☙ Concours Fesic – mai 2009 ❧

Calculatrice interdite ; traiter 12 *exercices sur les* 16 *en* 2 *h ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.*
+1 *si bonne réponse,* −1 *si mauvaise réponse,* 0 *si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.*

EXERCICE 1

Pour tout x élément de $D =]-1\ ;\ +\infty[$, on pose

$$f(x) = \ln(1+x)$$

et pour tout x réel, on pose

$$g(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad \text{et} \quad h(x) = g(2x) - 1.$$

1. La fonction g est la bijection réciproque de f.
2. Pour tout $x \in D$, on a :
$$h \circ f(x) = x^2 + 2x - 1.$$
3. Pour tout x réel, on a :
$$f \circ h(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right).$$
4. La fonction $f \circ h$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1}.$$

1. La fonction f est impaire.
2. Pour tout x réel, on a : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
3. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
4. On a : $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{f(x)+1}{x}\right] = 2$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = -2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{|x|}},$$

D son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. On a : $D =]0\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction f est impaire.

Soit Δ la droite d'équation $y = -2x$.

3. La droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}$.
4. La courbe $\mathscr{C}$ ne coupe pas la droite Δ.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)+1}$$

et D son ensemble de définition.

1. On a : $D =]0~;~+\infty[$.
2. La fonction f est croissante sur $[1~;~+\infty[$.
3. On a : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
4. Pour tout $a > 1$, l'équation $f(x) = a$ admet exactement deux solutions dans D.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie pour $x \neq -1$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. On a : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente de pente $\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$.
3. La courbe $\mathcal{C}$ a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.
4. La droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

EXERCICE 6

Soit J la fonction définie pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = x^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{x}\right).$$

1. La fonction f est bornée.
2. Pour tout x non nul, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant x^2$.
3. On a : $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
4. On a $f(x) = 0$ si et seulement s'il existe un entier$k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{4}{2k+1}$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $D =]-2~;~2[$ par

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)^2}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. La courbe $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.
2. La fonction $f$admet la même limite lorsque x tend vers -2 par valeurs supérieures et lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures.
3. Pour tout $x \in D$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^2}\right]$$

4. La fonction F définie sur D par

$$Fx) = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - \frac{1}{2(x+2)}$$

est une primitive de f sur D.

EXERCICE 8

Soit F la fonction définie sur $I =]-\infty~;~0[$ par

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour tout $x \in]-\infty~;~0[$, on a : $F(x) \geqslant 0$.
2. Il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x \in I$,

$$F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right) + C.$$

3. La fonction F est croissante sur I.
4. L'équation $F(x) = 0$ n'admet aucune solution sur I.

EXERCICE 9

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^n \ln x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^n}\right).$$

2. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est majorée par $\frac{1}{2}$.
3. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est décroissante.
4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge vers 0.

EXERCICE 10

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$In = \int_0^n x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

1. Pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_n = \frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n^2}\mathrm{e}^{-2}.$$

3. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\infty$.
4. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 I_n = 1$.

EXERCICE 11

On considère les équations différentielles

$$y'' + \frac{1}{16}y = 0 \quad (E) \quad \text{et} \quad -y'' + \frac{1}{16}y = 0 \quad (E')$$

1. La seule fonction qui est à la fois solution des équations (E) et (E') est la fonction nulle.
2. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = A\cos\left(\frac{x}{4}\right) + B\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

   où A et B sont deux réels quelconques.

3. Les solutions de l'équation (E) sont périodiques de période 4π.
4. L'équation (E) admet une unique solution vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = -\sqrt{2}$, qui est la fonction g définie sur R par

$$g(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{4}\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{4}\right).$$

EXERCICE 12

Soit n un entier naturel non nul et P_n le polynôme défini, pour tout x réel, par

$$P_n(x) = x^3 - 3nx^2 + \left(3n^2 - 1\right)x - n(n+1)(n-1).$$

1. Pour tout $n \in\ N^*$, $P_n(0)$ est un entier naturel.
2. Pour tout $n \in\ N^*$, $P_n(n) = 0$.
3. Pour tout $n \in\ N^*$ $P'_n(n) = 0$.
4. La suite $(P_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 13

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par

$$u_n = \text{e} + \left(\frac{1}{\text{e}}\right)^n.$$

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \text{e} + 1$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. On a : $\lim u_n = 0$.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\text{e} + \frac{\text{e}^{n+1} - 1}{\text{e}^n(\text{e} - 1)}.$$

EXERCICE 14

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par $z_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1+\text{i}}{2}z_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$z_n = \frac{\text{e}^{\text{i}n\pi/4}}{(\sqrt{2})^n}.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$ a pour affixe ei(k+3)1r/4

$$Z_k = \frac{\text{e}^{\text{i}(k+3)\pi/4}}{(\sqrt{2})^{k+1}}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, la longueur de la ligne polygonale $(M_0M_1M_2\ldots M_n)$ est

$$L_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(1 - 2^{-n/2}\right).$$

4. La longueur de la ligne polygonale $(M_0M_1M_2\ldots M_n)$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 15

Pour t réel, on note $M(t)$ le point dont l'affixe est le nombre complexe

$$Z(t) = \frac{1}{2+\mathrm{i}t}.$$

1. Pour tout t réel, on a :

$$Z(t) + \overline{Z(t)} = 4Z(t)\overline{Z(t)}.$$

Soit C le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1}{4}$ et de rayon $R = 4$.

2. Pour tout t réel, le point $M(t)$ appartient au cercle C.
3. Pour tout t réel non nul, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont diamétralement opposés sur le cercle C.
4. Les points $M(1)$, $M(2)$, $M(-4)$ et $M(-2)$ sont les sommets d'un rectangle.

EXERCICE 16

Pour tout nombre complexe z, on pose

$$P(z) = z^4 - 16z^3 + 90z^2 - 16z + 89.$$

1. On a pour tout z complexe :

$$P(z) = \left(z^2+1\right)\left(z^2 - 16z + 89\right).$$

2. L'équation $P(z) = 0$ admet quatre racines complexes deux à deux conjuguées.
3. Parmi les racines de l'équation $P(z) = 0$, il y en a deux qui sont opposées.
4. Le nombre complexe $z_0 = -8 + 5\mathrm{i}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 17

Soit A, B, C trois points distincts non alignés du plan et $x \in \mathbb{R}$. On définit les points M et N par

$$\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{A}N} = (1-x)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

1. Pour $x = 3$, M est le barycentre du système pondéré $\left\{\left(\mathrm{B},\ \frac{1}{2}\right),\ (\mathrm{C},\ -2)\right\}$.
2. Pour $x = \frac{1}{2}$, il existe deux réels b et c tels que M soit le barycentre du système pondéré $\{(B,\ b), (C,\ c)\}$.
3. Pour toute valeur de x, le point N appartient à la droite (BC).
4. Il existe une valeur de x pour laquelle (BCNM) est un parallélogramme.

EXERCICE 18

Soit, dans l'espace, les points suivants, de coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}\ (1\ ;\ -2\ ;\ 4) ; \mathrm{B}(-2\ ;\ -6\ ;\ 5) ; \mathrm{C}(5\ ;\ 1\ ;\ 2) ; \mathrm{D}(1\ ;\ -5\ ;\ -8) ; \mathrm{E}(-4\ ;\ 0\ ;\ -3).$$

1. Une équation du plan (ABC) est : $5x - 2y + 7z - 37 = 0$.
2. La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC).
3. Les plans (ABC) et (ADE) sont perpendiculaires.
4. L'aire du triangle (ABC) est $\sqrt{39}$.

EXERCICE 19

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire prenant les valeurs entières 0 ; 1 ; 2 ; … ; n ; $n+1$ et vérifiant, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \qquad (1)$$

1. On a : $P(X \geqslant 2) = p(X = 1)$.
2. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.
3. On a : $P(X = n) = P(X = n+1)$.
4. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} [P(X \geqslant n)] = 1$.

EXERCICE 20

On s'intéresse aux timbres postaux à 2 F : 80 % d'entre eux comportent deux bandes de phosphore, l'une à gauche et l'autre à droite ; les 20 % restants ont une seule bande de phosphore, 10 % parmi ceux-ci à gauche et les autres à droite.

1. La probabilité pour qu'un timbre à 2 F (choisi au hasard) ait une bande de phosphore à droite est $p_1 = 0,98$.
2. Une machine détecte sur un timbre à 2 F une bande de phosphore à droite. La probabilité pour que le timbre ait deux bandes de phosphore est $p_2 = \dfrac{4}{49}$.

Sur une enveloppe, on a collé trois timbres à 2 F, choisis au hasard et de manière indépendante.

3. La probabilité d'avoir sur l'enveloppe un total de 5 bandes de phosphore est $p_3 = 0,128$.
4. La probabilité d'avoir sur l'enveloppe au moins 5 bandes de phosphore est égale à la probabilité d'en avoir au plus 4.

Concours d'entrée FESIC mai 2000

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{|x| + 1}.$$

$\mathscr{D}$ son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Vrai/Faux On a : $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

Vrai/Faux La droite Δ d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 1$ est asymptote $\mathscr{C}$.

Vrai/Faux La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

Vrai/Faux Pour tout $x > -1$, on a : $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3}$.

---

2. Soit f la fonction dfinie par/ :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}.$$

Vrai/Faux La restriction de f à l'intervalle $[0\,;\,1[$ est une bijection de $[0\,;\,1[$ sur $-1\,;\,+\infty[$.

Vrai/Faux La restriction de f à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ admet une réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]1\,;\,+\infty[$.

Vrai/Faux L'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$ admet une unique solution.

Vrai/Faux Pour tout $a < 0$, l'équation $f(x) = a$ admet deux solutions distinctes.

---

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin x$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et Δ la droite d'équation $y = x$.

Vrai/Faux La fonction f vérifie l'équation différentielle $y'' + y = 2\cos x$.

Vrai/Faux La courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ ont une infinité de points communs.

Vrai/Faux La droite Δ est tangente à $\mathscr{C}$ en chacun de leurs points communs.

Vrai/Faux La droite Δ' d'équation $y = -x$ est tangente à $\mathscr{C}$.

---

4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln(\ln|x|),$$

$\mathscr{D}$ son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Vrai/Faux On a $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

Vrai/Faux Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{|x|\ln|x|}$.

Vrai/Faux Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e est $y = \dfrac{x - \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$.

Vrai/Faux Pour tous réels a et b vérifiant $b > a \geqslant \mathrm{e}$, on a :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

---

5. Pour n entier naturel, $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathrm{I} =]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n \ln(1 + x).$$

et on désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par le point de coordonnées $(1\ ;\ \ln 2)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n'(x) = 0$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on désigne par a_n le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1.

Vrai/Faux La suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique.

---

6. Pour tout réel m, on considère l'équation (E_m) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - m = 0.$$

Vrai/Faux L'unique valeur de m pour laquelle $x = 0$ est solution de l'équation (E_m) est $m = 0$.

Vrai/Faux Pour toute valeur de m, l'équation (E_m) admet au moins une solution.
Vrai/Faux Si $-1 < m < 0$, l'équation (E_m) a deux solutions positives.
Vrai/Faux Si $m > 0$, l'équation (E_m) a une unique solution.

---

7. On considère l'équation (E) suivante :

$$\sin x = \sqrt{3}\cos 2x.$$

Vrai/Faux L'équation (E) est équivalente à l'équation

$$\left(\mathrm{E}'\right) \qquad \sqrt{3}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{3} = 0.$$

Vrai/Faux L'équation (E) admet quatre solutions dans $\mathbb{R}$.
Vrai/Faux L'équation (E) admet deux solutions dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
Vrai/Faux L'équation (E) admet deux solutions dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$, dont le produit vaut $\dfrac{2\pi^2}{9}$.

---

8. Soit F la fonction dfinie sur $\mathrm{I} = [0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
(On ne cherchera pas calculer directement F.)
Vrai/Faux La fonction F est positive et strictement croissante sur I.
Vrai/Faux Pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\sqrt{t} \leqslant t + \dfrac{1}{4}$.
Vrai/Faux On a : $\displaystyle\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{5}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Vrai/Faux Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a/ : $F(x) \leqslant \dfrac{5}{4}$.

---

9. Pour, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Vrai/Faux Pour tout $x > 0$, on a : $F'(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2} - \ln 2$.
Vrai/Faux Pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$, on a $F(x) < 0$.
Vrai/Faux Pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = -\dfrac{\ln(2x)}{x} - \dfrac{1}{x} + \ln(2) + 1$.
Vrai/Faux On a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ln(2) + 1$.

---

10. On pose : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 t\cos^2(\pi t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 t\sin^2(\pi t)\,\mathrm{d}t$.
Vrai/Faux On a : $\mathrm{I} > 0$ et $\mathrm{J} > 0$.
Vrai/Faux On a $\mathrm{I} + \mathrm{J} = 1$.
Vrai/Faux On a : $\mathrm{I} - \mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 t\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t$.
Vrai/Faux On a : $\mathrm{I} = \mathrm{J} = \dfrac{1}{2}$.

---

11. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par leur premier terme $a_0 = 2,\ b_0 = 4$, respectivement et les relations, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n).$$

On désigne par A_n et B_n les points de l'axe orienté d'abscisse a_n et b_n respectivement.
Vrai/Faux La suite $u_n = a_n + b_n$ est constante.
Vrai/Faux La suite $v_n = a_n - b_n$ est une suite géométrique convergente.
Vrai/Faux Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les segments $[A_nB_n]$ ont le même milieu I, qui est le point de (Ox) d'abscisse 3.
Vrai/Faux Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = 3 - \dfrac{1}{2^n}$ et $b_n = 3 + \dfrac{1}{2^n}$.

---

12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_1 = 2$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.
Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = \dfrac{2}{3^n}$.
Vrai/Faux La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est arithmétique, de raison $-\ln(3)$.
Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 3\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = \ln(2) - \frac{n}{2}\ln(3).$$

---

13. Pour tout réel $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, on pose $Z(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On a :
Vrai/Faux $Z\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
Vrai/Faux pour tout $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, $\overline{Z(\theta)} = Z(-\theta)$.
Vrai/Faux pour tout $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, $Z(\theta) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
Vrai/Faux pour tout $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$, $\arg[Z(\theta)] = \dfrac{\theta}{2} \quad [2\pi]$.

---

14. Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 4\overline{z} - 5 = 0.$$

Vrai/Faux Si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est aussi solution.
Vrai/Faux L'équation (E) admet une solution imaginaire pure.
Vrai/Faux L'équation (E) admet deux solutions réelles.
Vrai/Faux L'équation (E) admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$.

---

15. Soit $a \in \left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right[$ et (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 2z\ln(a) + 1 = 0.$$

On désigne par M et N les points du plan dont les affixes sont les racines de (E).
Vrai/Faux Les points M et N sont symétriques par rapport l'axe réel (Ox).
Vrai/Faux Les points M et N sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1.
Vrai/Faux Il n'existe aucune valeur de a telle que M et N soient symétriques par rapport à l'origine.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$.
Vrai/Faux On a : A$M < 2$.

---

16. Pour n entier naturel non nul, on note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe paramètre par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \cos(nt) \end{cases},$$

autrement dit, l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(\sin(t),\ \cos(nt))$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Vrai/Faux La courbe $(\mathscr{C}_1)$ est un cercle.

Vrai/Faux La courbe $(\mathscr{C}_2)$ est la parabole d'équation $y = 1 - 2x^2$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ est axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_n)$.

Vrai/Faux Pour tout $n \geqslant 1$, $(\mathscr{C}_n)$ admet au point M(0) une tangente parallèle l'axe $(\mathrm{O}y)$.

---

17. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant, quatre inconnues $a,\ b,\ c,\ d$:

$$S_m \begin{cases} a+b-c+2d &= 2 \\ 2a+4b-6c+2d &= 0 \\ -a+b-3c-9d &= -1 \\ a-2b+5c+13d &= m+2 \end{cases}$$

Vrai/Faux Pour $m \neq -2$, le système S_m admet un unique quadruplet solution.

Vrai/Faux Pour $m = -2$, le système S_{-2} admet une infinité de quadruplets solution, qui sont de la forme : $(7-k\ ;\ 2k-3\ ;\ k-1)$ où $k \in \mathbb{R}$.

Vrai/Faux Dans l'espace, l'ensemble des points de coordonnées :

$\begin{cases} x &= 7-k \\ y &= 2k-3 \\ z &= k \end{cases}$ où k décrit $\mathbb{R}$, est un plan.

Vrai/Faux Dans l'espace, l'ensemble des points de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ telles que $x = 7 - z$ est une droite.

---

18. Dans le plan, on considère un triangle (ABC) et on note :

G le barycentre du système {(A, 3), (B, 1), (C, 1)} ;

Q le barycentre du système {(A, 3), (C, 1)} ;

R le barycentre du système {(A, 3), (B, 1)} ;

P le milieu du segment [BC] ;

Vrai/Faux Les droites (CR) et (BQ) sont sécantes en G.

Vrai/Faux Le point G appartient la droite AP.

Vrai/Faux Le point G est l'image du point A par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{1}{5}$.

On suppose que les points B et C sont fixes et que le point A décrit l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan tels que : $\left(\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Vrai/Faux L'ensemble $\mathcal{E}'$ décrit par G lorsque A décrit $\mathcal{E}$ est une droite parallèle (BC).

---

19. Un auto-radio est muni d'un code de sécurité constitué de 4 chiffres : chacun de ces chiffres est compris entre 0 et 9 ; seul le premier ne peut pas être nul. Lorsque le poste a été enlevé de son emplacement dans l'automobile il faut, pour le réinstaller, composer le code de sécurité. Lorsque le premier code composé est inexact, il faut attendre deux minutes pour pouvoir composer un nouveau code. Si celui-ci est inexact, il faut nouveau attendre quatre minutes pour composer le code suivant et ainsi de suite, le temps d'attente tant multiplié par deux chaque fois.

On admet que l'on peut renouveler l'opération autant de fois que l'on veut et on néglige chaque fois le temps mis pour composer le code.

Vrai/Faux En 24 heures, on a le temps de faire au maximum 10 essais.

On suppose que l'on compose les codes au hasard, sans répétition, jusqu'à obtention du code correct.

Vrai/Faux La probabilité pour que le code ne soit exact qu'au quatrième essai est $\frac{1}{8\,997}$.

Vrai/Faux La probabilité pour que le code correct soit trouvé en moins de 24 heures est $\frac{1}{900}$.

Vrai/Faux La probabilité pour que le code correct soit trouvé au cours du deuxième jour est $\frac{1}{8\,990}$.

---

20. On lance un dé dont les six faces, numérotées de 1 à 6 , sont équiprobables.

Si le résultat est un nombre pair, on tire au hasard une boule d'une urne U contenant deux boules blanches et trois boules noires. Si le résultat est impair, on tire au hasard une boule d'une urne V qui contient trois boules blanches et deux boules noires.

On désigne par :
B l'évènement « tirer une boule blanche » ;
N l'évènement « tirer une boule noire » ;
U l'évènement « tirer une boule dans l'urne ».
On a :
Vrai/Faux $p(B \cap U) = p(N \cap \overline{U})$.
Vrai/Faux $p(B) = \dfrac{1}{2}$.
Vrai/Faux $p(B) = p(N)$.
Vrai/Faux $p(U/B) = p\left(\overline{U}/N\right)$.

Concours d'entrée FESIC mai 2001

Dans toute question où il intervient le plan (respectivement l'espace) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right) = (\mathrm{O}xy)$ (respectivement $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right) = (\mathrm{O}xyz)$).

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-\infty,\ 1]$ par

$$f(x) = 2x\sqrt{1-x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. On désigne par T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$.

a) Pour tout $x < 1$, on a : $f'(x) = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$.

b) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f(x) \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

c) Une équation cartésienne de T est $y = 2x$.

d) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathrm{I} =]-\infty,\ 1]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{x} - (x+1).$$

a) La fonction g est positive sur I.

b) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}g(x)$.

c) La fonction f est bijective de I sur $]0, +\infty[$.

d) Il existe un unique réel α dans I tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-x+3)\mathrm{e}^{x},$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a) Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \geqslant -x + 3$.
b) La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
c) La fonction f admet un unique extremum.
d) Pour tout réel $m \neq e^2$, l'équation $f(x) = m$ admet soit 0 soit 2 solutions.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right),$$

$\mathscr{D}$ son ensemble de définition et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
a) On a : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
b) Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a : $f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$.
c) La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote en $+\infty$.
d) La courbe $\mathscr{C}$ admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox).

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = x \sin\left(\frac{2}{x}\right).$$

a) On a : $f\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$.
b) On a $f(x) = 0$ si et seulement s'il existe un entier relatif non nul k tel que $x = \frac{1}{k\pi}$.
c) On a : $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
d) On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 6

Pour tout couple de réels a et b tels que $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, on définit sur $]0,\ +\infty[$ la fonction

$$f_{a,\,b}(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$$

et on note $\mathscr{C}_{a,\,b}$ sa courbe représentative.
a) Pour tout couple $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_{a,\,b}$.

b) Pour tout couple $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{a,\ b}(x) = b$.
c) Il existe une unique courbe $\mathscr{C}_{a,\ b}$ passant par le point A de coordonnées $(1,\ 1)$.
d) Il n'existe pas de courbe $\mathscr{C}_{a,\ b}$ passant par le point B de coordonnées $(1,\ 0)$ et admettant en B une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 \left(1 + x^n\right) \ln(1 + x)\, d\mathrm{x}.$$

a) Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a : $0 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant \ln 2$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant 2\ln 2$.
c) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
d) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 8

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\, \mathrm{d}x.$$

a) On a : $\mathrm{I}_1 = \mathrm{e} - 1$.
b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
c) Pour tout entier $n > 0$, on a : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
d) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.

Exercice 9

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_1^x t\mathrm{e}^{1-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

a) La fonction F est positive pour tout x positif.
b) Pour tout x réel, on a : $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{1-x^2} - 1\right)$.
c) Pour tout x réel, on a : $F'(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2} - 1$.
d) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 10

On considère la suite $(S_n)_{n\in N^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

a) Pour tout entier $n > 0$, on a : $S_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

b) Pour tout entier $n > 0$, on a : $0 \leqslant S_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

d) La suite $(S_n)_{n\in N^*}$ est croissante.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -1 - \mathrm{e}^x.$$

a) Pour tout $x \leqslant -1$, on a : $-\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

b) L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

On désigne par α l'unique solution négative de l'équation $f(x) = x$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, et de premier terme $u_0 \leqslant -1$.

c) Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant -1$.

d) Pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}|u_0 - \alpha|$.

