sont en seconde,
20 % en première et le reste en terminale.

Partie A

On interroge au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les évènements suivants :
F : « l'élève interrogé est une fille »,
G : « l'élève interrogé est un garçon »,
S : « l'élève interrogé est en seconde »,
P : « l'élève interrogé est en première »,
T : « l'élève interrogé est en terminale ».

I-A-1- Compléter un arbre avec les probabilités correspondantes.
I-A-2- Donner la probabilité P_1 que l'élève interrogé soit une fille de seconde.
I-A-3- Donner la probabilité P_2 que l'élève interrogé soit en seconde.
I-A-4- L'élève interrogé est en seconde. Déterminer la probabilité P_3 que ce soit une fille. Justifier la réponse. Puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près de P_3.
I-A-5- L'élève interrogé n'est pas en seconde. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_4 que ce soit un garçon.

Partie B

Durant une pause, le CDI accueille n élèves. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de filles parmi ces n élèves.

I-B-1- X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donner la valeur de p.
I-B-2- Donner, en fonction de n, la probabilité P_5 qu'il n'y ait aucune fille.
I-B-3- Donner, en fonction de n, la probabilité P_6 qu'il y ait au moins une fille.
I-B-4- Déterminer le nombre minimal n_0 d'élèves accueillis au CDI durant cette pause pour que la probabilité qu'il y ait au moins une fille soit supérieure à 0,99. Détailler les calculs.

Partie C

On rappelle que, d'après l'enquête, la proportion de filles fréquentant le CDI est égale à 0,6.

I-C-1- Soit F la variable aléatoire représentant la fréquence de filles dans un échantillon de 100 élèves pris au hasard, fréquentant le CDI. On admet que F suit une loi normale.
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de F. Les valeurs numériques des bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.
I-C-2- En fin de matinée, le documentaliste constate que 100 élèves dont 68 filles sont venus au CDI. Peut-on affirmer, au seuil de risque de 5 %, que la fréquence des filles observée au CDI dans la matinée confirme l'hypothèse de l'enquête ? Expliquer pourquoi.

EXERCICE II

Partie A

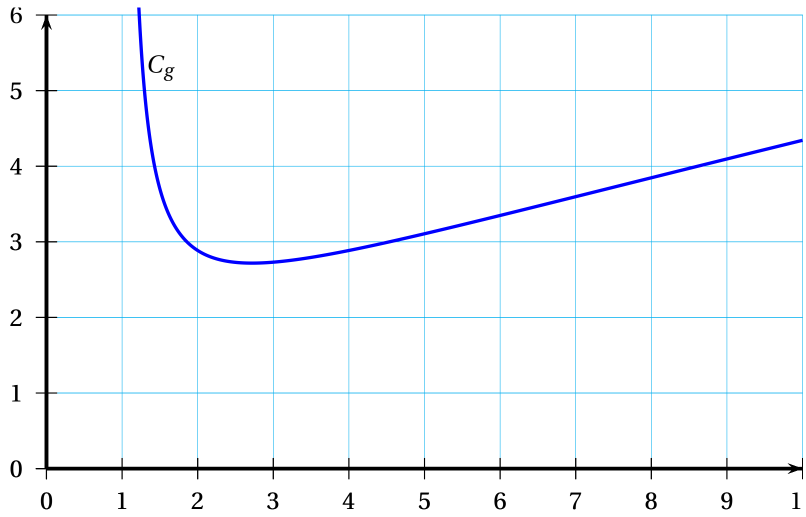
On considère la fonction g définie par

$$\text{pour tout réel } x \text{ de }]1~;~+\infty[,\quad g(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

On note C_g la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
II-A-1- g' désigne la dérivée de g. Déterminer, pour tout $x > 1$, $g'(x)$. Détailler les calculs.
II-A-2-On donne ci-dessous le tableau des variations de g :

x	1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Donner la valeur de x_0. Calculer $g(x_0)$.
II-A-3- Soit m un réel. Donner, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $g(x) = m$.
II-A-4-a- Déduire de la question précédente que l'équation $g(x) = 4$ a deux solutions. On les notera x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.
II-A-4-b- Sur la figure est représentée la courbe C_g. Placer les valeurs x_1 et x_2. Laisser les traits de construction.



Partie B

On considère maintenant la fonction f définie par :
pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $\quad f(x) = x - 4\ln x$.