Exercice 12

On considère le nombre complexe

$$Z = -\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}.$$

a) On a : $|Z| = 1$.

b) On a : $Z = -(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$.

c) Le réel $-\dfrac{\mathrm{i}\pi}{12}$ est un argument de Z.

d) On a : $Z = \mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{12}}$.

Exercice 13

Si z et z' désignent deux nombres complexes, on pose

$$Z = z\overline{z'} + \overline{z}z'.$$

a) Si $z = 2\mathrm{i}$ et $z' = -1$, alors $Z = 4\mathrm{i}$.
b) Si $z = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$ et $z' = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$, alors $Z = 0$.
c) Si $z = z'$, alors $Z = 2|z|$.
d) Si z est le nombre complexe de module $r > 0$ et d'argument θ et z' est le nombre complexe de module $r' > 0$ et d'argument θ', alors
$Z = 2rr'\cos\left(\theta - \theta'\right)$.

Exercice 14

Soit α un réel appartenant l'intervalle $[0, \pi]$ et (E_α) l'équation d'inconnue complexe z

$$z^2 + 2(\sin\alpha)z + 1 = 0 \qquad (\mathrm{E}_\alpha)$$

a) Pour tout $\alpha \in [0,\ \pi]$, l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées distinctes.
b) Il existe une unique valeur de $\alpha \in [0,\ \pi]$ pour laquelle i est solution de (E_α).
c) Pour tout $\alpha \in [0,\ \pi]$, l'équation (E_α) a pour solutions :

$$z_1 = \sin\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha.$$

d) Pour tout $\alpha \in [0,\ \pi]$, l'équation (E_α) a pour solutions

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Exercice 15

Soit A, B, C trois points non alignés du plan $\mathscr{P}$ et G le point défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{A}G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

a) Le point G est le barycentre du système de points pondérés
$\{(\mathrm{A},\ 1)\ ;\ (\mathrm{B},\ 1)\ ;\ (\mathrm{C},2)\}$.
b) L'application $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ qui, à tout point M du plan, associe le point M' du plan défini par

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}.$$

est l'homothétie de centre G et de rapport 3.
c) Le point G est le milieu du segment [IC], où le point I est le milieu du segment [AB].
d) Si le triangle (ABC) est rectangle en A, alors $G\mathrm{A} = G\mathrm{C}$.

Exercice 16

Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \\ y & = & 2\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

où le paramètre t décrit $\mathbb{R}$ Soit M de coordonnées $(a\,;\,b)$ un point de $\mathscr{C}$.
a) Le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(b,\ a)$ est un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point M.
b) Soit N le point de coordonnées $(b\,;\ a)$ et T le point défini par
$\overrightarrow{\mathrm{O}T} = \overrightarrow{\mathrm{O}M} + \overrightarrow{\mathrm{O}N}$.
Alors la droite (MT) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.
c) La courbe $\mathscr{C}$ est contenue dans la courbe d'équation cartésienne
$x^2 - y^2 = 4$.
d) La courbe $\mathscr{C}$ n'a pas d'intersection avec l'axe $(\mathrm{O}x)$.

Exercice 17

On considère une succession de sacs qu'on désigne par S_1, S_2, ..., S_n, ...Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc ; tous les autres sacs contiennent chacun 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On tire au hasard un jeton du sac S_1, que l'on place dans le sac S_2. Puis, on tire au hasard un jeton du sac S_2, que l'on place dans le sac S_3, et ainsi de suite. On note B_k l'évènement : le jeton tiré du sac S_k est blanc, et $p_k = P(B_k)$ sa probabilité.
a) On a : $P(\mathrm{B}_2|\mathrm{B}_1) = \dfrac{2}{3}$ et $P\left(\mathrm{B}_2|\overline{\mathrm{B}_1}\right) = \dfrac{1}{3}$.
b) On a, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{2}{3}$.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n - 2$. Alors la suite $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique.
d) La suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 18

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6. On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note

- N l'évènement : le dé tiré est normal ;
- U l'évènement : on obtient 1 au premier lancer ;
- pour n entier non nul, S_n l'évènement : on obtient 6 à chacun des n premiers lancers.

a) On a : $P(\mathrm{U}) = \dfrac{2}{9}$.

b) Pour tout entier n non nul, on a : $P\left(S_n\right) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Pour n entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

c) Pour tout entier n non nul, on a : $p_n = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d) On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Concours d'entrée FESIC mai 2002

Dans toute question où il intervient le plan (respectivement l'espace) est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right) = (\text{O}xy)$ (respectivement $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right) = (\text{O}xyz)$).

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}\right)},$$

$\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
a) On a : $\mathcal{D} =]0,\ +\infty[$.
b) La courbe $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote en $+\infty$.
c) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x) < \frac{x}{2}$.
d) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(\pi x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
a) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 1 + \cos(\pi x)$.
b) On a : $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = 1 + \pi$.
c) La courbe $\mathcal{C}$ coupe la première bissectrice en chaque point d'abscisse $x = k + \frac{1}{2}$, où $k \in Z$.
d) La courbe $\mathcal{C}$ admet la première bissectrice comme droite asymptote en $+\infty$.

Exercice 3

Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x+1} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \text{e}^{-2x} + 2\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et Γ celle de g. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\pi/2$. On note M' le point de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ et d'affixe z', image par R du point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et d'affixe z.

a) L'ensemble de définition de f est $\mathrm{I} =]-1\,;\,+\infty[$.
b) On a : $z' = \mathrm{i}z$.
c) On a : $\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x \end{cases}$
d) Tout point M de la courbe $\mathscr{C}$ a une image M' par R qui appartient ? la courbe Γ.

Exercice 4

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

a) La fonction f est paire.
b) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
c) On a : $\lim\limits_{x \to +0^-} f(x) = -\dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{x \to +0^+} f(x) = \dfrac{1}{4}$.
d) On a :

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2}\right).$$

Exercice 5

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}.$$

a) La fonction f vérifie l'équation
$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad y'(x) - 2y(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
b) L'équation $f(x) = -\dfrac{1}{16}$ deux solutions distinctes.
Pour α réel, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
c) Pour tout réel α, on a

$$I(\alpha) = -\frac{1}{4\mathrm{e}^2} - \frac{2\alpha + 1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha}.$$

(On pourra utiliser une intégration par parties.)

d) On a : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} = +\infty$.

Exercice 6

On considère les fonctions définies par

$$f(x) = [2 + \cos x]\mathrm{e}^{1-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

On note G la primitive de g valant $1 + \ln 3$ en 0 et I son intervalle de définition.
a) On a : $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
b) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $G(x) = \ln[f(x)]$.
c) La fonction G est strictement monotone sur I.
d) On a :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left[\frac{f(1)}{f(0)}\right].$$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}.$$

et $\mathscr{D}$ son ensemble de d ?finition. On note

$$I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et, pour} \qquad n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x.$$

a) Il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, on ait

$$f(x) = a + \frac{b}{x+2}.$$

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} I$.
d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite $4 - \ln 2$.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = O \qquad (\mathrm{E}_1).$$

a) Les solutions de (E_1) sont les fonctions $y(x) = Ke^{\frac{x}{2}}$, où $K \in \mathbb{R}$.
b) L'équation (E_1) admet une unique solution vérifiant la condition $y(O) = 2$ et c'est la fonction $y(x) = e^{2x} + 1$.
On considère l'équation

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad u'(x) + u(x) = 2e^{-3x} \qquad (E_2)$$

c) Une fonction f vérifie l'équation (E_2) si et seulement si la fonction g définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = e^{3x} f(x) + 1$, est solution de l'équation (E_1).
d) La fonction

$$f(x) = 2e^{-x} - e^{-3x}$$

est l'unique fonction u vérifiant l'équation (E_2) et la condition $u(0) = 1$.

Exercice 9

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 2nx + 1.$$

a) Pour tout $n \geqslant 2$, la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1].
b) Pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On note u_n l'unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$ de l'équation $f_n(x) = 0$.
c) Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
d) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \qquad \text{et, pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$v_n = u_{n+1} - u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

a) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.
b) La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie.

Exercice 11

Soit α un réel et (E_α) l'équation d'inconnue complexe z

$$z^2 + (1+\alpha)z + \alpha^2 = 0.$$

On désigne par M_α et M'_α, les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E_α).
a) Le nombre complexe $z = -2 + \mathrm{i}\sqrt{5}$ est une solution de (E_α).
b) Les solutions de l'équation (E_α) sont soit réelles, soit complexes conjuguées.
c) Pour tout $\alpha > 1$, le triangle $(\mathrm{O}M_\alpha M'_\alpha)$ est isocèle.
d) Pour tout $\alpha > 1$, on a : $M_\alpha M'_\alpha = \sqrt{(3\alpha+1)(\alpha-1)}$.

Exercice 12

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 4 et l'application F qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$, d'affixe z' donné par

$$z' = \frac{z-4}{4-\overline{z}} \qquad (1)$$

a) Le point B d'affixe 1 + 3i a pour image par F le point B′ d'affixe i.
b) Tous les points de la droite d'équation $x = 4$ privée du point A ont la même image par F.
c) Pour tout point M distinct de A, d'image M' par F, on a : $\mathrm{O}M' = 1$.
d) Pour tout nombre complexe $z \neq 4$, le nombre $\dfrac{z'-1}{z-4}$ (o ? z' est donné par (1)) est réel.

Exercice 13

Soit :
- (ABC) un triangle équilatéral de côté 3 ;
- G le centre de gravité du triangle (ABC) ;
- H le symétrique de A par rapport à G.

On pourra également considérer
- I le milieu du segment [BC].

a) Le point H est le barycentre du système de points pondérés
{(A, 1) ; (B, −2) ; (C, -2)}.
b) On a : $\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = 3$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (HC).
c) Pour tout point M de $\mathscr{P}$, on a : $\overrightarrow{\mathrm{H}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = 3$.
d) Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = -9.$$

Exercice 14

Soit (SMN) un triangle isocèle de sommet principal S, de cercle inscrit de centre Ω et de rayon 1.
On note Q, P, O respectivement, les points de contact du cercle inscrit avec les segments [SM], [SN] et [MN]. Enfin, on pose OS = x.

a) On a : $\dfrac{x}{\text{OM}} = \dfrac{1}{\text{QS}}$.
b) On a : $\text{QS}^2 = x(x-2)$.
c) On a : $\text{OM}^2 = \dfrac{x}{x-2}$.
On rappelle que le volume d'une section de cône est égal au tiers du volume de la section de cylindre correspondante (c'est-à-dire de même base et de même hauteur).
Soit V le volume du cône engendré par rotation du triangle (SMN) autour de l'axe (SO).
d) Le volume V est minimum pour $x = 4$.

Exercice 15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

- une boule numérotée 0 ;
- une boule numérotée 1 ;
- 2^1 boules numérotées 2 ;
- 2^2 boules numérotées 3 ;

......

- 2^{k-1} boules numérotées k (où k est un entier compris entre 1 et n) ;

......

- 2^{n-1} boules numérotées n.

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
a) L'urne contient $2^n - 1$ boules.
b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.
c) On a pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

d) On a : $\text{E}(X) = (n-1)2^n + 1$.

Exercice 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 2 boules blanches et n boules noires ; l'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires.
On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise. On désigne par :

- U l'évènement : « on choisit l'urne U » ;
- V l'évènement : « on choisit l'urne V » ;
- B l'évènement : « les deux boules tirées sont blanches ».

a) On a : $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{U}) = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$.

b) On a : $p(\mathrm{B}) = \dfrac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$.

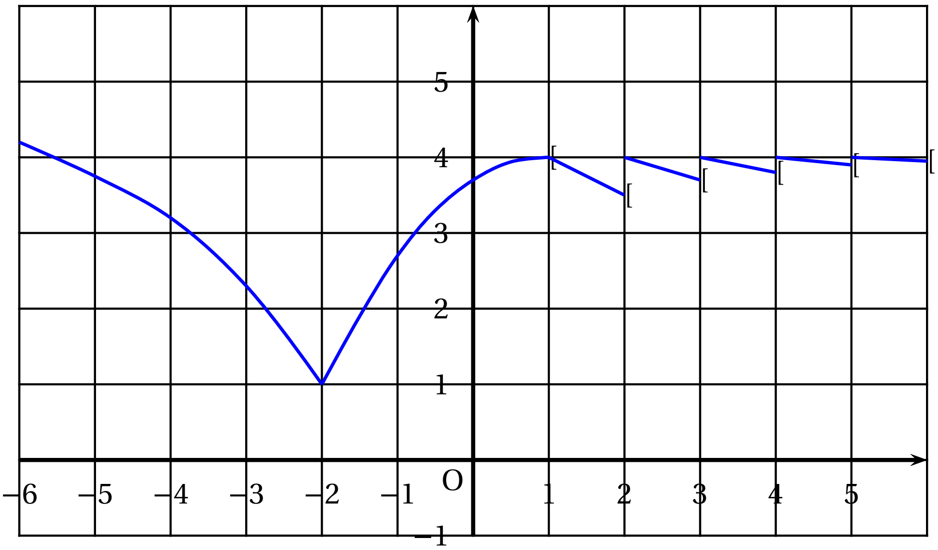
c) On a : $p(\mathrm{U}|\mathrm{B}) = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}$.

d) Pour que $p(\mathrm{U}|\mathrm{B}) \leqslant 0,1$, il suffit que $n \geqslant 4$.

Concours d'entrée FESIC mai 2003

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe ci-dessous :



a) f est dérivable au point d'abscisse $x = -2$.
b) f est continue au point d'abscisse $x = 1$.
c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.
d) Sur l'intervalle $]-2\ ;\ 1[$, la fonction f', dérivée de f sur cet intervalle, est croissante.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = 1$.

On d ?signe par $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.

a) On a $\mathcal{D} =]0\ ; +\infty[$.

b) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1}$.

c) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) < 0$.

d) L'équation $f(x) = -1$ possède l'unique solution $x = \ln\left(\dfrac{e+1}{e-1}\right)$.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -(1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère cité.
a) f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) La fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
c) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. L'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0,\ x = t$ et $y = 0$ se calcule, en unités d'aires, par : $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.
d) L'aire définie à la question **c)** est finie quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) $\mathrm{I}_1 = \ln 2$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geqslant 0$.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
d) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{n-1}^n \frac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.
a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 2n - 1$.
b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
c) La suite $\left(\dfrac{I_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \cdots + I_n = n^2$.

Exercice 6

a) $17 + 20 + 23 + \cdots + 62 = 632$.
b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{127}{128}$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. f est dérivable sur $]1\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.

d) Si une suite n'est pas arithmétique, alors elle est géométrique.

Exercice 7

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n - 1 + \frac{1}{n!}.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{n+1}$.
b) La suite (u_n) est décroissante.
c) La suite (v_n) est croissante.
d) Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8

Dans le plan complexe, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que :

$$z' = z\overline{z} + (1+\mathrm{i})z + 3\overline{z} - 2.$$

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x' et y' réels.
a) $x' = x^2 + y^2 + 4x - y - 2$ et $y' = x - 2y$.
b) L'ensemble E_1 des points M tels que z' soit réel est une droite.
c) L'ensemble E_2 des points M tels que z' soit imaginaire est un cercle.
d) E_1 et E_2 ne sont pas sécants.

Exercice 9

Dans le plan complexe, on considère le point Ω d'affixe 1, puis le cercle Γ de centre Ω et de rayon 2, et enfin les points A, B, C et D d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}, où :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = \overline{z_{\mathrm{B}}},\ z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}.$$

a) $\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}} = \sqrt{3}$.
b) D est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
c) Les points A, B, C et D appartiennent au même cercle Γ.
d) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation : $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$.

Les solutions de cette équation sont les affixes de deux points qui appartiennent tous les deux au cercle Γ.

Exercice 10

Le plan complexe a pour origine O. Soit M le point dont l'affixe a pour module 1 et pour argument $\dfrac{5\pi}{6}$.

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et on appelle h l'homothétie de centre O et de rapport -3.

a) On a : $\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)^6 = -1$.

b) L'image de M par la rotation r est le point M_1 de coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

c) L'image de M par l'homothétie h est le point M_2 dont l'affixe a pour module -3 et pour argument $\dfrac{5\pi}{6}$.

d) $r^3(M) = r \circ r \circ r(M)$ est le point M_3, symétrique de M par rapport à O.

Exercice 11

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite géométrique $(u_n(x))_n$ de premier terme $u_0(x) = 1$ et de raison $q = 1 - 2\mathrm{e}^{-x}$.

a) Dans le développement de $u_6(x) = (1-2\mathrm{e}^{-x})^6$, le terme correspondant à e^{-4x} est $240\mathrm{e}^{-4x}$.

b) Pour x fixé supérieur à 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

c) Pour un entier naturel n fixé, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$.

d) Un lanceur s'exerce à tirer sur une cible située à la distance x (x en mètres, $x \geqslant 1$). La probabilité qu'il atteigne sa cible est $p = 2\mathrm{e}^{-x}$. Le lanceur tire n fois vers la cible de façons supposées indépendantes.

La probabilité que ce lanceur atteigne k fois exactement la cible (k étant un entier compris entre 0 et n) est $\binom{n}{k} \times u_1^{n-k}(x) \times (1 - u_1(x))^k$.

Exercice 12

On note $x(t)$ le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive présents à l'instant t (exprimé en années) dans cette substance, et on admet que la vitesse d'élimination $x'(t)$ est proportionnelle à $x(t)$: il existe donc une constante réelle k, telle que $x'(t) = kx(t)$.

On appelle x_0 le nombre d'atomes présents à l'instant $t = 0$.
a) Le nombre d'atomes diminue quand t augmente, donc k est négatif.
b) ¿ chaque instant t, on a : $x(t) = x_0\mathrm{e}^{kt}$.
c) On note T la période (ou « demi-vie »), c'est-à-dire le nombre d'années pour lequel le nombre d'atomes a diminué de moitié par rapport à l'instant initial $t = 0$.
On a $\mathrm{T} = \dfrac{-\ln 2}{k}$.
d) A l'instant $t = 3T$, il reste le sixième des atomes dans la substance.

Exercice 13

La durée en années du bon fonctionnement d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire de loi exponentielle. Des tests garantissent une durée moyenne de 10 ans.
a) Le paramètre de la loi exponentielle est 10.
b) La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne correctement moins de 10 ans est $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
c) La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne pendant au moins 10 années est e^{-2}.
d) La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne entre 10 et 15 années est $\dfrac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1,5}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$.

Exercice 14

60 % des candidats au concours de la FESIC sont des filles. Parmi elles, 30 % ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.
Par ailleurs, 20 % des candidats sont des garçons qui ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.
a) On interroge un candidat au hasard. La probabilité que ce soit une fille qui ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 30 %.
b) On interroge un garçon qui est candidat. La probabilité qu'il ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 20 %.
c) 38 % des candidats ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.
d) On interroge un candidat qui a suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale. La probabilité qu'il s'agisse d'une fille est $\dfrac{9}{19}$.

Exercice 15

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ données par les équations paramétrées suivantes :

$$\mathscr{D}\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-1 \\ y & = & -3t+2,\ t\in\mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad \mathscr{D}'\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & t+2,\ t\in\mathbb{R} \\ z & = & 3t-2 \end{array}\right.$$

a) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.
b) On trouvera les points d'intersection éventuels entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2t-1 & = & 3t \\ -3t+2 & = & t+2 \\ t & = & 3t+2 \end{array}\right.$$

c) Le plan normal à $\mathscr{D}$ passant par O a pour équation : $2x-3y+z=0$.
d) $\mathscr{D}'$ est parallèle à tout plan normal à $\mathscr{D}$.

Exercice 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 4 ; −1), B(−2 ; 4 ; −5), C(1 ; 1 ; −5), D(1 ; 0 ; −4) et E(2 ; 2 ; −1).
a) Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-9=0$.
b) Le point E est le projeté orthogonal de D sur (ABC).
c) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
d) Le point Ω(−1 ; 2 ; −3) est le centre d'une sphère passant par A, B, C et D.

Concours d'entrée FESIC mai 2004

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal .
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a,\ b,\ c$ et d :

$$a=-2-2\mathrm{i}\qquad;\qquad b=2\qquad;\qquad c=2+4\mathrm{i}\qquad;\qquad d=-2+2\mathrm{i}.$$

a. ABCD est un parallélogramme.
b. Le point E, image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, est un point de l'axe des abscisses.
c. Soient $f=6\mathrm{i}-4$ et F le point d'affixe f.
Le triangle CDF est rectangle et isocèle en D.
d. Soient $g=-2\mathrm{i}$ et G le point d'affixe g.
Le triangle CDG est rectangle et isocèle en D.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal .
a. La partie réelle de $(1+2\mathrm{i})^5$ est 41.
b. On considère trois points quelconques A, B et C du plan d'affixes respectives $a,\ b$ et c.
L'écriture $(b-c)=\mathrm{i}(a-c)$ caractérise une homothétie de centre C et de rapport i.
c. $(1+\mathrm{i})^{20}$ est réel.
d. L'équation $z^4-1=0$ possède quatre solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal .
Soient A le point d'affixe $a=1-\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $b=2\mathrm{i}-3$.
À tout point M d'affixe $z,\ zb$, on associe le point M' d'affixe

$$Z=\frac{z-1+\mathrm{i}}{z+3-2\mathrm{i}}.$$

a. L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel est le segment [AB].
b. Pour tout z différent de $-3+2\mathrm{i}$ et de $-3-2\mathrm{i}$, on obtient la forme algébrique de Z par le calcul : $\dfrac{(z-1+\mathrm{i})(z+3+2\mathrm{i}}{(z+3-2\mathrm{i})(z+3+2\mathrm{i}}$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z tels que M' soit un point de l'axe des ordonnées est le cercle d'équation $(x+1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$, sauf le point B.

d. Soit z_0 une solution de l'équation $\dfrac{z-1+\mathrm{i}}{z+3-2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ (on admet l'existence d'une telle solution).
Le point M_0 d'affixe z_0 est un point de la médiatrice de [AB].