On note C_f la courbe représentative de f dans le même repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

II-B-1-a- Donner $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

II-B-1-b- Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
II-B-2- f' désigne la dérivée de f. Donner, pour tout $x > 0$, $f'(x)$.
II-B-3- Soit I le point de la courbe C_f d'abscisse 1.
Donner une équation de la tangente à C_f en I.
II-B-4- Dresser le tableau des variations de f.
f admet un extremum au point M de coordonnées $(X_M\,;\,Y_M)$. Donner les valeurs exactes de X_M et de Y_M, ainsi qu'une valeur approchée de Y_M à 10^{-1} près.
II-B-5-a- Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution appartenant à $]0\,;1]$.
II-B-5-b- On considère un point P de C_f de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.
Montrer que P appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $g(x) = 4$.
II-B-6- Sur la figure de la question II-A-4-b-, placer les points I et M, les tangentes à C_f en I et en M, les points A et B d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses, puis tracer C_f.

EXERCICE III

Partie A

III-A-1- Justifier que l'équation $\cos x = 0{,}2$ a une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
On notera x_0 cette solution.
III-A-2- On considère l'algorithme suivant :

Variables
a, b et m sont des réels
δ est un réel strictement positif
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de δ
a prend la valeur 0
b prend la valeur 3
Tant que $b - a > \delta$ faire
m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Si $\cos(m) > 0,2$ alors
a prend la valeur m
sinon
b prend la valeur m
Fin Si
Fin Tant que
Afficher a
Afficher b
Fin de l'algorithme

III-A-2-a- On fait tourner cet algorithme en prenant $\delta = 0,5$. Compléter le tableau en utilisant le nombre de colonnes nécessaires.

	Initialisation	Fin de l'étape 1	Fin de l'étape 2		
$m =$					
$\cos m =$					
$a =$	0				
$b =$	3				
$b - a =$	3				

Quelles sont les valeurs affichées pour a et b à la fin de l'algorithme ?
III-A-2-b- On exécute cet algorithme avec $\delta = 0,1$. Les valeurs affichées sont 1,312 5 pour a et 1,406 25 pour b. Que peut-on en déduire pour x_0 ?

Partie B

On considère la fonction F définie, pour tout réel x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, par :

$$F(x) = \sin(2x).$$

On note C_F la courbe représentative de F dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

III-B-1- F' désigne la dérivée de F. Déterminer, pour tout $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)$.
III-B-2- Dresser le tableau des variations de F.
III-B-3- Tracer la courbe C_F.

Partie C

Soit $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. On note $\mathcal{D}_t$ le domaine compris entre la courbe C_F, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = t$. Soit $\mathcal{A}_t$ l'aire, en unités d'aires, de $\mathcal{D}_t$.
III-C-1- Justifier que : $\mathcal{A}_t = -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$.
III-C-2- On considère l'équation $(E)\ : \mathcal{A}_t = 0,4$.
III-C-2-a- Justifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation $\cos(2t) = \beta$, où β est un réel à préciser.
III-C-2-b- À l'aide de la question III-A-2-b-, donner une valeur approchée à 0,05 près de la solution t_0 de l'équation (E).
III-C-3- Sur la figure de la question III-B-3-, hachurer le domaine $\mathcal{D}_{t_0}$.

EXERCICE IV

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathscr{P}_1 : \quad -2x+y+z=8 \quad \text{et } \mathscr{P}_2 \quad 2x+5y-z=-20.$$

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$ et d'un $\overrightarrow{n_2}$ normal au plan $\mathscr{P}_2$.
IV-1-b- Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
IV-2- On note $\mathscr{D}_1$ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
IV-2-a- Justifier que le point A$(-4\,;\,-2\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{D}_1$.
IV-2-b- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u_1}\,(1\,;\,0\,;\,2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$.
IV-3- Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_1$ en notant t le paramètre.
IV-4- On considère la droite $\mathscr{D}_2$ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5\\ y & = & k\\ z & = & -2+k\end{array}\right. \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Dans cette question, on va montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont non coplanaires.
IV-4-a- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite $\mathscr{D}_2$.
IV -4- b- Justifier que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.
IV -4-c- Montrer que l'intersection $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ est vide.
IV -5- Soit H un point de la droite $\mathscr{D}_1$ et K un point de la droite $\mathscr{D}_2$.
IV -5-a- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HK}$ en fonction des paramètres t et k.
IV -5- b Montrer que la droite (HK) est perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ si et seulement si on a :

$$5t-2k=1.$$

IV -5-c- De même, la droite (HK) est perpendiculaire à $\mathscr{D}_2$ si et seulement si t et k vérifient la condition $at+bk=c$ où a, b, c sont trois réels.
Donner les valeurs de ces trois réels.
IV -5-d- Pour quelles valeurs de t et k la droite (HK) est-elle perpendiculaire aux deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$? Donner alors les coordonnées de H et de K.
IV -5-e- Cette perpendiculaire commune (HK) aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ permet de définir la distance entre les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Cette distance d est égale à la longueur HK.
Donner la valeur exacte de d.

Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
Série S 13 mai 2015

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.
La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

EXERCICE I

Une librairie a effectué une étude auprès de ses clients concernant leur durée de passage et leur mode de paiement ainsi qu'une étude sur le prix des livres.

Partie A

La durée de passage, en minutes, d'un client peut être modélisée par une variable aléatoire T ayant pour densité la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & 0 \quad \text{si } x < 0 \\ f(x) & = & 0,02\mathrm{e}^{-0,02x} \quad \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Soit t un réel strictement positif. La probabilité $P(T \leqslant t)$ que la visite d'un client dans cette librairie dure moins de t minutes est alors donnée par : $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4}près.

1. Quelle est la loi suivie par T ? Préciser son paramètre.
2. **a.** Déterminer, avec le calcul d'une intégrale, la probabilité P_1 qu'un client reste moins de 15 minutes dans la librairie. Détailler le calcul.

   b. Donner la probabilité P_2 qu'un client reste plus de 15 minutes dans la librairie.
3. Déterminer la probabilité P_3 qu'un client reste plus de 20 minutes dans la librairie sachant qu'il y est déjà depuis 15 minutes. Justifier le résultat.
4. Donner, en minutes, la durée moyenne de passage mo d'un client dans la librairie.

Partie B

On estime à 0,1 la probabilité qu'un client règle ses achats par chèque, lorsque leur montant est inférieur à 25 euros. Un matin, 20 clients font des achats d'un montant inférieur à 25 euros. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients, parmi ceux-là, ayant réglé leurs achats par chèque.
Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

2. Donner la probabilité P_4 que trois clients exactement règlent leurs achats par chèque.
3. Donner la probabilité P_5 qu'au moins deux clients règlent leurs achats par chèque.

Partie C

On note Y la variable aléatoire qui, à un livre choisi au hasard dans la librairie, associe son prix, en euros. On admet que Y suit une loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
On prend au hasard un livre dans la librairie.
Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

1. Donner la probabilité P_6 que le prix de ce livre soit inférieur à 25 euros.
2. Donner la probabilité P_7 que le prix de ce livre soit supérieur à 35 euros.
3. Donner la probabilité P_8 que le prix de ce livre soit compris entre 10 et 15 euros.

EXERCICE II

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On considère la fonction f_n définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in [0\,;\,+\infty[, \quad f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}.$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   b. On en déduit que C_n admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
2. **a.** f_n' désigne la dérivée de f_n.
   Justifier que : pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[, \quad f_n'(x) = n\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$.
   b. Dresser le tableau des variations de f_n.
   c. f_n présente un maximum en un point M_n. Donner les coordonnées de M_n.
3. **a.** Justifier que : pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[, \quad f_2(x) - f_1(x) = x\mathrm{e}^{-2x}(2-\mathrm{e}^{x})$.
   b. On déduit de la question **3. a.** que les courbes C_1 et C_2 ont deux points communs P et Q d'abscisses respectives p et q (avec $p < q$).
   Donner les valeurs exactes de p et q et une valeur approchée de q à 10^{-1} près.
   c. Donner, pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.
   En déduire la position relative des courbes C_1 et C_2.
4. Sur la figure est tracée la courbe C_1.
   Placer les points M_1, M_2, P et Q.
   Tracer la tangente à la courbe C_2 au point M_2, puis tracer la courbe C_2.
5. On considère la fonction F définie par : pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$$F(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. Justifier que F est une primitive de la fonction f_1.