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

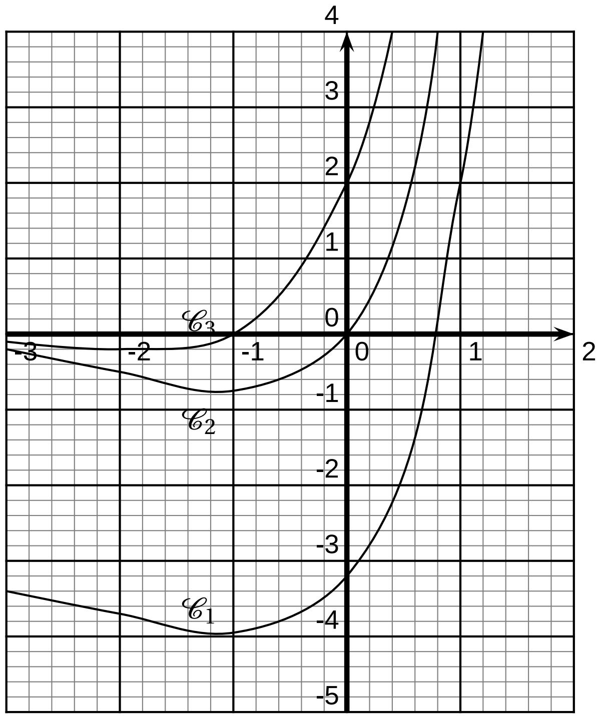
$$f(x) = \left\{\begin{array}{l}\mathrm{e}^x,\ \text{si}\quad x < 0\\ \cos x,\ \text{si}\quad x \geqslant 0\end{array}\right.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan. Soit Γ la représentation graphique de la fonction exponentielle $(x \longmapsto \mathrm{e}^x)$ dans le même repère.
a. Dans la portion du plan correspondant aux points d'abscisses négatives, $\mathscr{C}_f$ est l'image de Γ par la symétrie axiale dont l'axe de symétrie est l'axe des abscisses.
b. f est continue en 0.
c. f est dérivable en 0.
d. L'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,\pi]$.

EXERCICE 5

On donne ci-dessous la représentation graphique de trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. L'une d'elles est la représentation d'une fonction, les deux autres sont les représentations de deux de ses primitives. On note :

- f_1 la fonction représentée par $\mathscr{C}_1$;
- f_2 la fonction représentée par $\mathscr{C}_2$;
- f_3 la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$;

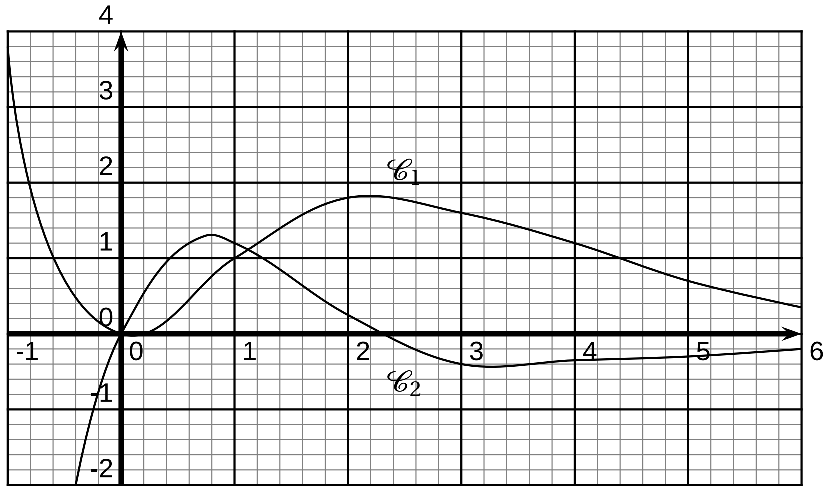


a. f_1 est une primitive de f_2.
b. f_3 est la dérivée de f_1.
c. On considère la surface plane limitée par la courbe $\mathscr{C}_3$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$. L'aire, en unités d'aire, de cette surface est $f_2(-1)$.
d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient M_1 le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M_2 le point de $\mathscr{C}_2$ de même abscisse.
La distance M_1M_2 est constante.

EXERCICE 6

On donne ci-dessous la représentation graphique de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
- $\mathscr{C}_1$ représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$;
- $\mathscr{C}_2$ représente la fonction f', dérivée de f.

On appelle f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la dérivée de f'.



a. Toute primitive de f est croissante sur [-1 ; 6].
b. La courbe représentant la fonction f'' passe par le point de coordonnées (0 ; 0).
c. La fonction f'' s'annule trois fois sur $[-1\ ;\ 6]$.
d. On considère la surface plane limitée par la courbe $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
L'aire de cette surface est égale à celle d'un carré unité.

EXERCICE 7

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+*$ par :

$$f(x) = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$$

La dérivée f' de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}*$ par : $f'(x) = 2\sin(\ln x)$.
b. $7\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 2\ln\left(3+\sqrt{2}\right) - \ln\left(11+6\sqrt{2}\right) + 7\ln\left(\sqrt{2}-1\right) = 0$.
c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$.
d. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 4 - 2\sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 8

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. L'image de $\mathbb{R}$ par f est $]0\ ;\ 1]$.
b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant g(x) \leqslant x^2 - x$.
c. Dans un repère du plan et pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0)$ représente l'aire de la surface plane limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0^2$.
d. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f\left(x^2\right) - f(x)$.

EXERCICE 9

Soient $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes tous strictement positifs.
Pour les items **a., b.** et **c.**, on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
a. l est strictement positif.
b. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l soit une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.
c. La suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers $\ln l$.
d. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour $n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = \ln u_n$ et que $u_0 > u_1$.
On ne suppose pas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

EXERCICE 10

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe d'origine O.
a. La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, les triangles $\mathrm{O}M_nM_{n+1}$ sont rectangles.
c. M_n appartient à l'axe des abscisses si et seulement si n est un multiple de 4.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

EXERCICE 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormal .
On considère, dans ce repère, les points A$(1\ ;\ -1)$, B$(5\ ;\ 3)$ et I milieu de [AB].
Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :
- $\mathrm{G}_0 = \mathrm{O}$;
- Pour $n \in \mathbb{N}, \quad G_{n+1}$ est le barycentre du système $\{(G_n\ ;\ 2)\ ;\ (\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ 1)\}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $(x_n\ ;\ y_n)$ les coordonnées de G_n.
a. G_1, G_2 et G_3 sont alignés.
b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad G_{n+1}$ est l'image de G_n par l'homothétie de centre I et de rapport 2.
c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = x_n - 3$, est une suite géométrique de premier terme -3 et de raison $\frac{1}{2}$.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_n = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

EXERCICE 12

On considère une droite graduée Δ d'origine O.
On considère la suite de points $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :
- G_0 a pour abscisse 0 et,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad G_{n+1}$ est le barycentre du système $\{(G_n\ ;\ 2)\ ;\ (H_n\ ;\ 3)\}$;

et la suite de points $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :
- H_0 a pour abscisse 1 et,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad H_{n+1}$ est le barycentre du système $\{(G_n\ ;\ 3)\ ;\ (H_n\ ;\ 2)\}$.

On appelle respectivement $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites obtenues en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad g_n$ l'abscisse de G_n et h_n l'abscisse de H_n.
a. La suite $\left(g_n - h_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{5}$.
b. La suite $\left(g_n + h_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
c. Les deux suites $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
d. Les suites $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

EXERCICE 13

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On effectue n tirages successifs d'une boule, avec remise intermédiaire.
On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle p la probabilité associée â cette expérience.
On définit de plus les évènements suivants :
- On appelle A_n, l'évènement : « Les $n-1$ premiers tirages ont donné la même boule et la n-ième boule tirée est différente des précédentes » ;
- Lorsque k est un entier compris entre 1 et n, on appelle B_k, V_k et R_k les évènements respectivement associes au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du k-ième tirage.

a. $p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) = 1 - p\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) - p\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right)$.
b. $p\left(A_2\right) = \dfrac{2}{3}$.
c. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $p\left(A_n\right) = \dfrac{2}{3^{n-1}}$.
d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[p\left(A_2\right) + p\left(A_3\right) + \ldots + p\left(A_n\right)\right] = \dfrac{1}{3}$.

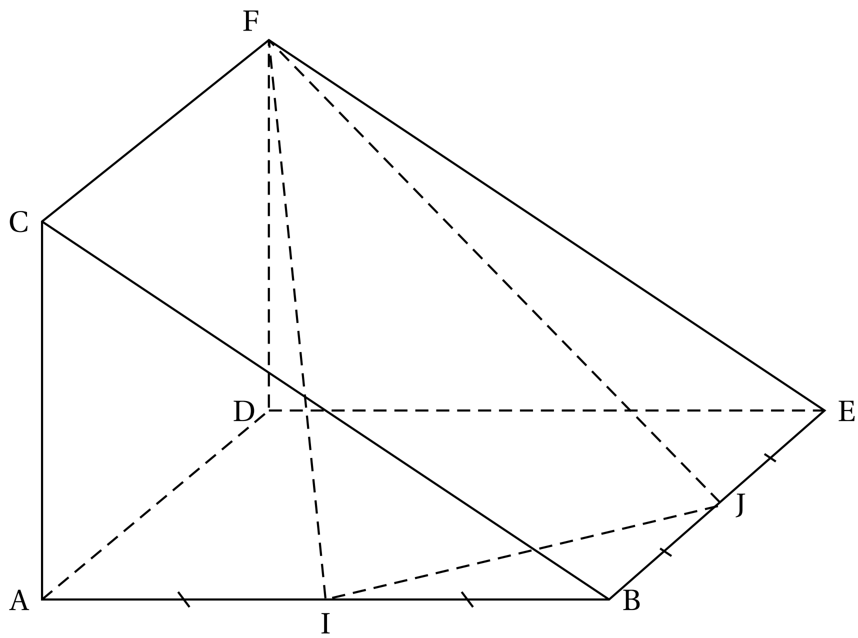
EXERCICE 14

La durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On utilisera, pour les calculs, l'approximation $\ln 2 \approx 0,7$.
a. La densité de probabilité associée à cette loi est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
- $f(t) = 0$ si $t \notin [0~;~5]$ et
- $f(t) = 5\text{e}^{-5t}$ si $t \in [0~;~5]$.

b. On suppose que 50 % des clients ont été dépannés durant la garantie. La durée de cette garantie est de 3 ans et demi environ.
c. On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manières indépendantes et on appelle X le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.
La probabilité d'avoir $X \geqslant 1$ est $p(X \geqslant 1) = \text{e}^{-4}$.
d. On considère à nouveau un lot de 10 moteurs fonctionnant de manières indépendantes et on appelle X de la même façon qu'au **c.**, le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.
L'espérance de la variable aléatoire X est $\text{E}(X) = 10\text{e}^{\frac{-2}{5}}$.

EXERCICE 15

On considère le prisme ABCDEF ci-dessous.
Sur ce prisme, I est le milieu de [AB], J est le milieu de [BE], et ABED et ADFC sont des carrés.



On rapporte l'espace au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AC}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle G_n le barycentre du système $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(E\,;\,1)\,;\,(D\,;\,n)\}$.
(On notera que G_n existe quel que soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $1+1+1+n \neq 0$.)

a. Le plan (IJF) est l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que : $2x - +3z - 1 = 0$.

b. La droite Δ passant par D et orthogonale au plan (IJF) est l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que :

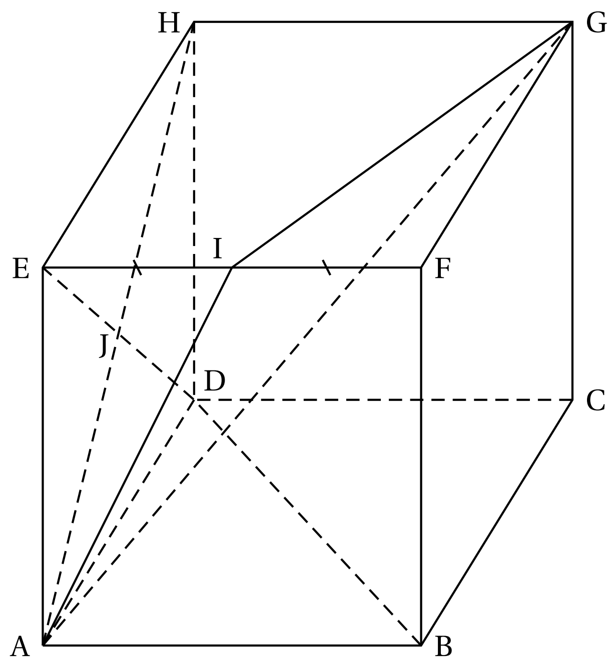
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+k \\ y & = & 1-k \\ z & = & \dfrac{3}{2}k \end{array}\right., \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

c. G_3 appartient au segment [BD].

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}+n\overrightarrow{MD}\right\| = n+3$ est la droite (BD).

EXERCICE 16

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous, où I est le milieu de [EF] et J est le centre de la face ADHE.



On rapporte l'espace au repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

a. L'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $y = -x + 1$ est le plan (DBH).

b. Le plan (AIG) est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que : $2x - y - z = 0$.

c. La droite (BJ) est orthogonale au plan (AIG).

d. La distance, en unités de repère, de B au plan (AIG) est 2.

Concours Fesic mai 2005

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. + 1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère la fonction f qui, à tout complexe z non nul, associe le complexe : $z' = f(z) = \left(\dfrac{z}{|z|}\right)^2$.

Soient $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $z' = f(z)$. On appelle M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'affixe z et M' le point de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ d'affixe z'.

a. On a $x' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

b. $z' \in \mathbb{R}$ si et seulement si M appartient à l'axe des ordonnées.

c. $\left[f(1+\text{i})\right]^8$ est un nombre réel.

d. Il existe un et un seul point M tel que M et M' soient confondus.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On considère les points A, J, K et M d'affixes respectives $z_A = 1 + \text{i}$, $z_J = \text{i}$, $z_K = 2 + \text{i}$ et $z_M = 1 + \text{i}m$. Soit N le symétrique de M par rapport à A.

a. Le point N a pour affixe $1 + \text{i}(2 - m)$.

b. Quel que soit $m \in \mathbb{R}^*$, K est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{JM}$.

c. Il existe une valeur de m et une seule telle que K soit l'image de J par la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

d. Soit $m = 2$. Pour prouver que les droites (OA) et (MK) sont perpendiculaires, il faut et il suffit de prouver que $z_A(z_K - z_M) = 0$.

EXERCICE 3

On appelle z le complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$ et on pose $t = \dfrac{1-\text{i}}{\sqrt{2}}$.

a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. t^n est un nombre réel si et seulement si n est un multiple de 4.

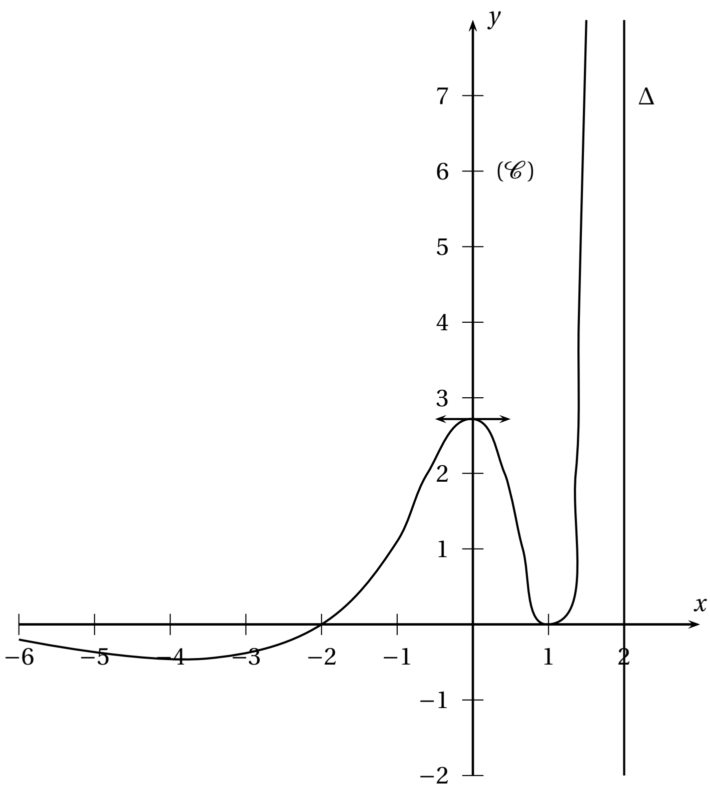
b. $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z^2}{\overline{t}^3}$.

c. La partie réelle de z^{10} est -2^9.

d. $1 + t + t^2 + \cdots + t^8 = 1$.

EXERCICE 4

On considère la courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, la droite $\Delta : x = 2$ et l'axe des abscisses étant asymptotes à $(\mathscr{C})$. On appelle f la fonction représentée par $(\mathscr{C})$ et g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.



a. g est définie sur $]-2\ ;\ 2[$.

b. g est dérivable en 0 et $g'(0) = \dfrac{1}{\text{e}}$.

c. L'équation $g(x) = 1$ possède exactement deux solutions.

d. $\lim\limits_{x \to 0} g \circ g(x) = -\infty$.

EXERCICE 5

a. Soit f la fonction définie sur $\text{I} = \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \ln(\cos x) - \cos(\ln x)$. f est dérivable sur I et, pour tout $x \in \text{I}$, $f'(x) = -\tan x + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b. Soit $x \in [-1\ ;\ 2]$. On a $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{2x+1}{x^2+1} \leqslant 1$.

c. La courbe représentant la fonction $x \to \ln(2x-6)$ dans un repère du plan se déduit de la courbe représentant $x \to \ln x$ par une translation d'un vecteur de coordonnées $(3\,;\,2)$.

d. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{e}^{-x^2 \sin x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x\,[2\sin(\pi + x) + x\cos(\pi + x)]\,\text{e}^{-x^2 \sin x}$.

EXERCICE 6

a. On considère le raisonnement suivant :

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \geqslant 1+nx$. En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ on obtient $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant 1+\sqrt{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n}\right) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = +\infty$. » Ce raisonnement est exact.

b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ et on considère le raisonnement suivant :

« f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, comme $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0 = f(0)$, c'est que f est continue en 0. Il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ ». Ce raisonnement est exact.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathrm{D} =]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

On considère le raisonnement suivant :

« f est définie et dérivable sur D car composée par des fonctions définies et dérivables sur D. Pour $x \in \mathrm{D}$ on peut écrire : $f(x) = x[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$ et on obtient alors

$$f'(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1) + x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.»$$

Ce raisonnement est exact.

d. Soit $P(n)$ la phrase définie sur $\mathbb{N}$ par : « 4^n+1 est divisible par 3. » On considère le raisonnement suivant :

« Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie. Montrons que $P(n_0+1)$ est vraie. Puisque $P(n_0)$ est vraie, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^{n_0}+1 = 3k$. On a alors $4^{n_0+1}+1 = 4\times 4^{n_0}+1 = 3\times 4^{n_0}+4^{n_0}+1 = 3\times 4^{n_0}+3k = 3\left(4^{n_0}+k\right)$.

Ceci prouve que $4^{n_0}+1$ est un multiple de 3 et donc que $P(n_0+1)$ est vraie. On en déduit que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. » Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = -2$.

b. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

c. Pour $x \in]-1\ ;\ 1[$ et $x \neq 0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ existe et vaut $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

d. Soient g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(x) = f(|x|)$ et (Γ) la courbe représentant g dans le même repère que $(\mathscr{C})$. On déduit (Γ) à partir de $(\mathscr{C})$ par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 8

E désigne la fonction « partie entière ». Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$.

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f \circ E(x) = 0$.

b. $\displaystyle\int_0^4 E(x)\,\mathrm{d}x = 6$.

c. Il existe une et une seule valeur réelle x telle que $f(x) = -x$.

d. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'aire de la portion de plan située entre les droites d'équation $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $x = \mathrm{e}$, $y = 0$ et la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

a. f est définie sur $]-1\,;\,1[$.

b. f est croissante sur $]-1\,;\,1[$.

c. $f(0) = 1$.

d. f est une fonction paire.

EXERCICE 10

Pour tout entier n, $n \geqslant 3$, on désigne par u_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant n côtés.
On appelle u la suite ainsie définie pour $n \geqslant 3$, de terme général u_n.

a. $u_5 = 6$ et $u_6 = 10$.

b. Pour tout entier n, $n \geqslant 3$, on a $u_{n+1} = u_n + n - 1$.

c. La suite u est une suite arithmétique de raison $n-1$.

d. Pour tout entier n, $n \geqslant 3$, on a : $u_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

EXERCICE 11

On considère les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = \sqrt{2}, N u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

a. Soit w la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - u_n$. La suite w est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

c. La suite v est décroissante.

d. Les deux suites u et v convergent et ont la même limite.

EXERCICE 12

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4-u_n}$.

Soit v la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$. On considère enfin la suite w définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = \ln(v_n)$. On admet que u, v, w sont bien définies.

a. Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.

b. w est une suite arithmétique dont la raison est égale au premier terme.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$; $\ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n) = -(n+1)(n+2)\ln\left(\sqrt{3}\right)$.

d. La suite u est convergente.

EXERCICE 13

Un sondage fait état de l'intérêt d'un certain nombre de personnes sur la lecture de trois revues, appelées A, B et C. Tous les chiffres cités ci-dessous font référence à ces personnes sondées.
Parmi les personnes interrogées, 75 lisent A, 58 lisent B et 60 lisent C. On sait de plus que 18 lisent A et B, 18 lisent B et C et 15 lisent A et C. Enfin 3 personnes lisent les trois revues et 5 personnes ne lisent aucune de ces revues.
Par ailleurs, et parmi les personnes qui ne lisent que la revue A, 20 sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue B, les deux-cinquièmes sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue C, il y a moitié-moitié d'hommes et de femmes.

a. 150 personnes ont été sondées.

b. 100 personnes lisent une et une seulement de ces trois revues.

c. On interroge au hasard une personne du sexe masculin qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.

d. On interroge au hasard une personne qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.