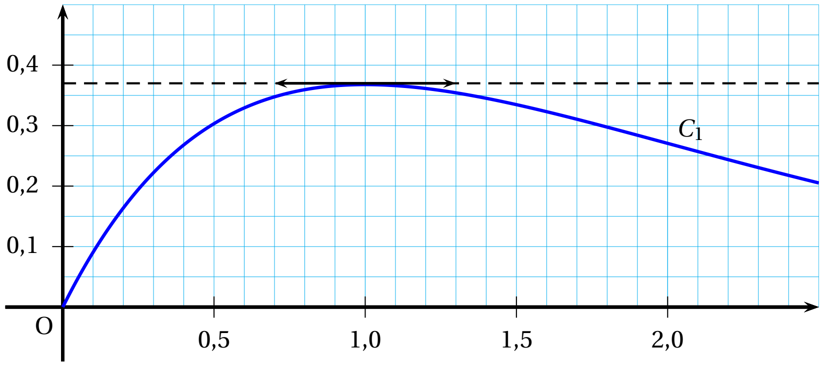
b. On considère l'intégrale :

$$\mathscr{A} = \int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Hachurer, sur la figure de la question **4.**, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut $\mathscr{A}$.

c. Déterminer $\mathscr{A}$. Détailler le calcul.

Le résultat sera écrit sous la forme $\mathscr{A} = \dfrac{1}{a}(b - c\ln 2)$ où a, b et c sont des entiers à déterminer.



EXERCICE III

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les points A, B d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = 1$ et $z_\mathrm{B} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Tracer le triangle ABC sur la figure (voir à la fin de l'exercice).
2. Donner l'affixe z_C du point C.
3. **a.** Calculer le module $|z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|$. Détailler le calcul.

   b. Donner les modules $|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}|$ et $|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}|$.

   c. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère les points suivants :
I : projeté orthogonal du point O sur la droite (BC),
J : projeté orthogonal du point O sur la droite (AC),
K : projeté orthogonal du point O sur la droite (AB).
On désigne par z_I, z_J et z_K leurs affixes respectives.

1. Placer les points I, J et K sur la figure (voir à la fin de l'exercice).
2. **a.** Justifier que J est le milieu du segment [AC].

   b. Calculer alors l'affixe z_J de J. Donner son module $\left|z_\mathrm{J}\right|$.

   c. Donner les affixes z_I et z_K ainsi que leur module $|z_\mathrm{I}|$ et $|z_\mathrm{K}|$.
3. En déduire la valeur de la somme des distances : $L_\mathrm{O} = \mathrm{OI} + \mathrm{OJ} + \mathrm{OK}$.
   Justifier la réponse.

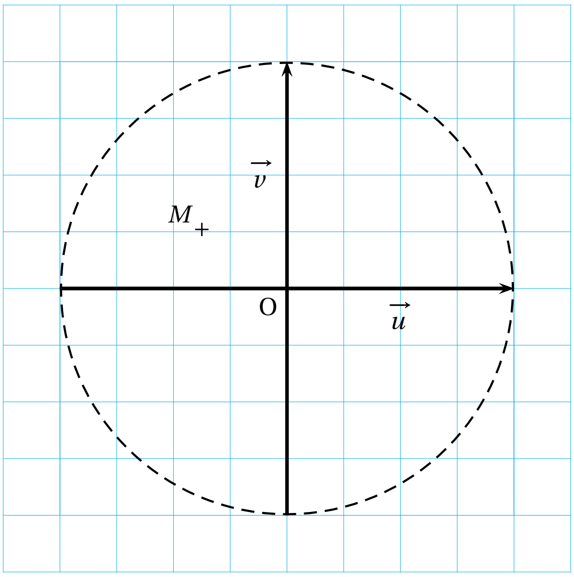
Partie C

Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du triangle ABC.
On considère les points suivants :
E : projeté orthogonal de M sur la droite (BC),
F : projeté orthogonal de M sur la droite (AC),
G : projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
On note $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ et $\mathscr{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MAC, MAB et ABC.
On pose $L_M = ME + MF + MG$.

1. Avec le point M déjà placé sur la figure (voir à la fin de l'exercice), placer les points E, F et G.
2. **a.** Exprimer $\mathscr{A}_1$ en fonction de la distance ME.

   b. Ecrire une relation liant $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ et $\mathscr{A}$.

   c. Déduire des questions précédentes que : $\mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}3L_M$.
3. L'égalité précédente montre que la valeur de L_M ne dépend pas de la position du point M à l'intérieur du triangle ABC.
   Donner la valeur de L_M. Justifier la réponse.