EXERCICE 14

Un feu tricolore de circulation reste 55 secondes au vert et 5 secondes à l'orange, temps pendant lesquels un piéton ne peut pas traverser. Puis il reste 60 secondes au rouge, temps pendant lequel un piéton peut traverser. Dans l'exercice, on ne s'intéresse qu'aux seuls piétons qui se présenteraient pour traverser à ce feu tricolore entre 8 h 00 et 8 h 05.
À 8 h 00, ce feu se met au rouge. On appelle T la variable aléatoire qui donne, en secondes, le temps écoulé entre 8 h 00 et l'heure d'arrivée devant ce feu d'un piéton qui souhaite traverser. On admet que T suit une loi uniformément répartie sur l'intervalle $[0\,;\,300]$.

a. La densité de probabilité associée à T est la fonction f ainsi définie :

$f(t) = \dfrac{1}{3}$ si $t \in [0\,;\,60[$ ou si $t \in [120\,;\,180[$ ou si $t \in [240\,;\,300[$; $f(t) = 0$ dans les autres cas.

b. La probabilité qu'un piéton attende moins de 10 secondes est $\dfrac{2}{3}$.

c. La probabilité qu'un piéton attende plus de 40 secondes est $\dfrac{2}{15}$.

d. Entre 8 h 00 et 8 h 05, 10 piétons se présentent à ce feu tricolore. La probabilité que 3 d'entre eux exactement aient attendu moins de 10 secondes est $\dfrac{2^3}{3^{10}}$.

EXERCICE 15

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit (D) la droite définie pour $t \in \mathbb{R}$ par : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3t+1 \\ y & = & -4t+3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$. Lorsque $t \in [0\,;\,1]$, l'ensemble des points M

de (D) décrivent un segment ; soient A et B les extrémités de ce segment, A étant le point dont les coordonnées sont toutes positives. Soit (S) la sphère de diamètre [AB]. Soient (P) le plan d'équation $x-y-z+3=0$ et C le point de coordonnées (3 ; 3 ; 3).

a. Une équation cartésienne de (D) est $\dfrac{1-x}{3}=\dfrac{3-y}{4}=z-1$.

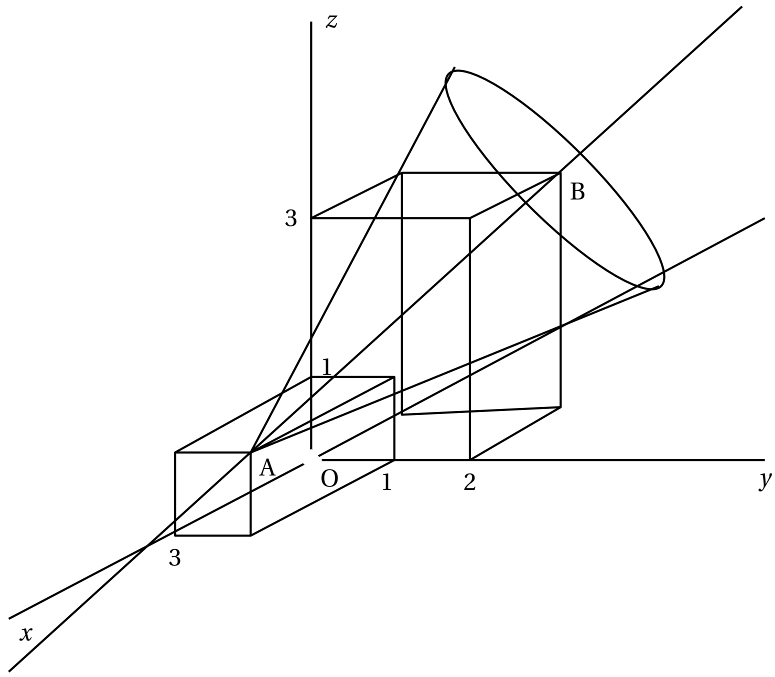
b. Le plan (P) contient la droite (D).

c. Une équation de (S) est donnée par $(x-1)(x+2)+(y-3)(y+l)+(z-1)(z-2)=0$.

d. Soit G le barycentre de $\{(\mathrm{A},1)\ ;\ (\mathrm{B},-1)\ ;\ (\mathrm{C},-1)\}$ (on notera que G existe puisque la somme des coefficients n'est pas nulle). Le triangle GAC est isocèle.

EXERCICE 16

Le schéma ci-dessous représente une situation de l'espace dans un repère approprié.



On appelle (P) le plan perpendiculaire à (AB) passant par B et on appelle (C) le cône de sommet A et dont la base est le disque de centre B et de rayon 2.

a. Une équation de (P) est : $5x-y-2z+18=0$.

b. La distance de A à (P) est $\sqrt{30}$ en unités de repère.

c. On considère le raisonnement suivant : « Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace. M appartient à (AB) s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Dans ce cas, on a $\left\{\begin{array}{rcl} x-3 &=& -5t\\ y-1 &=& t\\ z-1 &=& 2t\end{array}\right.$. On en déduit $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3-5t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ »
Ce raisonnement donne de façon nécessaire et suffisante une équation paramétrique de la droite (AB).

d. L'intersection de (C) et du plan $(y\mathrm{O}z)$ est un disque.

Concours Fesic mai 2006

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.
+1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit la fonction f qui, à tout point M d'affixe z, z différent de 1, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{2z+1}{z-1}.$$

1. f possède deux points invariants conjugués.
2. L'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est l'axe des abscisses.
3. L'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' = 2$ est un cercle.
4. À tout point M' du plan d'affixe z', on peut associer un point M d'affixe z tel que $f(M) = M'$ sauf au point M' d'affixe $z' = 2$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les complexes z_1 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \overline{z_1}$ et $z_3 = 1 + \mathrm{i}$.

1. $\left|\dfrac{z_3^8 \times z_1^9}{z_2^{11}}\right| = 4.$
2. $\dfrac{z_1^4 \times z_2^7}{z_3^6}$ est un nombre réel.
3. $(z_1 - z_3)^4 = 28 - 16\sqrt{3}$.
4. L'ensemble des points M d'affixe z telles que $\arg(z) = \arg(z_3)$ est la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 3

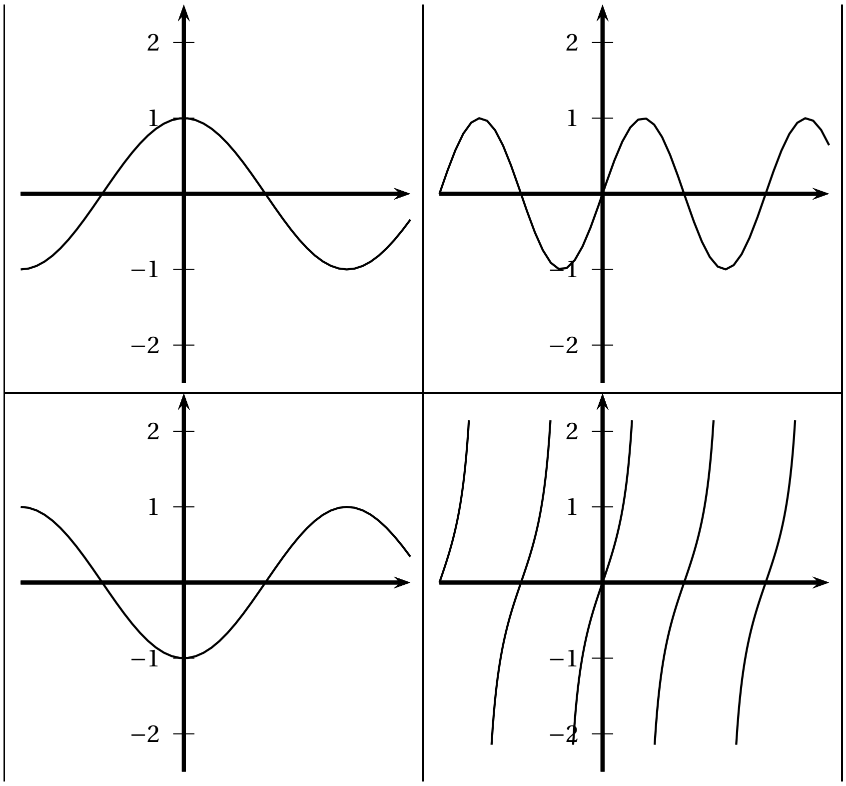
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $a = 5 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. On appelle :

— B le point d'affixe b, image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
— C le point d'affixe c, milieu de [OA],
— D le point d'affixe d donnée par $d - c = \frac{1}{2}(b - a)$,
— E le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

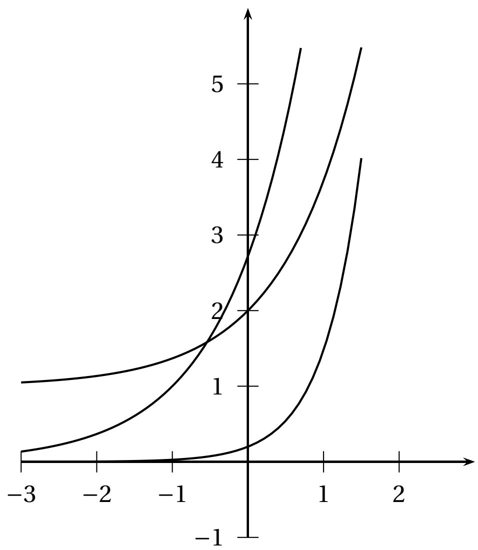
1. Le point B a pour affixe $b = 3\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
2. D est le milieu de [OB].
3. E est le barycentre de {(B, 1) ; (C, 2)}.
4. La droite (OE) est perpendiculaire à (AB).

EXERCICE 4

1. La courbe représentant la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est la courbe $\mathscr{C}_2$.



2. On considère les trois courbes ci-dessous : la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1}$ est $\mathscr{C}_1$.

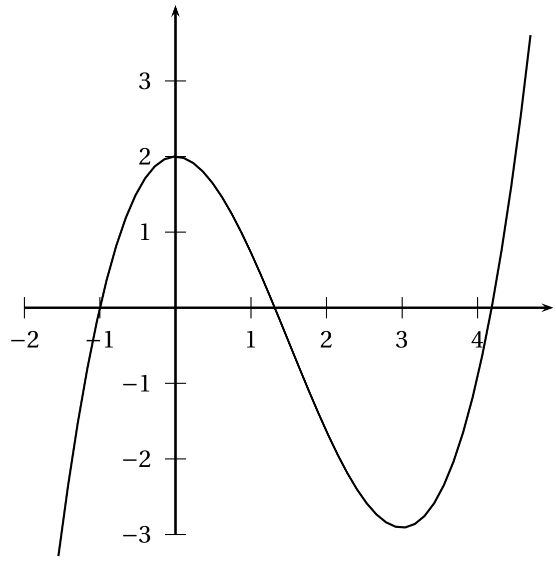


3. On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous et la fonction F définie sur $[0\,;\,4]$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

F est croissante sur $[0\,;\,4]$.

4. On considère les mêmes fonctions f et F qu'au **c**.
La fonction F est deux fois dérivable sur $[0\,;\,4]$ et vérifie $F''(0) = 0$.



EXERCICE 5

1. Soient $f,\ g$ et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$.
   Alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et cette limite est comprise entre 3 et 5.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère du plan. $(\mathscr{C})$ possède une asymptote d'équation $x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x>0}} f(x) = 0$.
3. La fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x}{2}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soient f la fonction définie par $f(x) = 2\ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
   $(\mathscr{C})$ possède au point d'abscisse -1 une tangente d'équation $y = -2x - 2$.

EXERCICE 6

1. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On veut prouver que la suite u est convergente. On considère pour cela le raisonnement suivant :
   « Je choisis $m = 0$ et $M = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1\ ;\ n]$, on a $t^2 \geqslant t$, donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. . Il s'ensuit que $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, soit $0 \leqslant u_n \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n$, soit enfin $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n} \leqslant 1$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite apparaît bornée par $m = 0$ et $M = 1$.
   Soit de plus $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $[1\ ;\ n]$. u_n représente donc l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = 1,\ x = n,\ y = 0$ et la courbe représentant cette fonction. Cette aire augmente quand n augmente, ce qui se traduit par le fait que la suite u est croissante.
   Conclusion : u est croissante et majorée par 1 donc la suite u est convergente. »
   Ce raisonnement est exact.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\ln 2]$ par : $f(x) = (2x-1)\text{e}^x$. On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère du plan. On cherche à calculer l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = \ln 2$, $y = 0$ et la courbe $(\mathscr{C})$.
On considère pour cela le raisonnement suivant (et le renseignement $\ln 2 \approx 0,7$) :
« La fonction F définie par $F(x) = (2x-3)\text{e}^x$ est une primitive de f sur $[0\,;\,\ln 2]$. F est en effet dérivable sur $[0\,;\,\ln 2]$ et $F'(x) = 2\text{e}^x + (2x-3)\text{e}^x = (2x-1)\text{e}^x$.
On a : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\text{d}x = \left[(2x-3)\text{e}^x\right]_0^{\ln 2} = (2\ln 2-3)\times 2-(-3) = 4\ln 2-3 \approx -0,2$.
Comme le résultat est négatif, c'est que l'aire cherchée est la valeur absolue de ce résultat, soit 0,2 unité d'aire ».
Ce raisonnement est exact.

3. Soit f la fonction définie sur par $f(x) = (1+x)^{10}$. On cherche une approximation de $f(0,001)$. On considère pour cela le raisonnement suivant :
« f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour x réel, $f'(x) = 10(1+x)^9$ et la courbe représentant f possède une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = xf'(0)+f(0)$, soit $y = 10x+1$. On en déduit que $f(0,001) \approx 10\times 0,001+1$, soit $f(0,001) \approx 1,01$. »
Ce raisonnement est exact.

4. Soit D l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\sin x \neq 0$. Soit f la fonction définie sur D par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. On veut prouver que f est décroissante sur D. On considère pour cela le raisonnement suivant :
« f est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont dérivables sur D et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. On en déduit que f est dérivable sur D.
Pour $x \in$D , on a $f'(x) = \dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$. Pour tout $x \in$ D, on a $f'(x) < 0$. Comme le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction, c'est que f est strictement décroissante sur D. »
Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = \text{e}^{-x}\sin x$.
Soit f la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin x \cos x$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f'(x)\,\text{d}x = \frac{1}{2}\text{e}^{-n\pi}\left(\text{e}^{-\pi}+1\right)$.

3. f est l'unique solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.

4. Si g est une solution de (E), la courbe représentant g possède une tangente au point d'abscisse 0 dont une équation est donnée par $y = (1-2x)g(0)$.

EXERCICE 8

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+2}{5x}\right)$. On appelle D_f l'ensemble de définition de f.

1. $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit g une fonction définie et dérivable sur $D_g = \mathbb{R} - \left\{0\ ;\ \dfrac{-2}{3}\right\}$ telle que quel que soit $x \in D_g$, $g'(x) = \dfrac{3}{3x+2} - \dfrac{1}{x}$. f et g sont égales à une constante additive près.
3. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = -\frac{2}{5}$.
4. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x f(x) = 0$.

EXERCICE 9

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \text{e}^{3x}$,
$f_2(x) = -\lambda^2\text{e}^x + 2\lambda\text{e}^{2x}$. On appelle $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

1. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent au point A$(\ln\lambda\ ;\ 3\lambda)$.
2. Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$.
3. Il existe un point B en lequel $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ possèdent la même tangente.
4. Lorsque λ est supérieur à 1, l'aire de la portion du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et limitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln\lambda$ est, en unités d'aire, $\dfrac{(\lambda-1)^3}{3}$.

EXERCICE 10

On considère une suite v strictement croissante dont tous les termes appartiennent à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
On définit les suites c et s pour $n \in \mathbb{N}$ par $c_n = \cos(v_n)$ et $s_n = \sin(v_n)$.

1. La suite v converge vers π.
2. La suite c est croissante.
3. La suite s est périodique.
4. Les suites c et s sont adjacentes si et seulement si la suite v converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la suite (z_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = \text{e}^{\text{i}\frac{2n\pi}{3}}$ et on appelle A_n le point d'affixe z_n.

1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, A_n appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
2. Quel que soit $n \in \mathbb{N}, |z_{n+1} - z_n| = |z_1 - 1|$.
3. La suite (z_n) est périodique de période 5.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} = z_0 + z_1 + \cdots + z_4 = 0$.

EXERCICE 12

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)u_n$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.
2. La suite u est croissante.

3. Quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, si on a $n \geqslant 2$, alors on aura : $0 \leqslant u_n \leqslant 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.
4. La suite u est convergente et de limite nulle.

EXERCICE 13

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega,\ p)$ dans lequel un évènement A a les trois possibilités A_1, A_2, et A_3 deux à deux distinctes de se produire et un évènement B a les deux possibilités B_1 et B_2 distinctes de se produire. Le tableau suivant donne en pourcentages la probabilité de certains évènements de se produire par rapport à l'univers Ω.

	A_1	A_2	A_3	Total / A
B_1		20		
B_2	30			
Total / B			10	100

On donne aussi les renseignements suivants : $p(A_2) = 60\,\%$ et $p_{B_1}(A_3) = \frac{1}{6}$.

1. A_1 et B_1 sont incompatibles.
2. La probabilité d'obtenir B_1 est 24 %.
3. Si A_3 est réalisé, la probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.
4. La probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.

EXERCICE 14

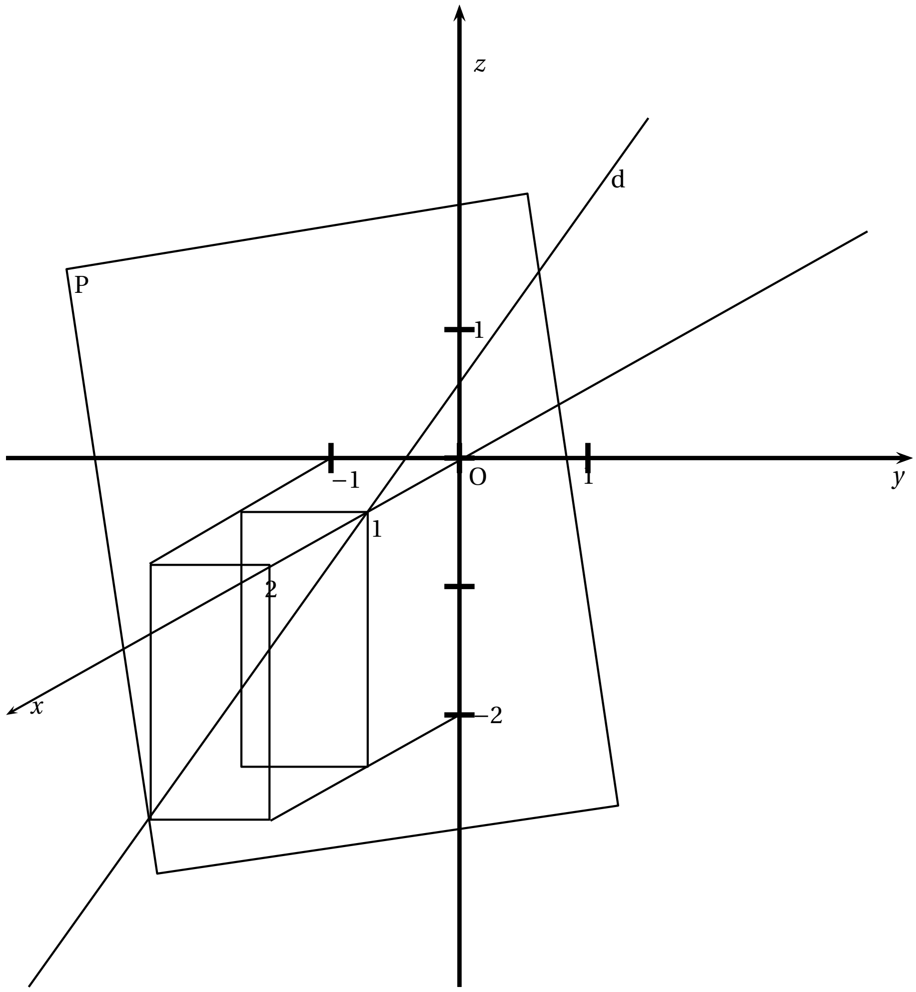
Une rampe lumineuse est constituée d'ampoules bleues, rouges ou jaunes provenant de deux usines U_1 et U_2. U_1 produit 60 % de ces ampoules. La durée de vie en années de chacune de ces ampoules suit une loi exponentielle dont les paramètres sont les suivants :

	Ampoules bleues	Ampoules rouges	Ampoules jaunes
Ampoules de U_1	$\lambda_{B_1} = 0,25$	$\lambda_{R_1} = 0,20$	$\lambda_{J_1} = 0,15$
Ampoules de U_2	$\lambda_{B_2} = 0,20$	$\lambda_{R_2} = 0,15$	$\lambda_{J_2} = 0,10$

1. La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans sachant qu'elle vient de U_1 est $0,6\left(1 - e^{-1}\right)$.
2. La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans est $1 - 0,6e^{-1,25} - 0,4e^{-1}$.
3. La probabilité qu'une ampoule jaune dure entre 5 et 10 ans est $0,6\left(e^{-0,75} - e^{-1,5}\right) + 0,4\left(e^{-0,5} - e^{-1}\right)$.
4. La demi-vie en années d'une ampoule jaune de U_2 est $4\ln 2$.

EXERCICE 15

Le schéma ci-dessous représente une situation de l'espace dans un repère approprié dont le centre est un point O. On sait que la droite d est orthogonale au plan P. On appelle A le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ -2)$. P



1. Le plan P a pour équation cartésienne $x - y - 2z - 1 = 0$.

2. La droite d a pour équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -2t \\ y & = & 1 + 2t \\ z & = & 2 + 4t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

3. La demi-droite [OA) a pour équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2 + 2t \\ y & = & -1 - t \\ z & = & -2 - 2t \end{array}\right.$

4. La sphère de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$ est cachée par P.

EXERCICE 16

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par P et Q les plans d'équations respectives P : $\left\{\begin{array}{l c l} y - x & = & \sin^2\theta \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$,

Q : $\left\{\begin{array}{l c l} z - y & = & \cos^2\theta \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$.

On appelle Δ la droite d'intersection de ces deux plans.

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les plans P et Q sont orthogonaux.

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est contenue dans le plan d'équation $\left\{\begin{array}{l c l} z - x & = & 1 \\ y & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est orthogonale au plan d'équation $x + y + z = 0$.
4. Il existe un réel θ tel que Δ soit parallèle au plan $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

∽ Concours Fesic mai 2007 ∾

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.
+ 1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère les points A d'affixe i, M d'affixe z et M' d'affixe z' avec $z \neq z'$.
On appelle : h l'homothétie de centre A et de rapport 2, t la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ et r la rotation de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Si $M' = h(M)$, alors $z' = 2z - \text{i}$.
2. Si $M' = t(M)$, alors $z' = z - \text{i}$.
3. Si $M' = r(M)$, alors A appartient à la médiatrice de $[MM']$.
4. Soit B le point d'affixe $4 - 3\text{i}$. Le point $B' = r(\text{B})$ a pour affixe $3 + 4\text{i}$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -\sqrt{5} + \text{i}\sqrt{15}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un argument de a^n est $\dfrac{2n\pi}{3}$.
2. O appartient à la médiatrice de [AB].
3. OAB est un triangle rectangle en O.
4. Le cercle circonscrit à OAB a pour rayon 3.

EXERCICE 3

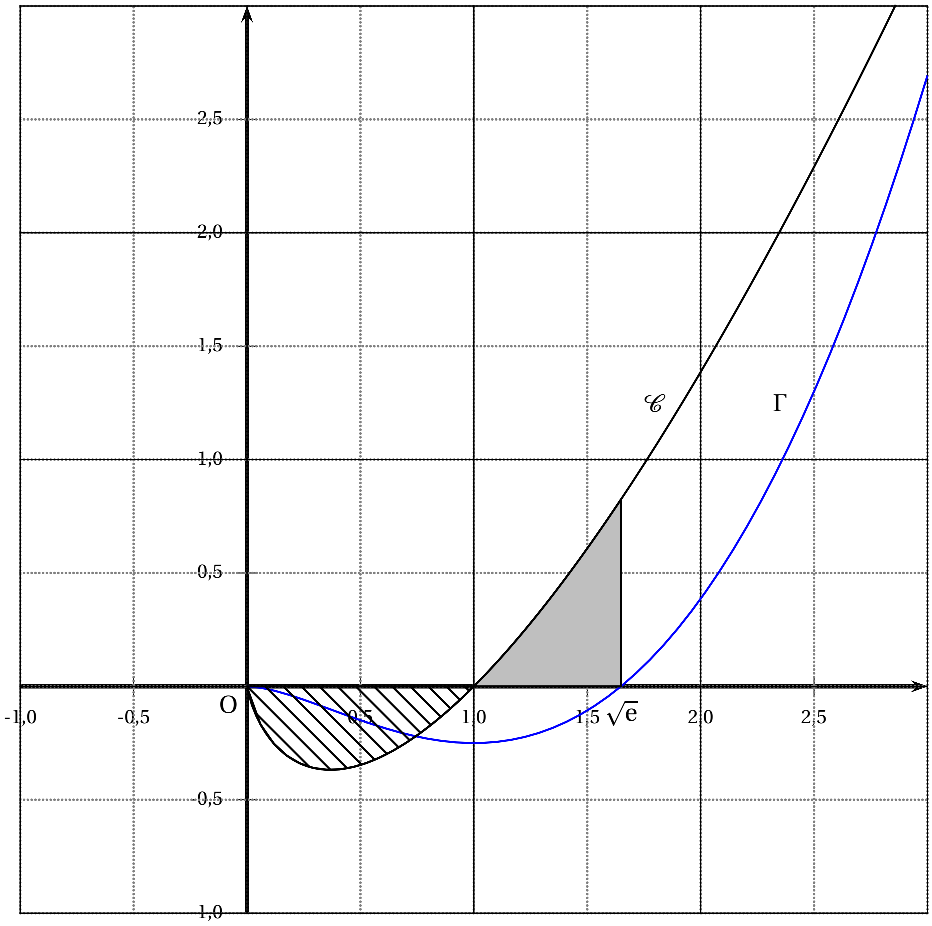
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et 2i.
On désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixes z telles que $|z - 2\text{i}| = |z - 1|$ et par (F) l'ensemble des points M, distincts de A et B, d'affixes z telles que
$\arg\left(\dfrac{z - 2\text{i}}{z - 1}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

1. (E) est un cercle.
2. Les points M de (F) décrivent un cercle sauf deux points.
3. Le point C d'affixe $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ appartient à (E) et (F).
4. (F) est aussi l'ensemble des points M tels que le complexe $Z = \dfrac{z - 2\text{i}}{z - 1}$ soit un nombre imaginaire pur.

EXERCICE 4

On donne les deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ ci-dessous.

L'une de ces courbes représente une fonction f définie et continue sur $[0\ ;\ +\infty[$; l'autre représente une primitive F de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On admettra que Γ possède l'axe des abscisses pour tangente en O(0, 0) et que $\mathscr{C}$ possède l'axe des ordonnées pour tangente en ce même point.



1. Γ est la courbe qui représente f.

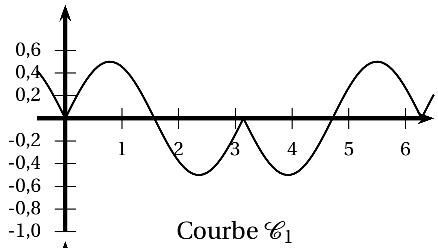
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. L'aire de la surface hachurée est la même que celle de la surface grisée.

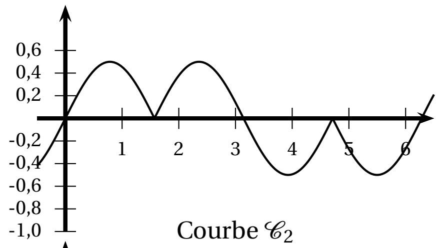
4. F est deux fois dérivable en 0 et $F''(0) = 0$.

EXERCICE 5

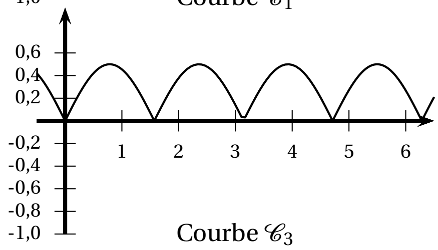
On considère quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$. On appelle respectivement $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ les courbes représentatives de ces fonctions.



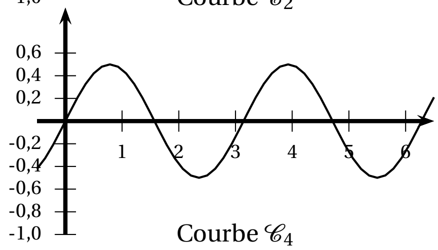
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



Courbe $\mathscr{C}_4$

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = f(x)$.
2. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |f(x)|$.
3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) + h(x) - k(x) = 0$.
4. $\mathscr{C}_4$ représente la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$, associe $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

EXERCICE 6

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par : $f(x) = x\sqrt{x}$. On cherche à savoir si f est dérivable en 0.

   On tient pour cela le raisonnement suivant :

   « f est le produit de la fonction $x \longmapsto x$ avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont définies et continues sur $[0\ ;\ +\infty]$, mais la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Il s'ensuit que f n'est pas dérivable en 0 en tant que produit de deux fonctions dont l'une n'est pas dérivable en 0. »

   Ce raisonnement est exact.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n entier par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$. On admet que cette suite est bien définie ($u_n \neq 0$) et qu'elle est convergente. On appelle ℓ sa limite. On cherche à savoir si ℓ est un nombre rationnel ou non. Pour cela on tient le raisonnement suivant :

   « Soit $P(n)$ la phrase « u_n est un nombre rationnel ».

   Initialisation : $u_0 = 1$ est un nombre rationnel donc $P(0)$ est vraie.

   Soit p entier tel que $P(p)$ soit vraie. Montrons que $P(p+1)$ est vraie.

   D'après l'hypothèse de récurrence u_p est un nombre rationnel, il en est de même de $\dfrac{2}{u_p}$ ainsi que de $u_{p+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_p + \dfrac{2}{u_p}\right)$. Il s'ensuit que u_{p+1} est rationnel donc $P(p+1)$ est vraie.

   Conclusion : de ces deux assertions et d'après le principe de raisonnement par récurrence je déduis que pour tout n entier $P(n)$ est vraie. ℓ est alors la limite d'une suite de nombres rationnels, donc ℓ est lui-même un nombre rationnel. »

   Ce raisonnement est exact.

3. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère les points A$(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, B$(4\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et C$(7\ ;\ -1\ ;\ 1)$. On veut prouver que A, B et C déterminent un plan. Pour cela on tient le raisonnement suivant :

« On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(3\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(6\ ;\ -1\ ;\ 2)$. Il s'ensuit : $\mathrm{AB} = \sqrt{19}$, $\mathrm{AC} = \sqrt{41}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 17$.

Comme $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \neq \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$, les points A, B et C ne sont pas alignés, ils déterminent un plan. »

Ce raisonnement est exact.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{E}(\sin x)$ (E désigne la fonction « partie entière »). On cherche la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie dans un voisinage de 0. On utilise le changement de variable $X = \sin x$; on sait que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$. Par suite, et d'après le théorème de composition des limites, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{E}(X) = 0$. »

Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x \ln(1+x) - 2\ln x}{x^2} = 1$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$.

3. L'inéquation $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x + 2 \leqslant 0$ n'a pas de solution réelle.

4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln\left(1 + x^2\right)$ possède le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x}$. Soient f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-3x}$.

1. On a $f'(0) = 4$.

2. Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1$.

3. Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{3x}$.

4. Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3f(x) - \mathrm{e}^{3x} - 2}{9}$.

EXERCICE 9

On définit la suite (I_n) pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \displaystyle\int_1^{x\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_1 = \dfrac{1}{2}$.
2. La suite (I_n) est croissante.
3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}\right)$.
4. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, une intégration par parties donne $(n-1)^2 I_n = 1 - n\mathrm{e}^{1-n}$.

EXERCICE 10

On considère les trois suites $u,\ v$ et w définies respectivement par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{array}\right. ,\ \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 5 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad w_n = v_n - u_n.$$

1. La suite w est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
2. La suite u est croissante.
3. Les suites u et v sont convergentes.
4. Quelque soit $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$.

EXERCICE 11

On considère les suites u et v définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{-2}{u_n - 3} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$.
2. La suite u est convergente.
3. v est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -1$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1+2^n}$.

EXERCICE 12

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$. On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_n(x) = x^{n-1}\ln x$. On appellera $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant la fonction f_n dans un repère du plan.

1. Quelque soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, les courbes $\mathscr{C}_n$ possèdent l'axe des ordonnées pour asymptote.
2. Soit $x \in]0\ ;\ 1[$. On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.
3. Quelque soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, les courbes $\mathscr{C}_n$ possèdent une tangente commune au point d'abscisse 1.
4. Soient $x \in]1\ ;\ +\infty[$ et $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f_k(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x} \times \ln x$.

EXERCICE 13

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules blanches et n boules noires.
On jette un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

— Si le résultat est pair, on prélève au hasard, successivement avec remise intermédiaire, deux boules de U_1.
— Si le résultat est impair on prélève au hasard, successivement sans remise intermédiaire, deux boules de U_2.

On appelle N l'évènement « obtenir deux boules noires ».
On désigne par $p(N)$ la probabilité de l'évènement N, $p_{U_1}(N)$ la probabilité de l'évènement N sachant que les deux boules tirées proviennent de U_1, $p_{U_2}(N)$ la probabilité de l'évènement N sachant que les deux boules tirées proviennent de U_2.

1. La probabilité d'obtenir deux boules noires de U_1 est $\dfrac{1}{8}$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $p_{U_1}(N) = p_{U_2}(N)$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{U_1}(N) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_{U_2}(N)$.
4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $p(N) = \dfrac{4n-3}{8(2n-1}$.

EXERCICE 14

Une usine fabrique des détecteurs de fumée. Ces détecteurs disposent chacun d'une durée de vie aléatoire (en mois) représentée par une variable aléatoire T.
Cette variable suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, dont la loi de densité est la fonction f_λ définie par : $f_\lambda(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et
$f_\lambda(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour $t > 0$.
Les tests indiquent qu'un détecteur donné a 1 chance sur 2 de tomber en panne à la fin de son premier mois de bon fonctionnement. En cas de panne, le détecteur défaillant est immédiatement remplacé par un détecteur neuf. Un contrôle est effectué chaque mois après l'installation du premier détecteur. On admet que le fonctionnement des détecteurs est indépendant d'un détecteur à un autre. On désire équiper une petite salle avec l'un de ces détecteurs de fumée.

1. $\lambda = \ln 2$.
2. La probabilité de changer au moins une fois le détecteur lors de l'un des deux premiers contrôles est égale à 1.
3. La probabilité de changer le détecteur une fois et une seule lors de l'un des cinq premiers contrôles est égale à $\dfrac{5}{32}$.
4. Pour tout entier supérieur ou égal à 1, la probabilité que le détecteur ne soit pas changé lors des n premiers contrôles est égale à $\dfrac{1}{2^n}$.

EXERCICE 15

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A$(-1 ; 2 ; 4)$, B$(0 ; -2 ; 3)$, C$(7 ; 1 ; -1)$ et D$(-2 ; -2 ; -13)$.
On appelle P le plan médiateur de [AB], c'est-à-dire le plan contenant les points équidistants de A et de B ou aussi le plan perpendiculaire à [AB] contenant le milieu de [AB].
On appelle Q le plan médiateur de [CD].

1. Le vecteur de coordonnées $(8~;~-1~;~-5)$ est normal à Q.
2. Le plan P a pour équation $x+4y+z+4=0$.
3. A, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre $\Omega(-1~;~2~;~-5)$.
4. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{A}M}\cdot\overrightarrow{\text{B}M}=0$ est la sphère de diamètre [AB].

EXERCICE 16

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$. On considère les ensembles P, Q et R d'équations respectives

$$P : x+y=0 \quad ; \quad Q : 2x-y-z-1=0 \quad ; \quad R : z=1.$$

1. P est une droite.
2. L'ensemble des points appartenant à la fois à P et à R est une droite.
3. P et Q sont perpendiculaires.
4. P, Q et R se coupent au point $\text{A}\left(\dfrac{2}{3}~;~-\dfrac{2}{3}~;~1\right)$.

Concours Fesic mai 2008

Calculatrice interdite ; traiter 12 *exercices sur les* 16 *en* 2 *h* 30 *; répondre par Vrai ou Faux sans justification.* +1 *si bonne réponse,* −1 *si mauvaise réponse,* 0 *si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.*

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère trois points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{B}} = 1 + \text{i}, \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = 2\text{i}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \text{i}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

a. On a $\arg(z_{\text{C}}) = \dfrac{\pi}{12}$.

b. L'écriture algébrique de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ est : $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c. L'écriture trigonométrique de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ est : $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

d. On a : $\dfrac{\text{OA}}{\text{OB}} = \dfrac{\text{OC}}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 2

On considère deux réels a et b et l'équation [E] : $z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

a. Si z_0 est solution de [E] alors $\overline{z_0}$ et $\dfrac{1}{z_0}$ le sont aussi.

b. Si $1 + 2\text{i}$ est solution de [E] alors $\dfrac{1}{1 - 2\text{i}}$ aussi.

c. Le changement de variable $Z = z + \dfrac{1}{z}$ conduit à résoudre [E′] : $Z^2 + aZ + b = 0$.

d. On peut factoriser l'expression $z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1$ par deux polynômes de degré deux à coefficients réels.

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle A le point d'affixe 2, B le point d-affixe $-3 - \text{i}$ et C le point d'intersection de (OB) avec la médiatrice de [OA]. On considère dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes $[\text{E}_1]$ et $[\text{E}_2]$:

$$[\text{E}_1] : |z| = |z - 2| \quad \text{et} \quad [\text{E}_2] : \arg(z) = \arg(z + 3 + \text{i}).$$

a. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $[\text{E}_1]$ est la médiatrice de [OA].

b. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $[\text{E}_2]$ est le segment [OB], exclusions faites de O et B.

c. L'affixe du point C vérifie simultanément $[\text{E}_1]$ et $[\text{E}_2]$.

d. Le point C a pour coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$

EXERCICE 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal. Soient $a \in \mathbb{R}$, $(\mathscr{C})$ la courbe représentant la fonction exponentielle et (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(x+1-a)$ et (Γ) sa courbe représentative dans le même repère.

a. Une équation de (T) est : $y = \mathrm{e}^a(x+1-a)$.

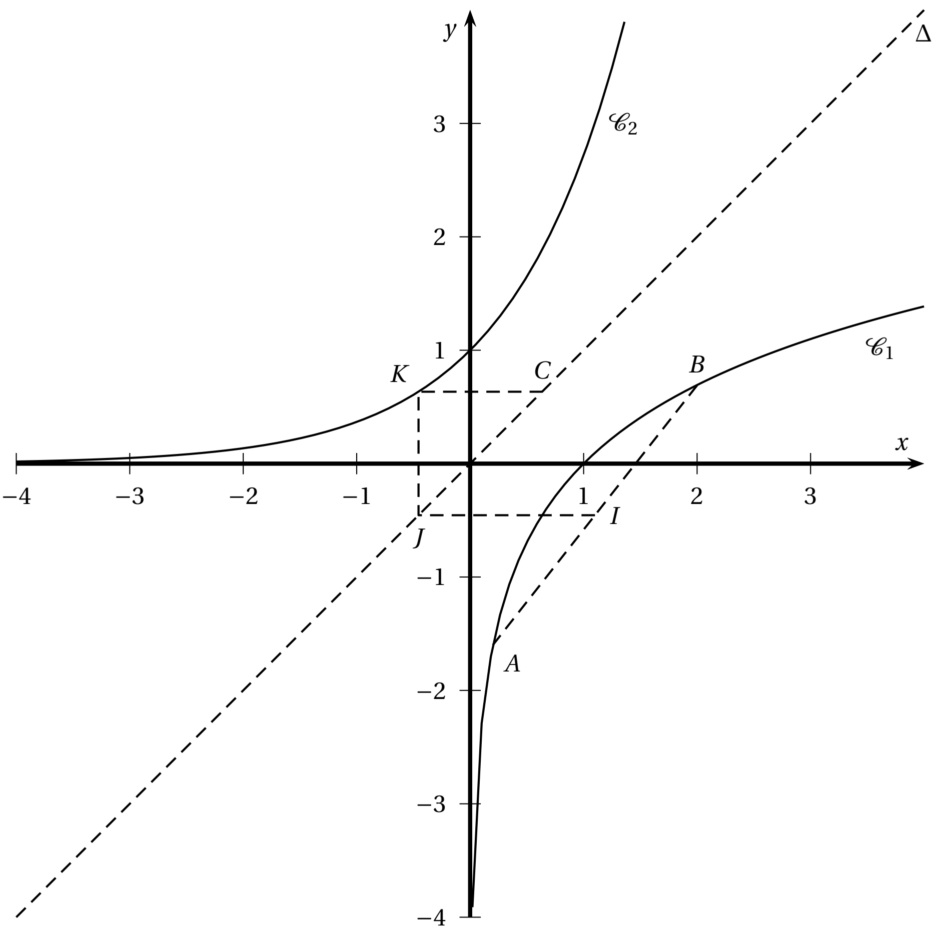
b. La dérivée f' de f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $(\mathscr{C})$ est au-dessous de (T) avant le point $\mathrm{A}(a\,;\,\mathrm{e}^a)$ est au-dessus de (T) après A.

d. À tout réel x_0 on associe les points M_0 de $(\mathscr{C})$ et N_0 de (Γ) d'abscisse commune x_0. x_0 étant fixé, il existe une valeur de a telle que $(\mathscr{C})$ et (Γ) possèdent des tangentes parallèles respectivement en M_0 et N_0.

EXERCICE 5

Dans le repère orthonormal ci-dessous sont représentées les courbes des fonctions logarithme népérien, exponentielle et identité ($x \longmapsto x$).



a et b sont deux réels strictement positifs et A et B sont deux points de $\mathscr{C}_1$ d'abscisses respectives a et b.
On appelle I le milieu de $[AB]$.
On notera ceci : $J \in \Delta, K \in \mathscr{C}_2$, les droites (IJ) et (KC) sont parallèles à l'axe des abscisses ; la droite (JK) est parallèle à l'axe des ordonnées.

a. Le point I a les coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\,\ln\left(\sqrt{ab}\right)\right)$.

b. L'abscisse de C est $\mathrm{e}^{\sqrt{ab}}$.

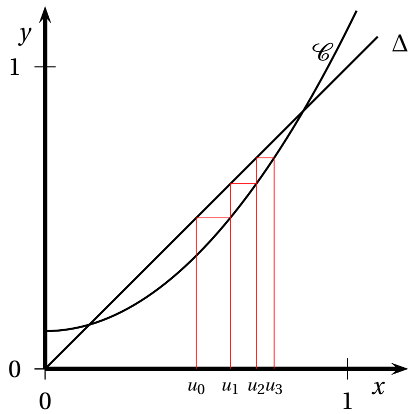
c. La tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est parallèle à la droite Δsi et seulement si $a+b=2$.

d. Le symétrique de A par rapport àΔ a pour coordonnées $(\ln a\ ;\ a)$.

EXERCICE 6

a. Afin de résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}<0$, on utilise le raisonnement suivant :
« Si x est une solution, alors $x\in\mathbb{R}$ et on a $\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}<0$. Le changement de variable $X=\mathrm{e}^x$ donne $X-\dfrac{2}{X}<0$, soit $\dfrac{X^2-2}{X}<0$. Or on a $X=\mathrm{e}^x>0$. Il faut donc $X^2-2<0$, soit aussi $\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)<0$. On en déduit $-\sqrt{2}<X<\sqrt{2}$, donc $-\sqrt{2}<\mathrm{e}^x<\sqrt{2}$.
ln étant une fonction croissante, on obtient $x<\ln 2$. Ces conditions nécessaires sont suffisantes. Solution : $x<\ln 2$.
Ce raisonnement est exact.

b. On considère la suite définie par :
$u_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_{n+1}=u_n^2+\dfrac{1}{8}$.
On désigne par C la courbe représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=x^2+\dfrac{1}{8}$ et on désigne par Δ la droite d'équation $y=x$. Afin de construire les quatre premiers termes de la suite u, on a réalisé la construction ci-contre.