EXERCICE IV

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère :

— le point A de coordonnées (3 ; 2 ; 2),
— le point C de coordonnées (−1 ; −1 ; 0),
— le point D de coordonnées (1 ; −3 ; 2),
— le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x + 2y + z + 3 = 0$,
— la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\Delta : \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3+2t \\ y & = & -6+5t \\ z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. $\mathscr{P}$ et Δ sont sécants en un point E.
   Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{E}}\ ;\ y_{\text{E}}\ ;\ z_{\text{E}}\right)$ de E.
2. **a.** Vérifiez que la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

b. On note B le point tel que ABCD soit un parallélogramme.
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{B}}\ ;\ y_{\text{B}}\ ;\ z_{\text{B}}\right)$ du point B. Détailler le calcul.

c. Justifier que le point B appartient à la droite Δ.

3. **a.** Donner les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite (CD) d'abscisse 1.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

c. On désigne par H le point de la droite (CD) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (CD).
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{H}}\ ;\ y_{\text{H}}\ ;\ z_{\text{H}}\right)$ de H. Détailler le calcul.

4. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme ABCD. Détailler le calcul.

Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
Série S 11 mai 2016

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Les réponses aux questions seront à écrire au stylo et uniquement dans les cadres des documents réponses prévues à cet effet.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
L'usage d'un téléphone ou de tout objet communiquant est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE 1

Partie A

On considère la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = \mathrm{e}^x - x.$$

1. g' désigne la dérivée de g. Donner, pour tout réel x, $g'(x)$.
2. Donner l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $g'(x) \geqslant 0$.
   Justifier la réponse.
3. Dresser le tableau des variations de g.
   (les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).
4. Justifier que, pour tout réel x, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}$? En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   c. On en déduit que C admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2.
   Donner une équation de chacune d'elles.
2. f' désigne la dérivée de f. Justifier que, pour tout réel x,

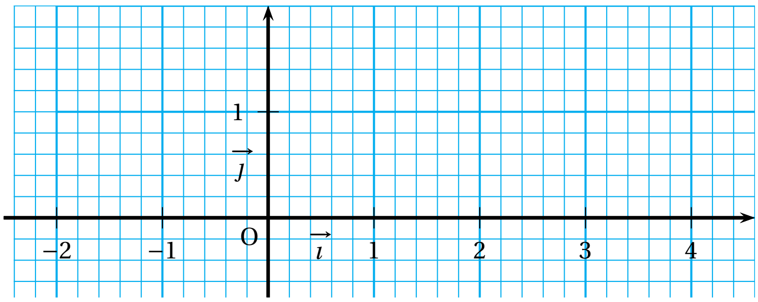
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}.$$

3. **a.** Dresser le tableau des variations de f.

b. f présente un maximum y_M atteint en x_M. Donner les valeurs exactes de x_M et y_M, puis une valeur approchée de y_M à 10^{-1} près.
Dans la suite, on note M le point de coordonnées $\left(x_M\ ;\ y_M\right)$.

4. Soit A le point de la courbe C d'abscisse 0.
Donner une équation de la tangente à C en A.

5. Placer les points A et M. Tracer les tangentes à la courbe C aux points A et M et les asymptotes Δ_1 et Δ_2. Puis tracer C.



6. f admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ un minimum a et un maximum b.
Donner les valeurs exactes de a et b.

7. On considère l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Hachurer, sur la figure de la question 5, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut J.

b. En utilisant la question 6, justifier que : $1 \leqslant J \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

EXERCICE 2

Une chocolaterie fabrique deux sortes de chocolats : des chocolats noirs et des chocolats au lait.
60 % des chocolats fabriqués sont noirs. Parmi ceux-ci, 70 % sont fourrés, tandis que 30 % seulement des chocolats au lait sont fourrés.

Partie A

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte

Un client fait une dégustation de chocolats et il en choisit un au hasard.
On considère les évènements suivants :

N : « le chocolat choisi est noir »

F : « le chocolat choisi est fourré ».

1. Donner la probabilité P_1 que le chocolat choisi soit noir.

2. Déterminer la probabilité P_2 que le chocolat choisi soit noir et fourré.
Justifier la réponse.

3. On note P_3 la probabilité que le chocolat choisi soit fourré.
Justifier que $P_3 = 0,54$.

Partie B

Un client achète une boîte de n chocolats, où n est un entier naturel non nul.
Chaque chocolat mis dans la boîte est choisi au hasard et on suppose le nombre de chocolats suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que les choix successifs sont faits de façon identique et indépendante.
On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de chocolats fourrés contenus dans la boîte.