Cette construction est exacte.

c. On considère la suite u et la fonction f présentées à l'item **b.**
Afin de montrer que u est croissante, on utilise le raisonnement par récurrence suivant :
« Soit P(n) l'inéquation : $u_{n+1}\geqslant u_n\geqslant 0$.
Initialisation : on a $u_1\geqslant u_0\geqslant 0$, donc P(0) est vraie.
Hérédité : Soit $p\in\mathbb{N}$ tel que P(p) soit vraie. Alors $u_{p+1}\geqslant u_p\geqslant 0$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ne prend que des valeurs positives, alors $f\left(u_{p+1}\right)\geqslant f\left(u_p\right)\geqslant$f(0), soit $u_{p+2}\geqslant u_{p+1}\geqslant 0$. Donc P$(p+1)$ est vraie.
Conclusion : De ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, je déduis que quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
On obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geqslant u_n$, ce qui prouve que u est croissante.
Ce raisonnement est exact.

d. On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ -3]\cup[1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$.
On cherche à savoir si la courbe $\mathscr{C}$ représentant f possède une tangente au point A(1 ; 0). On utilise pour cela le raisonnement suivant : « Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A est donnée par $y=(x-1)f'(1)+f(1)$.
Or on a $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$, donc $f'(1)$ n'existe pas et donc f n'est pas dérivable en 1. On en déduit que $\mathscr{C}$ ne possède pas de tangente en A. »
Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}$. On appelle D l'ensemble de définition de f.

a. f est dérivable sur $D = [0\,;\,+\infty[$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. Quel que soit $x \in D$, $f(x) \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

d. L'équation $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ admet une unique solution sur D.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. On appelle D l'ensemble de définition de f et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. $D =]-\infty\,;\,-1[$;

b. f admet des primitives sur $]-\infty\,;\,-1[$; l'une d'elles est la fonction F définie sur $]-\infty\,;\,-1[$ par

$$F(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln x.$$

c. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xf(x) = 1$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}*$. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{2}{n(n+1)} + \ln(n+1)$.

EXERCICE 9

Soit f une fonction continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$.
Soient F et G les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ respectivement par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On désigne par Γ la représentation graphique de f dans un repère du plan.

a. $G(0) = G(1)$.

b. G est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a $G'(x) = F(x) + xf(x)$.

c. On ne peut pas prévoir le sens de variation de G sur $[0\,;\,+\infty[$ avec les seules hypothèses de l'énoncé.

d. L'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2) + F(0)$.

EXERCICE 10

a. La solution de l'équation différentielle $2y' + y = 0$ qui prend la valeur 5 en 1 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\mathrm{e}^{\frac{1-x}{2}}$.

b. L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(4-x) \leqslant 1$ est $[4-\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

c. Soient $a \in \mathbb{R}_+*$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction ln dans un repère orthonormal du plan d'origine O. Soient A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, B le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses et C le point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}$ en A avec l'axe des abscisses.
C est le milieu de [OB] si et seulement si $a = \sqrt{\mathrm{e}}$.

d. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient trois points A, B et C deux à deux distincts et non alignés. Soit G le barycentre de $\left\{(\text{A}, \text{e}^a)\ ;\ (\text{B},)\ ;\ (\text{C}\ ;\ 2)\right\}$.
Dans le repère $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ le point G a les coordonnées $(x,\ y)$ telles que $x = \dfrac{1}{(\text{e}^a+1)^2}$ et $y = \dfrac{2\text{e}^a}{(\text{e}^a+1)^2}$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}.$$

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

On admettra que la suite u est bien définie.

a. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
b. u est croissante.
c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
d. u est convergente.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}.$$

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}.$$

On admettra que les suites u et v sont bien définies.

a. v est géométrique de raison 4.
b. $\displaystyle\sum_{k=5}^{15} v_k = v_5 \times \frac{4^{10}-1}{3}$.
c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2v_n+1}{v_n-1}$.
d. La suite u converge vers -1.

EXERCICE 13

Soient b et n deux entiers naturels tels que $b > 2$ et $n \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $(b-2)$ boules noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on repère sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète ainsi n fois cette expérience.
On désigne par p_n la probabilité de tirer une boule blanche et une seule lors des $(n-1)$ premiers tirages et une boule noire au n-ième tirage.

a. $p_2 = 1 - \dfrac{2}{b^2}$.

b. $p_n = \dfrac{2(n-1)}{b}\left(1-\dfrac{2}{b}\right)^{n-1}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(p_n\right)0 = +\infty$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{1} n-1 = 1$.

EXERCICE 14

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite et de façon indépendante un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On obtient ainsi une partie complète en trois manches, chaque lancer constituant une manche.
Le joueur gagne la partie s'il obtient « 1 » ou « 2 » à chaque lancer. Il perd dans les autres cas.
La partie coûte 1 euro ; le joueur reçoit 27 euros s'il gagne la partie.

a. La probabilité de gagner une partie est $\dfrac{1}{27}$.

b. Ce jeu est équitable.

c. La probabilité pour un joueur de gagner au moins une fois en trois parties est $\dfrac{1}{9}$

d. La probabilité qu'un joueur gagne une partie sachant qu'il a gagné la première manche est la même que la probabilité qu'il gagne la première manche sachant qu'il a gagné la partie.

EXERCICE 15

L'espace est muni d'un repère orthonormal. On considère le système

$$[\text{S}] : \left\{\begin{array}{rcr} x+2y-3z &=& 1\\ -3x+y+2z &=& -3\\ 2x-3y+z &=& 2\end{array}\right.$$

On appelle P le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z=1$ et D la droite définie par le système d'équations : $\left\{\begin{array}{rcr} -3x+y+2z &=& -3\\ 2x-3y+z &=& 2\end{array}\right.$

a. Le système [S] admet pour unique solution en $(x~;~y~;~z)$ le triplet $(2~;1~;1)$.

b. La droite D est contenue dans le plan P.

c. Le système $\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 1\\ y-z &=& 0\end{array}\right.$ est un autre système qui permet de définir la droite D.

d. Le vecteur $\overrightarrow{u}\,(2~;~1~;~1)$ est un vecteur directeur de la droite D.

EXERCICE 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$. On considère par leurs coordonnées les points $\text{A}\left(1~;~-1+\sqrt{2}~;~2\right)$, $\text{B}\left(3~;~-1-\sqrt{2}~;~4\right)$ et $\text{C}(2~;~-1~;~3)$.
On appelle Σ l'ensemble des points de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ tels que : $(x-1)(x-3)+(y+1-\sqrt{2})(y+1+\sqrt{2})+(z-2)(z-4)=0$.
$\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $x-y+z\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1$.

a. Σ est une sphère dont un diamètre est [AB].

b. Σ est une sphère de centre C.

c. La distance de C à $\mathcal{P}$ est $\dfrac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$.

d. $\mathcal{P}$ est tangent à Σ.

Concours Fesic mai 2009

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+2}{5x}\right)$.
On appelle D l'ensemble de définition de f, D′ l'ensemble de définition de sa dérivée f' et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. Pour tout $x \in \text{D}$, on a $f(x) = \ln(3x+2) - \ln x - \ln 5$

b. Pour tout $x \in \text{D}'$, on a $f'(x) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5x}{3x+2}$.

c. $\text{D}' = \mathbb{R} - \left\{0\,;\,-\dfrac{2}{3}\right\}$.

d. On a $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

EXERCICE 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P un polynôme de degré n et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = P(x) \times \mathrm{e}^{2x-1}.$$

a. Il existe un polynôme Q de même degré que P (degré n) tel que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = Q(x) \times \mathrm{e}^{2x-1}$.

b. Quels que soient le polynôme P et son degré, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c. L'inéquation $\mathrm{e}^{2x-1} \geqslant 3$ n'a pas de solution.

d. On suppose ici que P est le polynôme défini par $P(x) = x^2 + 1$. On suppose que a, b et c sont trois réels tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{2x-1}$ soit une primitive de f.
Alors on a le système $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ 2a+b & = & 0 \\ b+c & = & 1 \end{array}\right.$

EXERCICE 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x(1-x) + 1.$$

On admet que l'équation $g(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ et on appelle α cette solution.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a. La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

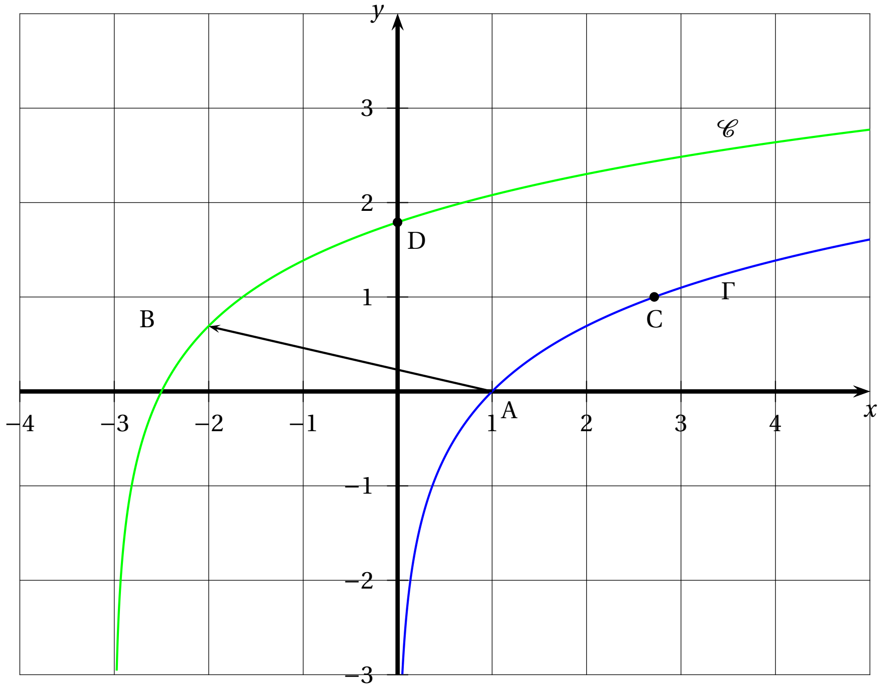
b. g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe opposé à $g(x)$.

d. On a $f(\alpha) = \alpha + 1$.

EXERCICE 4

On considère le graphique ci-dessous réalisé dans un repère orthonormal.



$\mathscr{C}$ est la représentation d'une fonction f et Γ est celle de la fonction ln (logarithme népérien).
On sait que $\mathscr{C}$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$, avec A$(1\,;\,0)$ et B$(-2\,;\,\ln 2)$.

a. f est la fonction définie par $f(x) = \ln 2x + 6)$.

b. La distance entre deux points M et N appartenant respectivement à Γ et à $\mathscr{C}$ et situés à la même ordonnée est constante.

c. La tangente à Γ en A est parallèle à la tangente à $\mathscr{C}$ en B.

d. La droite (CD) est parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 5

a. Quel que soit $x_0 \in]1\,;\,+\infty[$, on a $[\ln(\ln(x))]'(x_0) = \dfrac{2\ln x_0}{x_0}$.

b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} - 4 \geqslant 0$ est $[\ln 4\,;\,+\infty[$.

c. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
f est continue en 0.

d. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $g(t) = t\ln t$ pour $t > 0$ et $g(0) = 0$.
La courbe représentant g dans un repère du plan possède une demi-tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 6

a. On considère la suite u, définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.
On veut montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$. On tient pour cela le raisonnement par récurrence suivant :
« Soit $P(n)$ l'inéquation $[u_n > 1]$.
Initialisation : cas $n = 0$. $u_0 = 3 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(p)$ soit vraie. Montrons que $P(p+1)$ est vraie.
On a $u_p > 1$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $4u_p - 2 > 4 \times 1 - 2$, soit $4u_p - 2 > 2$.
De même $u_p + 1 > 1 + 1$, donc $u_p + 1 > 2$. On en déduit $\dfrac{4u_p + 2}{u_p + 1} > \dfrac{2}{2}$ et donc $u_{p+1} > 1$. Donc $P(p+1)$ est vraie.
Conclusion : De ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, on déduit que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. »
Ce raisonnement est exact.

b. On considère les fonctions f et g définies respectivement par :

$$x \in \left]-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[,\ f(x) = \ln(2x+3) \text{ et } x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\hat{e}^x - 3}{2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement f et g dans un repère orthonormal du plan et on appelle Δ la droite d'équation $y = x$.
On veut montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ. On tient pour cela le raisonnement suivant :
« Soient $x \in \left]-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $y \in \mathbb{R}$, M le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et N le point de coordonnées $(y\ ;\ x)$.
Par définition, Δ est médiatrice de [MN]. Or $M \in \mathscr{C}_f$, donc $y = f(x) = \ln(2x+3)$. On en déduit $2x + 3 = \mathrm{e}^y$ et donc $x = \dfrac{\mathrm{e}^y - 3}{2}$. Il s'ensuit que le point N appartient à $\mathscr{C}_g$. Ceci étant vrai pour tout point M ainsi défini, c'est que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ »
Ce raisonnement est exact.

c. On considère la suite u définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 8}{6}$.
On veut montrer que u est croissante.
On tient pour cela le raisonnement suivant :
« Un raisonnement par récurrence prouve que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. Or la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{6}$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. On en déduit que u est croissante. »
Ce raisonnement est exact.

d. On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$. On veut montrer que $P(x)$ est factorisable par $(x-1)^2$.
On tient pour cela le raisonnement suivant :
« On a $P(1) = 0$. Il existe donc un polynôme Q_1 tel que, pour tout $x, P(x) = (x-1)Q_1(x)$.
Pour tout x, on a : $P'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$.
Mais aussi : $P'(x) = Q_1(x) + (x-1)Q(x)$.
Or $P'(1) = 0$. On a donc $Q_1(1) = 0$. Il existe donc un polynôme Q_2 tel que pour tout $x, Q_1(x) = (x-1)Q_2(x)$, soit aussi $P(x) = (x-1)^2 Q_2(x)$ ». Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Dans le plan complexe de centre O, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = \sqrt{3}(1+\mathrm{i}), b = \mathrm{i}\sqrt{3}, c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-1+\mathrm{i})$.

a. OABC est un trapèze.

b. (OC) et (BC) sont perpendiculaires.

c. Le barycentre G du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 3)\}$ a pour affixe $2a - b + 3c$.

d. OABC possède deux côtés de même longueur.

EXERCICE 8

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation [E] : $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$. Un nombre complexe z étant donné, on note $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.

a. [E] possède au plus 4 solutions.

b. Si z_0 est une solution de [E], alors $-z_0$, $\overline{z_0}$ et $-\overline{z_0}$ sont d'autres solutions.

c. Les solutions de [E] ont toutes le même module.

d. Les solutions de [E] ont toutes le même argument (à 2π près).

EXERCICE 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère le point A d'affixe $a = 1 - \text{i}\sqrt{3}$, la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{\text{OA}}$.

a. Le point A a les coordonnées polaires $\left(2\,;\, -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b. L'image de O par r est le point B de coordonnées cartésiennes $\left(\sqrt{3}\,;\, 1\right)$.

c. Le point image de O par $r \circ t$ est le point A.

d. Si C est le point d'affixe c, alors le point d'affixe $\dfrac{1}{2}\text{i}ac$ est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

EXERCICE 10

On considère la fonction φ définie par : $\varphi(t) = \dfrac{\text{e}^t}{t}$. Soient deux réels a et b et la fonction f définie par $f(x) = \text{e}^{-x}\displaystyle\int_a^b \frac{\text{e}^t}{t}\,\text{d}t$. En particulier, on a $f(0) = \displaystyle\int_a^b \frac{\text{e}^t}{t}\,\text{d}t$. On appelle D l'ensemble de définition de f.

a. Si $a = 1$, alors f est définie quel que soit b.

b. Si $b = 1$, alors f est définie quel que soit a.

c. Si $a = 2$ et $b = 1$, alors f(0) représente l'aire (en unités d'aire) de la surface comprise entre les droites d'équation $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$ et la courbe représentant la fonction φ.

d. Dans cette question, on suppose $0 < a < b$. f est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

EXERCICE 11

On considère les intégrales $\text{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,\text{d}t$ et $\text{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,\text{d}t$.

a. Quel que soit le réel t, $\cos^2 t - \sin^2 t = \sin(2t)$.

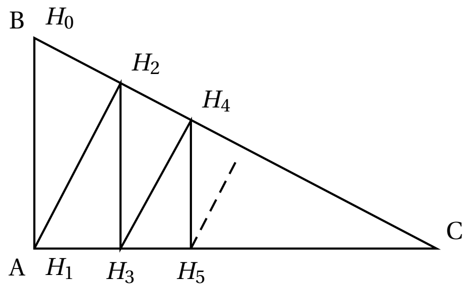
b. $\text{I} - \text{J} = -\dfrac{1}{2}$.

c. $\text{I} + \text{J} = \pi$.

d. L'aire représentée par I est la même que celle représentée par J.

EXERCICE 12

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et BC = 8. On définit la suite des points (H_n) ainsi : H_0 =B et H_{n+1} est le projeté orthogonal de H_n sur (AC) si n est pair et sur (BC) si n est impair. On définit les suites (ℓ_n) et (L_n) par :
$\ell_n = H_nH_{n+1}$ et $L_n = \ell_0 + \ell_1 + \cdots + \ell_n$.



a. $\ell_1 = H_1H_2 = 2$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle $H_nH_{n+1}H_{n+2}$ est un demi-triangle équilatéral.

c. La suite (ℓ_n) est géométrique.

d. Quand n tend vers $+\infty$, L_n tend vers un nombre fini inférieur à 30.

EXERCICE 13

Si f est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit les dérivées successives de f :

- $f^{(0)} = f$ (lire : la dérivée d'ordre 0 de f est égale à f) ;
- $f^{(1)} = f'$ (dérivée 1[re] de f) ;
- $f^{(2)} = f''$ (dérivée deuxième de f c'est-à-dire la dérivée de f') ;
- pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ (la dérivée $(n+1)$-ième de f est la dérivée de la dérivée n-ième).

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x\mathrm{e}^x$. On considère la suite (u_n) définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $u_n(x) = \varphi^{(n)}(x)$ (dérivée n-ième de φ calculée en x).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant la fonction u_n dans un repère du plan.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $u_n(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$.

a. Dans cette question, x est un réel fixé. La suite (u_n) est une suite arithmétique.

a. Dans cette question, n est un entier naturel fixé.
La fonction u_n est décroissante sur $]-\infty\,;\,-n[$ et croissante sur $[-n\,;\,+\infty[$.

a. Dans cette question, n est un entier naturel fixé.
La courbe $\mathscr{C}_n$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$.

EXERCICE 14

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \times 3^{2k}$ vaut 1 milliard.

b. Pour un département donné, on peut faire plus de plaques minéralogiques de véhicules composées de 4 chiffres et 2 lettres que de plaques composées de 3 chiffres et 3 lettres. (On supposera que tous les chiffres et toutes les lettres de l'alphabet sont utilisables).

c. Un dé est pipé de sorte que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro de cette face. La probabilité d'apparition du 3 est $\frac{1}{7}$.

d. Un parking dispose de 10 places libres. Il y a $\binom{10}{3}$ possibilités de ranger 3 voitures dans ce parking.

EXERCICE 15

Un dé cubique équilibré possède 4 faces noires et 2 faces blanches. Un 2e dé équilibré ayant la forme d'un tétraèdre régulier possède 3 faces blanches et 1 face noire. On choisit un dé au hasard et on le lance.

a. La probabilité que la face cachée soit noire est $0,5$.

b. La probabilité que le dé choisi soit cubique sachant que la face cachée est blanche est $\dfrac{4}{13}$.

Une variable aléatoire X (en minutes) suit une loi de répartition uniforme sur $[10 ; 30]$.

c. L'espérance associée à X est 10 min.

d. La probabilité d'avoir $X < 25$ sachant que l'on a $X > 15$ est $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 16

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

a. L'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ pour lesquels il existe $k \in [-1 ; 1]$ vérifiant le système $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2k+1 \\ y & = & -k+2 \\ z & = & 3k-1 \end{array}\right.$ est le segment [AB], où on a $\text{A}(1 ; 2 ; -1)$ et $\text{B}(5 ; 0 ; 5)$.

b. Le plan d'équation $2x-3y+z+1=0$ possède le vecteur $\vec{n}\,(-2 ; 3 ; -1)$ pour vecteur normal.

c. La droite d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2k+1 \\ y & = & -k+2 \\ z & = & 3k-1 \end{array}\right.$, avec $k \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan d'équation $2x-3y+z+1=0$.

d. L'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ vérifiant le système $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$ est une droite.

Concours Fesic mai 2010

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On appelle D l'ensemble de définition de f.

a. $D =]-1\ ;\ +1[$.

b. f est paire.

c. f est décroissante sur D.

d. Quel que soit le réel b, l'équation $f(x) = b$ possède l'unique solution $x = \dfrac{\mathrm{e}^{2b}-1}{\mathrm{e}^{2b}+1}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a. f est continue en 0.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de x.

c. $\mathscr{C}$ possède la même droite pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

d. Quel que soit le réel x, on a $f(x) < 1$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \sin(\ln t).$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.
Soit F la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. On a $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\pi}{2}$.

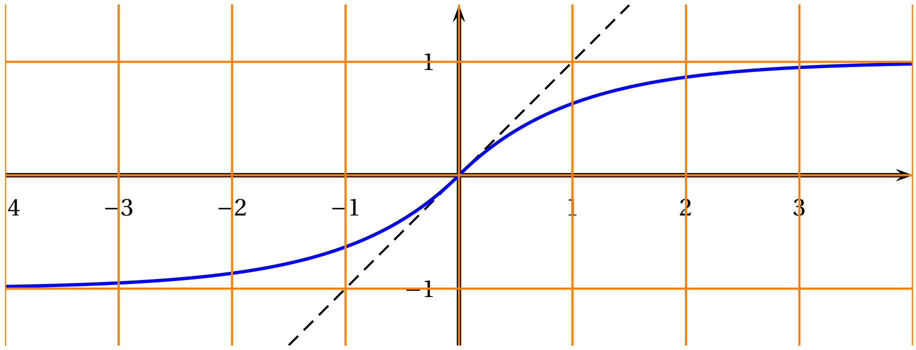
b. Si $t \in [1\ ;\ \mathrm{e}^{\pi}]$, alors on a $f(t) \geqslant 0$.

c. $F(\mathrm{e}^{\pi})$ représente l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = \mathrm{e}^{\pi}$ et $y = 0$.

d. Quel que soit $x > 1$, on a $F'(x) \leqslant 1$.

EXERCICE 4

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle Γ la courbe représentant f et $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction dérivée f' de f. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ de f' : $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. La droite Δ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



a. La courbe Γ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

c. La courbe Γ possède une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

d. On a $f''(0) = 1$.

EXERCICE 5

a. $\displaystyle\int_{-5}^{7} |x|\,\mathrm{d}x = 12$.

b. $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x+5)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 5\mathrm{e} - 3$.

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}{x} = 2$.

d. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin^2 x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x\sin^2 x + x^2 \cos 2x$.

EXERCICE 6

a. On considère un tétraèdre ABCD. On appelle I le milieu de [AD], J celui de [BC], K le barycentre de $\{(\mathrm{A}, 2), (\mathrm{B}, 1)\}$, L le barycentre de $\{(\mathrm{C}, 1), (\mathrm{D}, 2)\}$ et G le barycentre de $\{(\mathrm{A}, 2), (\mathrm{B}, 1), (\mathrm{C}, 1), (\mathrm{A}, 2)\}$.

On veut montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« G est le barycentre de (I, 4), (J, 2) et de (K, 3), (L, 3). Donc G, I et J sont alignés, ainsi que G, K et Z sont alignés. On en déduit que I, J, K et L sont coplanaires.»

Ce raisonnement est exact.

b. On considère les deux intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{\mathrm{e}^{x}+3}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{1}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x$.

On veut calculer I et J. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On a $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{\mathrm{e}^{x}+4}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x = \ln 8 - \ln 2 = 2\ln 2$.

De plus, $\mathrm{I} - 3\mathrm{J} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\mathrm{e}^{x}+4\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 8} = \ln 12 - \ln 6 = \ln 2$.

On en déduit $\mathrm{I} = \dfrac{7\ln 2}{4}$ et $\mathrm{J} = \dfrac{\ln 2}{4}$ ».

Ce raisonnement est exact.

c. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

On cherche à savoir si $\mathscr{C}$ possède ou non une demi-tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On sait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (limite de référence). Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$. On en déduit que $\mathcal{C}$ possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $x = 0$. » Ce raisonnement est exact.

d. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère. On cherche à savoir si $\mathcal{C}$ possède ou non une tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« Pour tout $x \neq 0$, on a : $-1 < \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1$, donc $-x^2 < f(x) < x^2$. Or $\lim\limits_{x \to 0}\left(-x^2\right) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x^2\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Or on a $-x \leqslant 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$ si $x > 0$ et $x \leqslant 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant -x$ si $x < 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Mais comme $\lim\limits_{x \to 0}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas, alors $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en 0. On en déduit que $\mathcal{C}$ ne possède pas de tangente au point d'abscisse 0 ». Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À chaque point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 + z + 1$.
On appelle A le point d'affixe 1 et on note E_0 l'ensemble des points dont l'affixe z est solution de l'équation $z' = 0$.

a. Pour tout z différent de 1, on a $z' = \dfrac{1 - z^3}{1 - z}$.

b. L'ensemble E_0 est réduit à deux points B et C symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{u}\right)$.

c. Quel que soit le point M d'affixe z appartenant à E_0 et quel que soit l'entier n, z_n est soit l'affixe du point A, soit celle d'un élément de E_0.

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires.

EXERCICE 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(\mathrm{E}) : \quad z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

a. Les complexes $-1 + 2\mathrm{i}$ et son conjugué sont solutions de (E).

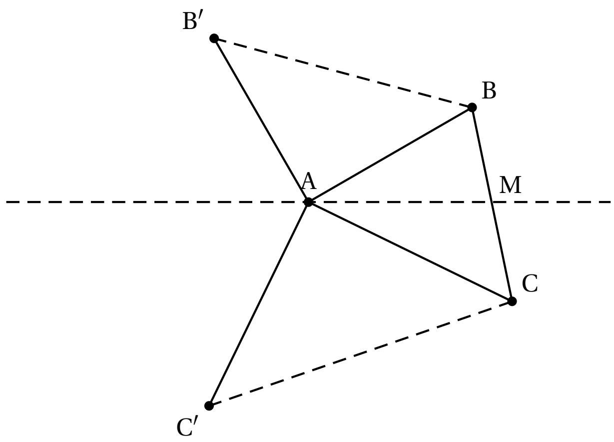
b. Cette équation est une équation polynômiale de degré 2 qui possède deux solutions.

c. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant réels. Si z est solution de (E), alors $y^2 = (x-1)^2$.

d. La somme des solutions de (E) est égale à -1.

EXERCICE 9

On considère un triangle ABC et le point M milieu de [BC].
On appelle B′ l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et C′ l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On munit le plan complexe d'un repère de centre A dans lequel B, C, B′, C′ et M ont les affixes respectives b, c, b', c' et m.



a. $c' + \mathrm{i}c = 0$ et $b' - \mathrm{i}b = 0$.

b. $\dfrac{c' - b'}{m} = -2\mathrm{i}$.

c. (AM) et (B′C′) sont perpendiculaires.

d. B′C = 2AM.

EXERCICE 10

Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle [E] :

$$y' + ay = \varphi(x).$$

a. Si φ est définie par $\varphi(x) = x^3 - 1$, alors quel que soit le réel a, il existe un polynôme de degré 2, solution de [E].

b. Si φ est définie par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{2x}$, alors quel que soit le réel a, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que la fonction f, définie par $f(x) = b\mathrm{e}^{2x}$ soit solution de [E].

c. Si φ est la fonction constante nulle et si f est une solution de [E], alors la courbe représentant f possède au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = (1 - ax)f(0)$.

d. Si $a = 0$, alors quelle que soit la fonction φ définie et continue sur $\mathbb{R}$, [E] possède une solution.

EXERCICE 11

On considère la suite u définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)u_n$.

a. La suite u est géométrique de raison $\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}*$, $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.

c. La suite u est décroissante à partir de $n = 2$.

d. La suite u est convergente.

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]-\infty\,;\,3[$ par $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$.
Soit u la suite définie par $u_0 = 1,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

a. f est croissante.

b. u est croissante.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$.

d. Si u est convergente et si ℓ est sa limite, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

EXERCICE 13

On considère la suite u définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2}\left(u_n\right)^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On considère alors la suite v définie par $v_n = \ln\left(\sqrt{2}\right) u_n$.

a. La suite v est géométrique.

b. $v_{10} = -512 \times \ln 2$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 2)\left(1-2^n\right)$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n = \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

EXERCICE 14

On dispose de quatre urnes numérotées de 1 à 4. Les urnes sont composées ainsi :
- Urne U_1 : 1 boule bleue et 3 boules rouges ;
- Urne U_2 : 2 boules bleues et 4 boules rouges ;
- Urne U_3 : 3 boules bleues et 5 boules rouges ;
- Urne U_4 : 6 boules rouges.

Un joueur choisit une urne au hasard, puis prélève une boule au hasard de cette urne. Le joueur est gagnant s'il tire une boule bleue ; il est perdant sinon. On désigne par :
- Ω l'univers des possibilités et P la probabilité associée ;
- P_A la probabilité conditionnée par un évènement A de Ω ;
- G l'évènement : « le joueur gagne » ;
- U_n l'évènement : « le joueur choisit l'urne U_n ».

a. $P_{U_1}(G) = \dfrac{2}{3} P_{U_3}(G)$.

b. $P(G) = \dfrac{9}{8}$.

c. $P\left(U_1\right) = \dfrac{1}{6}$.

d. $P_{U_2}(G) = P_G\left(U_2\right)$.

EXERCICE 15

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(?1 ; 4 ; 3), C(−2 ; 1 ; 3) et D(5 ; 4 ; −3).
On appelle K le barycentre de {(C, 1) ; (D, ?2)} et J le milieu de [BC]. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

a. Dans le triangle ABC, les médianes se coupent au point de coordonnées $(-2\ ;\ 7\ ;\ 9)$.

b. Les coordonnées de K sont $(-12\ ;\ -7\ ;\ 9)$.

c. Une équation paramétrique du segment [KJ] est $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 12-9t\\ y & = & 7-3t\\ z & = & -9+8t \end{array}\right.$, où $t \in \left[0\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

d. Une équation du plan perpendiculaire à (KJ) passant par A est
$9x+3y-8z+9=0$.

EXERCICE 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère le plan P d'équation $\left\{\begin{array}{l c l} y & = & 2x-1\\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$ et la droite D d'équation $\left\{\begin{array}{l c r} y & = & 2x-1\\ z & = & 0 \end{array}\right.$.

Soient $\text{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\text{B}(3\ ;\ 5\ ;\ -3)$ et $\text{C}(1\ ;\ -4\ ;\ 2)$.

a. A et B sont deux points de P.

b. D est perpendiculaire à P.

c. La distance de C à P est $\sqrt{5}$ (en unités de repère).

d. L'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que
$(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)+(z-1)(z+3)=0$ est la sphère de diamètre [AB].

∽ Concours Fesic mai 2011 ∾

Calculatrice interdite ; traiter 12 *exercices sur les* 16 *en* 2 *h* 30 *; répondre par Vrai ou Faux sans justification.* +1 *si bonne réponse,* −1 *si mauvaise réponse,* 0 *si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.*

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} xf(x) = -\infty$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} =]-1\,;\,1[$ par $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan.

a. $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Quel que soit $a \in \mathcal{D}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

c. f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et, quel que soit $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2-1}$.

d. Un énoncé peut demander, sans erreur de rigueur mathématique, d'« étudier le sens de variation de $f(x)$ ».

EXERCICE 3

Soient f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x - 1)$ et f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$.
On appelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentant respectivement f_1 et f_2 dans un même repère du plan et on appelle Δ la droite d'équation $y = x$.

a. Au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_1$ possède l'asymptote d'équation $y = x - 1$.

b. Quel que soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f_2 \circ f_1(x) = x$.

c. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose qu'au point $A\big(a\,;\,f_1(a)\big)$, $\mathcal{C}_1$ possède une tangente de coefficient directeur α.
Il existe un point de $\mathcal{C}_2$ en lequel $\mathcal{C}_2$ possède une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$.

d. Pour montrer que Δ est asymptote à $\mathcal{C}_2$ au voisinage de $+\infty$, un élève peut écrire, sans erreur de rigueur mathématique, « je vais montrer que $\lim \big(f_2(x) - \Delta\big) = 0$ ».

EXERCICE 4

Soit f_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = x\ln(1+x)$.
Soit f_2 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_2(x) = x\ln(x)$ si $x \neq 0$ et $f_2(0) = 0$.
On appelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentant respectivement f_1 et f_2 dans un même repère orthogonal du plan d'unités 3 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

a. f_2 est continue en 0.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)=0$.

c. On considère la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'une part et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=$e d'autre part.
L'aire de cette surface en cm^2 est $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

d. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ possèdent deux tangentes parallèles entre elles au point d'abscisse 0.

EXERCICE 5

On considère l'équation différentielle [E] : $y'-2y=(2x-1)\mathrm{e}^x$. On appelle f la solution de [E] qui s'annule en 0.

a. La courbe représentant f dans un repère du plan possède une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y=x$.

b. Quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x(2t-1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

c. Si $f'(x)$ possède une limite finie quand x tend vers $-\infty$, alors $f(x)$ possède une limite finie quand x tend vers $-\infty$.

d. La fonction f, définie par $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+(2x-1)\mathrm{e}^x$, est la fonction définie dans l'énoncé.

EXERCICE 6

a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$ si $x\neq0$ et $f(0)=0$.
On cherche à savoir si f est continue en 0. On tient pour cela le raisonnement suivant : « On a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x}=-\infty$. On en déduit $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.
Comme on a posé $f(0)=0$, on en déduit que f est continue en 0. »
Ce raisonnement est exact.

b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x\ln x$ si $x>0$ et $f(0)=0$.
On cherche à savoir si f est dérivable en 0 à droite. On tient pour cela le raisonnement suivant :
« f est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Pour tout $x>0$, on a $f'(x)=1+\ln x$.
Or la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0 ($x>0$) n'est pas un nombre réel.
Cela suffit pour en déduire que f n'est pas dérivable en 0 à droite. »
Ce raisonnement est exact.

c. On cherche à calculer la limite éventuelle de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
On tient pour cela le raisonnement suivant :
« Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$. On sait que f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et que, pour $x>-1$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Or, en utilisant le changement de variable $x=\dfrac{1}{n}$, on obtient :
$\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=f'(0)=1$.
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Compte tenu de ce qui précède, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{t\to1}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}$.
Conclusion : la limite cherchée existe et vaut e. »
Ce raisonnement est exact.

d. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A d'affixe $z_{\text{A}} = 1 - \text{i}$, B d'affixe $z_{\text{B}} = 3 + 3\text{i}$ et C tel que ABC soit équilatéral direct.

Pour calculer l'affixe z_{C} de C, on rédige de la façon suivante :

« C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc $\overrightarrow{\text{AC}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\overrightarrow{\text{AB}}$.

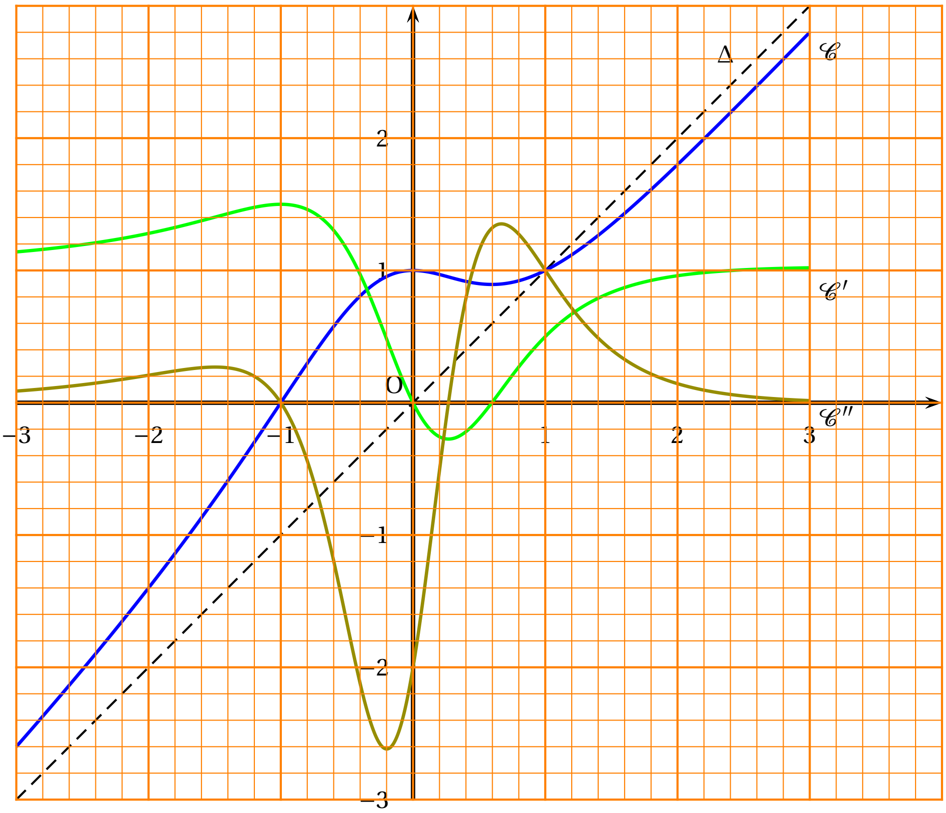
On en déduit :

$z_{\text{C}} - z_{\text{A}} = \left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_{\text{B}} - z_{\text{A}})$, soit, après calculs, $z_{\text{C}} = \left(2 - 2\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$. »

La rédaction utilisée est rigoureuse.

EXERCICE 7

On a représenté, ci-dessous, la droite Δ d'équation $y = x$ et les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ représentant respectivement une fonction f, sa dérivée f' et la dérivée f'' de f'.



a. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

b. Quel que soit le point M de $\mathscr{C}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en M est inférieur à $\dfrac{3}{2}$.

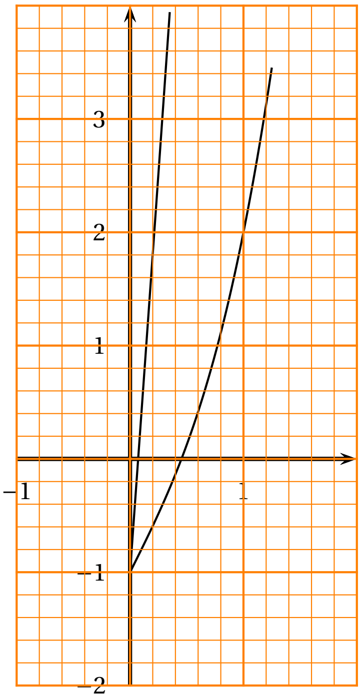
c. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)\,\text{d}x = 1$.

d. L'aire, en unités d'aire, de la surface limitée par les courbes $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ d'une part, et les droites d'équation $x = -1$, $x = 0$ d'autre part, vaut $f'(-1) + f(0)$, soit $2,5$.

EXERCICE 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^3 + 2nx - 1$ et on appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe associée à f_n dans un repère du plan.

On admet que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $[0\,;\,1]$; cette solution (dont la valeur dépend de n) sera notée α_n.
À titre d'exemple, on a schématisé ci-dessous deux courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_m$.



a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n$ est au-dessus de $\mathscr{C}_{n+1}$.

b. La suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

c. La suite $(\alpha_n)_n$ est convergente.

d. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n\alpha_n = 0$.

EXERCICE 9

On considère les suites u et v définies respectivement sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

a. La suite u est croissante.

b. La suite $u+v$ est constante.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

d. La suite u converge vers 1.

EXERCICE 10

a. On suppose que u est une suite réelle croissante.
On peut écrire, sans erreur de rigueur mathématique, que « quel que soit $n \in \mathbb{N}$, u_n est croissant ».

b. On suppose que u est une suite réelle strictement croissante.
On peut écrire, sans erreur de rigueur mathématique, que
« quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_n < (u_{n+1})_n$ ».

c. On suppose que u et v sont deux suites réelles qui possèdent la même limite.
Alors on a nécessairement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

d. On suppose que u est une suite réelle.
u est bornée si et seulement si la suite de ses valeurs absolues est majorée.

EXERCICE 11

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^4 - \text{i}z^2 + 2$.

a. L'équation $f(z) = 0$ possède les solutions $1 + \text{i}$ et $\dfrac{1-\text{i}}{\sqrt{2}}$.

b. Le produit des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est égal à 2.

c. Quel que soit $z \in \mathbb{C}$, $f\left(\overline{z}\right) = \overline{f(z)}$.

d. Si $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et si $|z| = \rho$, alors $|f(z)| = \rho^4 - \rho^2 + 2$.

EXERCICE 12

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient $a = 2 - \text{i}$ et $b = -1 + \text{i}$.
On considère les points U, A, A' et B d'affixes respectives $\dfrac{1}{2}$, a, $\overline{a}$ et b.
On appelle C le point d'affixe c tel que B soit l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. L 'homothétie de centre U et de rapport -1 transforme A en B.

b. On a $c = -1 - \text{i}$.

c. Le quadrilatère $AA'BC$ est un rectangle.

d. Les points A, A', B et C sont cocycliques.

EXERCICE 13

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle A le point d'affixe $-\text{i}$.
À tout point M d'affixe z, distinct de A et de O, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z}{z+\text{i}}$.

a. On a $\text{O}M' = \dfrac{\text{O}M}{\text{A}M}$.

b. $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{A}M}\right) \quad [2\pi]$.

c. Si M' est un point du cercle de centre O et de rayon 1, alors M est sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

d. Si M' est sur l'axe des ordonnées, alors M est sur le cercle de diamètre [OA].

EXERCICE 14

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.
Une urne contient :

- n boules blanches, dont 2 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2 ;
- $n + 1$ boules rouges, dont 3 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2 ;
- $n + 2$ boules noires, dont 4 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2.

Toutes les boules sont indiscernables entre elles au toucher.
On prélève successivement, avec remise intermédiaire, 3 boules de l'urne.
On appelle A l'évènement : « les trois boules tirées sont de la même couleur ».

a. La probabilité d'obtenir A est $\dfrac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{27(n+1)^3}$.

b. L'évènement contraire de A est : « les trois boules tirées sont de couleur deux à deux distincte ».

c. La probabilité que les trois boules tirées soient rouges est constante.

d. La probabilité que les trois boules tirées soient de couleur différente et portent chacune le numéro 1 est $\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n+1}+\dfrac{4}{n+2}$.

EXERCICE 15

a. La durée de vie d'un appareil électronique est une variable aléatoire qui suit une loi sans vieillissement de paramètre $0,03$.

Soient t et h deux réels positifs.

Sachant que l'appareil fonctionne à l'instant t, la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant $t+h$ est $1-\mathrm{e}^{0,03h}$.

b. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que la probabilité d'avoir $X \leqslant 5$ est $0,2$.

On a $\lambda = \dfrac{\ln 0,8}{\ln 5}$.

c. Une variable aléatoire X qui suit une loi sans vieillissement de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

La probabilité d'avoir X supérieur ou égal à $\ln 4$ est égale à la probabilité d'avoir X inférieur à $\ln 4$.

d. Soient deux réels a et b, $a<b$. Une variable aléatoire X suit une loi de répartition uniforme sur $[a~;~b]$.

On sait que la probabilité d'avoir X compris entre 0 et 5 est $0,2$.

On a nécessairement $a=0$ et $b=25$.

EXERCICE 16

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-2y+2z-1=0$, les points $\mathrm{A}(1~;1~;1)$, $\mathrm{B}(-1~;~5~;-3)$ et $\mathrm{C}(3~;0~;5)$.

a. Une équation du segment [AB] est $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1+t\\ y & = & 1-2t\\ .z & =1+2t & \end{array}\right.$, avec $t \in [0~;~1]$.

b. La distance de B à $\mathscr{P}$ est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

c. La sphère de centre A passant par B coupe le plan $\mathscr{P}$ en un cercle de centre A et de même rayon.

d. L'isobarycentre de {A, B, C} est un point de $\mathscr{P}$.

Concours Fesic mai 2012

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{(1-x)\left(1-\mathrm{e}^x\right)}{x}$.

a. On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

b. On a : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

c. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = -1$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

d. On a : $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} (n-1)\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = -1$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1\right)$.

a. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

b. On a : $f(x) < 0$ si et seulement si $x < 0$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on peut écrire $f(x) = 2\ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

d. La courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan possède pour asymptotes les axes du repère et la droite d'équation $y = 2x$.