1. X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. **Dans cette question n = 12 et, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.**
   a. Donner la probabilité P_4 que la moitié des chocolats de la boîte soient fourrés.
   b. Donner la probabilité P_5 que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.
   c. Donner la probabilité P_6 que la boîte contienne au plus trois chocolats fourrés.
3. **Dans cette question, n est quelconque.**
   a. Donner, en fonction de n, la probabilité q_n que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.
   b. Déterminer le nombre minimum n_0 de chocolats que doit acheter le client afin que la probabilité que la boîte contienne au moins un chocolat fourré soit strictement supérieure à 0,98. Détailler les calculs.

Partie C

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.
Une étude a montré que la variable aléatoire représentant le poids, exprimé en grammes, d'un chocolat choisi au hasard dans l'ensemble de la production suit une loi normale d'espérance $m = 15$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
Le service qualité effectue un contrôle et choisit au hasard un chocolat dans l'ensemble de la production.

1. Donner la probabilité P_7 que le chocolat choisi pèse plus de 17 grammes.
2. Donner la probabilité P_8 que le chocolat choisi pèse moins de 13 grammes.
3. Donner la probabilité P_9 que le chocolat choisi pèse entre 12 et 18 grammes.

EXERCICE 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$, $z_{\text{B}} = 1 + \text{i}$ et $z_{\text{C}} = \text{i}$.
Soit x un réel appartenant à $]0\,;1[$.
On nomme :

- M le point du segment [AB] d'affixe $z_M = 1 + x\text{i}$;
- N le point du segment [BC] d'affixe $z_N = x + \text{i}$.

Posons $Z = \dfrac{z_N}{z_M}$.

Partie A

1. Sur la figure, le point M a été placé pour une certaine valeur du réel x.
   Tracer le carré OABC et le triangle OMN.
2. Exprimer, en fonction de x, les modules $|z_M|$ et $|z_N|$.
3. Le triangle OMN est isocèle. Donner son sommet principal. Justifier la réponse.
4. **a.** Montrer que la droite (OB) est perpendiculaire à la droite (MN).
   b. En déduire que la droite (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{M\text{O}N}$.
5. Justifier que $|Z| = 1$.
6. Montrer que la forme algébrique de Z est : $Z = \dfrac{2x}{1+x^2} + \text{i}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

7. $\text{Im}(Z)$ désigne la partie imaginaire de Z. Montrer que $\text{Im}(Z) > 0$.

Partie B

Dans cette partie $x = 2 - \sqrt{3}$.

1. Donner la valeur exacte de $1 + x^2$.
2. **a.** $\text{Re}(Z)$ désigne la partie réelle de Z. Montrer que $\text{Re}(Z) = \dfrac{1}{2}$.

   b. On nomme θ un argument de Z.
   En déduire, en utilisant certains résultats de la partie A, la valeur exacte de θ.
   On admet que $\left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{O}N}\right) = \theta \quad (2\pi)$.
3. **a.** En utilisant la question 4. b., donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{O}M}\right) = \dfrac{\pi}{12} \quad (2\pi)$.
4. **a.** Justifier que $1 + x^2 = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$.

   b. En déduire la valeur exacte de $|z_M|$.
5. Écrire la forme trigonométrique de z_M.
6. On en déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{a}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{b}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$, où a et b sont des réels.
   Donner les valeurs exactes de a et b.

EXERCICE 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-4 ; 2 ; 1)$;
- la droite $\mathscr{D}_1$ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 7 + k\\ y & = & 6 + k\\ z & = & -3 - k\end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{R} ;$$

- la droite $\mathscr{D}_2$ passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\,(1 ; 0 ; 2)$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_2$. On notera t le paramètre.
3. Dans cette question on va montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.

   a. Justifier que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.

   b. Montrer que l'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est vide.
4. On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(-2 ; 3 ; 1)$.
   Montrer que $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et à $\overrightarrow{u_2}$.
5. Soient B et C les points définis par $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(6 ; 5 ; -3)$. On nomme $\mathscr{P}$ le plan contenant les points A, B et C.

   a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   b. $\mathscr{P}$ a donc une équation cartésienne de la forme : $6x + 5y - 3z + d = 0$, où d désigne un réel.
   Montrer que $d = 17$.

6. On nomme E le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}_1$.
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{E}}\ ;\ y_{\text{E}}\ ;\ z_{\text{E}}\right)$ du point E.

7. Soit Δ la droite passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

a. Quel est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}_1$?

b. Justifier que les droites Δ et $\mathscr{D}_1$ sont perpendiculaires.

c. Justifier que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

d. En déduire que les droites Δ et $\mathscr{D}_2$ sont perpendiculaires.
En conclusion, on a démontré que la droite Δ est une perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.