EXERCICE 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n, sur $]0~;~+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(x) + 2\ln(n) - nx$ et on appelle C_n la courbe représentant f_n, dans un repère orthonormal du plan.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in]0~;~+\infty[$, on a : $f_n'(x) = \dfrac{n + 2x - xn^2}{nx}$.

b. On fixe n dans $\mathbb{N}^\star$; f_n est décroissante sur $]0~;~+\infty[$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on appelle M_n l'extremum de la courbe C_n. On note $\left(x_n~;~y_n\right)$ les coordonnées de M_n.
La suite $(x_n)_n$ est décroissante et la suite $\left(y_n\right)_n$ est croissante.

d. On fixe n dans $\mathbb{N}^\star$. La fonction F_n définie par : $F_n(x) = x\ln x - x + 2x\ln n - nx$ est la primitive de f_n sur $]0~;~+\infty[$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

EXERCICE 4

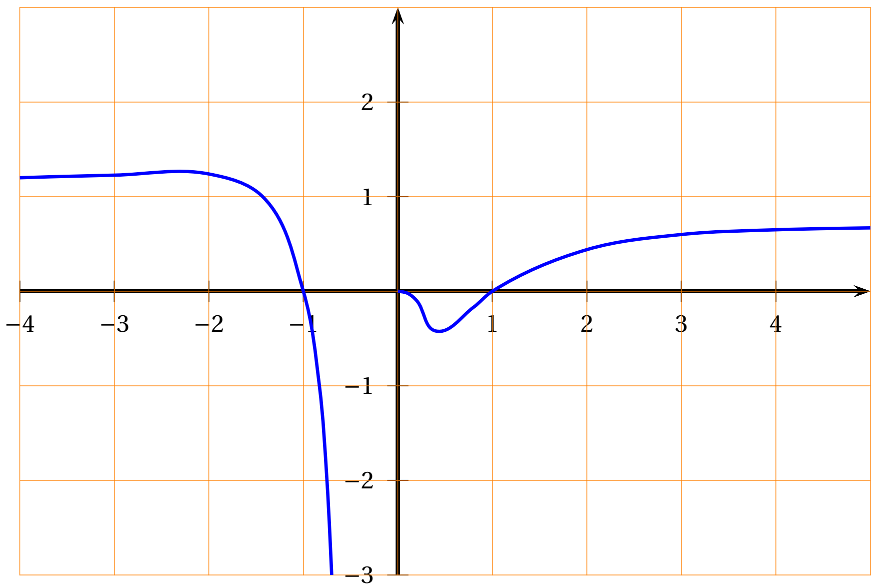
On considère la représentation graphique suivante d'une fonction f.
On appelle C la courbe représentant f et on suppose que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
On appelle f' la dérivée de f lorsqu'elle existe.

a. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 existe.

b. Quand x_0 tend vers 0 par valeurs positives, $\displaystyle\int_{x_0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.

c. La limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 1.

d. Entre 0 et 4, la fonction f' est décroissante, puis croissante, puis à nouveau décroissante.



EXERCICE 5

a. On a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

b. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} t^3 \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = 0$.

c. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sa dérivée est la fonction f' définie par $f'(x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}(x + 1 - \ln x)$.

d. La suite u définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = \left(n^2 - 1\right)\sqrt{n}$ est croissante.

EXERCICE 6

a. On cherche l'ensemble de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{15 + 2x - x^2}{x^2 + 10x + 21}\right).$$

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie si et seulement si on a $\dfrac{15 + 2x - x^2}{x^2 + 10x + 21} > 0$. Or $15 + 2x - x^2 = (3 + x)(5 - x)$ et $x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$. Il faut donc et il suffit d'avoir $\dfrac{5 - x}{x + 7} > 0$, soit $x \in]-7\,;\,5[$.

Conclusion : l'ensemble de définition cherché est $]-7\,;\,5[$. » Ce raisonnement est exact.

b. On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x^2 - x\ln\left(x^2\right)$.

On cherche à montrer que f est croissante sur I. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est dérivable sur I. Pour $x \in I$, on a $f'(x) = 2(x - 1 - \ln x)$. Or la représentation graphique de la fonction ln est située en dessous de ses tangentes en tout point. En particulier, elle est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1 qui est la droite d'équation $y = x - 1$.

On en déduit que, quel que soit $x \in I$, on a : $\ln x \leqslant x - 1$. Il s'ensuit que l'on a : $f'(x) > 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit que f est croissante sur I. » Ce raisonnement est exact.

c. On considère quatre points A, B, C et D de l'espace, deux à deux distincts. On appelle I le milieu de [AB] et, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on appelle G_m, le barycentre de $\{(\text{A}, 1), (\text{B}, 1), (\text{C}, m-2), (\text{D}, m)\}$.

On cherche à montrer que, quel que soit $m \in \mathbb{R}$, G_m est situé dans le plan (ICD). On tient pour cela le raisonnement suivant :

« I est le milieu de [AB], donc I est le barycentre de $\{(\text{A}, 1), (\text{B}, 1)\}$. Quel que soit $m \in \mathbb{R}$, et par associativité du barycentre, G_m est alors le barycentre de $\{(\text{I}, 2), (\text{C}, m-2), (\text{D}, m)\}$.

On en déduit que G_m appartient au plan (ICD). » Ce raisonnement est exact.

d. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \text{e}^{-x} - \ln x - x$. On considère la rédaction suivante qui donne le sens de variation de f.

« $f(x)$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = -\text{e}^{-x} - \dfrac{1}{x} - 1$.
$f'(x)$ est la somme de trois nombres négatifs, donc on a : $f'(x) < 0$. Il s'ensuit que $f(x)$ est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. » Cette rédaction est rigoureuse.

EXERCICE 7

On considère l'équation différentielle [E] : $y' + 2y = 4$.

a. Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. z est solution de [E] si et seulement si $z-2$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$.

b. L'application f, définie par $f(x) = 2\left(1 - \text{e}^{2(1-x)}\right)$ est une solution de [E].

c. L'application g, définie par $g(x) = 2 - \text{e}^{2x+4}$ est la solution de [E] vérifiant $g(-2) = 1$.

d. L'application h, définie par $h(x) = 2 + \left(\dfrac{1}{\text{e}^{x+1}}\right)^2$ est la solution de [E] vérifiant $h'(-1) = -2$.

EXERCICE 8

On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B.
Chaque mois, 20 % des fourmis de A passent en B et 30 % des fourmis de B passent en A.
Au bout d'un nombre de mois égal à n, on note u_n et v_n le nombre total (en milliers de fourmis) de fourmis présentes respectivement dans les fourmilières A et B.
On a dénombré que, initialement, on avait $u_0 = 320$ et $v_0 = 180$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{4}{5}u_n + \dfrac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{7}{10}v_n. \end{array}\right.$

b. La suite $s = u + v$ est une suite constante.

c. La suite $t = -2u + 3v$ est géométrique de raison 1 et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = \dfrac{-100}{2^n}$.

d. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = 200 - \dfrac{20}{2^n}$.

EXERCICE 9

Soit u une suite numérique dont aucun terme n'est nul. On définit la suite v par : $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a. Si u est convergente, alors v est convergente.

b. Si u est minorée par 1, alors v est majorée par 2.

c. Si u est majorée par 0,5 alors v est minorée par 3.

d. On suppose ici que u est définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$. Alors v est une suite géométrique.

EXERCICE 10

On considère les suites u et v définies par : $u_n = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n+\dfrac{1}{n\times n!}$.

a. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. La suite v est croissante.

c. Les suites u et v sont adjacentes.

d. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $2 \leqslant u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leqslant 3$.

EXERCICE 11

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on appelle A le point dont l'affixe est $-\mathrm{i}$.
Pour tout point M distinct de A, d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ (écriture algébrique), on associe le point M' d'affixe $z' = x'+\mathrm{i}y'$ (écriture algébrique) telle que : $z' = \dfrac{z}{z+\mathrm{i}}$.

a. On a : $x' = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+(y+1)^2}$.

b. On a : $\overline{z'} = \dfrac{z}{z+\mathrm{i}}$.

c. L'ensemble des points M tels que $z' = \overline{z'}$ est l'axe des ordonnées privé du point A.

d. M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si M appartient à la médiatrice de [OA].

EXERCICE 12

Soit a un nombre complexe non réel.
Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe a, le point B d'affixe $\mathrm{i}a$, le point C d'affixe $-a$ et le point D dont l'affixe est le conjugué de a.

a. C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

b. On a : $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}+k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-a| = |z+a|$ est la droite (AC).

d. Les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle.

EXERCICE 13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soient
$Z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2-2\mathrm{i}}$ et M le point du plan d'affixe Z.

a. Le complexe $2-2\mathrm{i}$ est de module $2\sqrt{2}$ et l'un de ses arguments est $\dfrac{\pi}{4}$.

b. On a : $\mathrm{O}M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right) = \dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $Z^n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right)\right)$.

d. Il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que le point M_n d'affixe Z^n appartienne à l'axe des abscisses.

EXERCICE 14

Le code d'entrée dans un immeuble est composé de quatre chiffres.

a. II y a 9 999 codes différents.

b. Pour éviter les erreurs de saisie, certains occupants demandent qu'un même chiffre ne puisse pas être répété deux fois consécutivement.
Il y a alors 7 290 codes différents possibles.

c. Certains occupants préféreraient que les 4 chiffres soient tous différents. II y aurait alors $\binom{10}{4}$ codes différents possibles.

d. Comme cet immeuble est situé à Paris, certains occupants souhaitent que le code choisi contienne le nombre « 75 ». Il y aurait alors 168 codes différents possibles.

EXERCICE 15

On considère un espace probabilisé $(\Omega,\ p)$ et deux évènements A et B dans Ω.
On sait que $p(A) = \dfrac{1}{5}$, que $p_A(B) = \dfrac{1}{3}$ et que $p\left(\overline{A} \cap B\right) = \dfrac{2}{3}$.

a. On a : $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{5}{6}$;

b. On a : $p\left(A \cap \overline{B}\right) = \dfrac{1}{3}$;

c. On a : $p(B) = \dfrac{11}{15}$.

d. On a : $p_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{2}{15}$.

EXERCICE 16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les plans P et Q d'équations respectives : P : $y = x + 2$ et Q : $z = 3 - 2y$.
On appelle (D) la droite d'intersection de P avec Q.

a. La droite (D) accepte pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$.

b. La droite (D) passe par le point A(- 1 ; 1 ; 1).

c. Une équation du plan contenant la droite (D) et passant par O est :
$3x + y + 2z = 0$.

d. La droite (D) coupe l'axe des ordonnées.

Concours Fesic 18 mai 2013

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1 : BASES EN ANALYSE

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

a. La dérivée de $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x}$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$.

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = +\infty$.

c. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $f' = f$, alors f est la fonction nulle.

d. Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $\mathrm{P(A)} = 0{,}2$, $\mathrm{P(B)} = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$.
A et B sont incompatibles.

EXERCICE 2 : BASES EN GÉOMÉTRIE

Pour le a. et b., on se place dans le plan complexe $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ Les questions a. et b. sont indépendantes.

a. Si $z = -6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ alors $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

b. Si M est un point d'affixe z de partie imaginaire non nulle et M′ un point d'affixe $z' = -\overline{z}$, alors M et M′ sont symétriques par rapport à O.

Pour le c. et le d., on se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace.

On pose (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $4x + 6y - 10z + 3 = 0$ et $-6x - 9y + 15z - 8 = 0$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+1 \\ y & = & -t-3 \\ z & = & 5t-1 \end{array}\right.$ où t désigne un nombre réel.

c. (P_1) et (P_2) sont sécants.

d. Le point A(2 ; 3 ; - 5) appartient à la droite (d).

EXERCICE 3 : LECTURE GRAPHIQUE

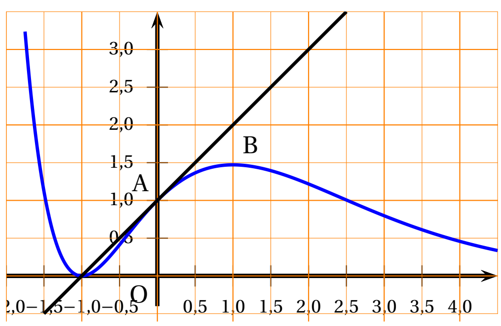
On considère la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. ainsi que la tangente à cette courbe au point A de coordonnées (0 ; 1).

a. $f'(0) = 1$.

b. $f'(1) = 1{,}5$.

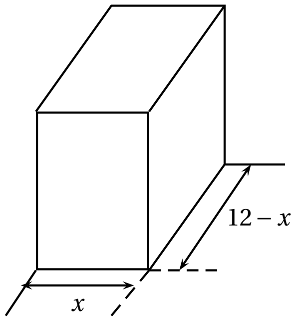
c. L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur l'intervalle $[-1{,}5\ ;\ 4]$.

c. $2 \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$.



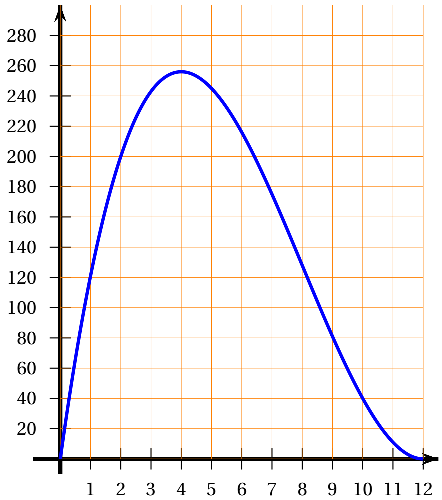
EXERCICE 4 : VOLUME D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un placard ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x, sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur.
On suppose $x \in [0\,;\,12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).



a. Le volume $V(x)$ en dm^3 de ce placard est égal à $V(x) = \left(-12x + x^2\right)(x - 12)$.

On pose f la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par
$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$
de courbe représentative (C) ci-contre.



b. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,12]$, $f'(x) > 0$.

c. $V(x) = 2f(x)$.

d. Dans le cas particulier où le parallélépipède rectangle serait un cube, son volume serait compris entre 200 et 225 dm^3.

EXERCICE 5 : UTILISATION D'UNE SUITE DANS UN ALGORITHME

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n - n) - 1$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	n est un entier naturel.
Initialisation	u prend la valeur 1 ; i prend la valeur 0.
Traitement	Tant que $i < n$ u prend la valeur $\dfrac{1}{2}(u - i) - 1$ i prend la valeur $i + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher u.

a. Pour $n = 3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	$-1/2$	1
3	$-7/4$	2
3	$-23/4$	3

b. Pour $n = 3$, l'algorithme calcule u_3.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + n$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n} + n$.

Exercice 6 : Utilisation d'un algorithme avec les nombres complexes

On se place dans le plan complexe $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	θ, a, b, a', b' sont des nombres réels.
Traitement	a' prend la valeur $a \times \cos(\theta)$. a' prend la valeur $a' - b \times \sin(\theta)$. b' prend la valeur $a \times \sin(\theta)$. b' prend la valeur $b' + b \times \cos(\theta)$.
Sortie	Afficher a'. Afficher b'.

Pour le a. et le b. on suppose $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$. 3

a. $a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b. $b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Dans toute la suite on posera M le point d'affixe $z = a + \text{i}b$ et M' le point d'affixe $z' = a' + \text{i}b'$ avec a' et b' les deux nombres obtenus dans l'algorithme précédent.

c. Si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$ alors $|z'|[= \sqrt{2}$.

d. Dans le cas général où $\theta \in \mathbb{R}$, $z' = \text{e}^{\text{i}\theta} z$.

Exercice 7 : Bases de logique

Pour le a. et le b. on suppose que z est un nombre complexe et Γ est un sous ensemble de $\mathbb{C}$.

a. $z \neq 0$ si et seulement si $\text{Re}(z) \neq 0$ et $\text{Im}(z) \neq 0$.

b. La contraposée de la proposition « si $z \in \Gamma$ alors $\text{Re}(z) = 0$ » est « si $\text{Re}(z) = 0$ alors $z \in \Gamma$ ».

Pour le c. et le d. on suppose que f est une fonction définie sur l'intervalle $\text{I} = [-3~;~5]$.

c. Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I.

d. Si f admet une primitive sur $\text{I} = [-3~;~5]$ alors f est continue sur I.

Exercice 8 : Calculs de limites

a. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = -\infty$.

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

c. Si, pour tout réel x non nul, $\dfrac{x-1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant 1$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin(x) - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}} = 1$.

Exercice 9 : Calculs d'intégrales

a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\text{d}x = 4 + 2\sqrt{2}$.

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\text{d}x = \ln 2$.

c. La fonction $x \longmapsto \left(x^2-2x+2\right)\text{e}^x-2$ est une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x^2\text{e}^x$.

d. $\displaystyle\int_0^1 x^2\text{e}^x\,\text{d}x = 3\text{e}-2$.

EXERCICE 10 : NOTIONS DE BASES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

On se place dans le plan complexe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On considère A le point d'affixe $z_\text{A} = -2\text{i}$, B le point d'affixe $z_\text{B} = -2$ et E le point d'affixe $z_\text{E} = 2+2\text{i}\sqrt{3}$.

a. L'écriture trigonométrique de $z_\text{E} = 2+2\text{i}\sqrt{3}$ est $4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. E est situé sur le cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+2\text{i}| = |2+z|$ est la médiatrice du segment [AB].

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2z\overline{z} = 1$ est un cercle de rayon 2.

EXERCICE 11 : UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = 1+\dfrac{\text{i}}{z}$.

a. L'image par f du point A d'affixe $z_\text{A} = 1+\text{i}$ est le point A′ d'affixe $z_{\text{A}'} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$.
Dans toute la suite, on pose $z = x+\text{i}y$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z' = x'+\text{i}y'$ avec x', y' réels.

b. $\text{Re}(z') = x' = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$.

c. $\text{Im}(z') = y' = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

d. L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que z' soit imaginaire pur est le cercle (C) de centre $\text{A}\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$, privé du point O.

EXERCICE 12 : ÉTUDE D'UNE FONCTION LOGARITHME

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$. On note D l'ensemble de définition de f.

a. $1-x^2 > 0$ si et seulement si $-1 < x < 1$.

b. $\text{D} = [-1\ ;\ 1]$.

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur D par $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

d. L'équation $f(x) = 1$ a pour solutions $x = \sqrt{\text{e}-1}$ et $x = -\sqrt{\text{e}-1}$.

EXERCICE 13 : ÉTUDE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\text{e}^{2x}}{x^2+1}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f'définie sur $\mathbb{R}$ par
$f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1\right)\right)^2}$.

d. f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 14 : BASES EN PROBABILITÉS

On considère, dans a., deux évènements E et F d'une même expérience aléatoire.

a. $P_{\overline{F}}(E) = 1 - P_F(E)$.

Pour les questions b, c et d, nous utiliserons les hypothèses suivantes : une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne.
Si la boule est blanche, il lance un dé tétraédrique dont les faces numérotées de 1 à 4 ont la même probabilité d'apparition.
Si la boule est noire, il lance un jeton dont les faces numérotées de 1 à 2 ont la même probabilité d'apparition.
On considère les évènements suivants :
G : « Le joueur obtient le numéro 1 » ; B : « Le joueur tire une boule blanche ».

b. $P'(B \cap G) = \dfrac{5}{32}$.

c. $P(G) = \dfrac{13}{32}$.

d. $P_G(B) = \dfrac{5}{11}$.

EXERCICE 15 : DIFFÉRENTES LOIS DE PROBABILITÉS

a. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 5]$. $P\left(1 \leqslant X \leqslant \dfrac{5}{2}\right) = 0,4$.

b. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $P(Y > c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$.

c. Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$. $P(T \leqslant 10) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

d. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ et vérifiant $P(0 \leqslant Z \leqslant 2) = 0,75$. La loi de Z n'est pas la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

EXERCICE 16 : REPÉRAGE DANS L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y + 3z - 2 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t, $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1 + 2t \\ y & = & 2 - t \\ z & = & -3 - t \end{array}\right.$

a. Le point A$(-1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ appartient à D.

b. Le plan P et la droite D sont sécants au point B de coordonnées $(-3\ ;\ 4\ ;\ -1)$.

c. La droite D$'$, de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & k \\ y & = & -2k + 1 \\ z & = & k \end{array}\right.$ pour tout réel k, est sécante au plan P.

d. Les droites D et D$'$ sont coplanaires.

∽ Concours Fesic–Puissance 11 – 17 mai 2014 ∾

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1 : BASES EN ANALYSE

Les questions sont indépendantes.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{x}{\text{e}^x}$ est $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\text{e}^x}$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = \dfrac{x}{\text{e}^x} = +\infty$.

Soit f une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\text{e}^x}$.

c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

d. La suite (u_n) converge vers 0.

EXERCICE N° 2 : BASES EN GÉOMÉTRIE

Les questions sont indépendantes. Soit (P) et (Q) les plans d'équations respectives

$$(P) : 2x + y + z = 2 \quad \text{et} \quad (Q) : x + y - z = 0.$$

a. L'intersection des plans (P) et (Q) a pour équation $x + 2z = 2$.

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est

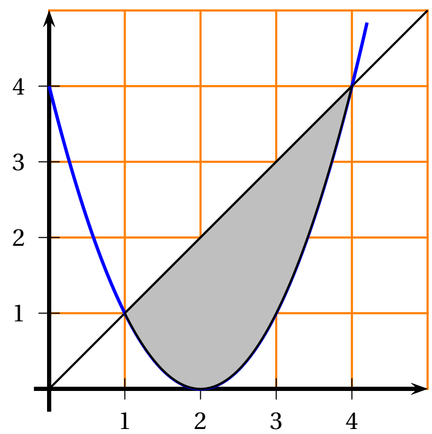
$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t+3\\ y &=& -t-1 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 2\end{array}\right.$$

b. (D) est perpendiculaire au plan (R) d'équation $x - y + 2z = 0$.

c. Sur le graphique ci-contre, nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto (x-2)^2$.

L'aire A du domaine hachuré est égale à $A = \dfrac{9}{2}$ unités d'aire.

d. La courbe représentative de la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2 - x + 3}{x-1}\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$.



EXERCICE N° 3 : LECTURE GRAPHIQUE

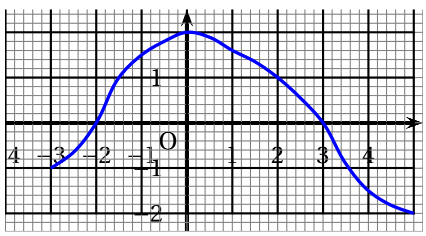
f est une fonction définie et dérivable sur $[-3\,;\,5]$ de courbe représentative (C). On donne ci-dessous la courbe (Γ) représentative de sa fonction dérivée f'.

a. (C) admet une tangente horizontale en $x = 0$.

b. f admet un minimum relatif en $x = -2$.

c. La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,5]$.

d. Les tangentes à (C) aux points d'abscisses $-\dfrac{3}{2}$ et 2 sont parallèles.



EXERCICE N° 4 : SUITE DÉFINIE PAR UN ALGORITHME

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) où u_n est le réel affiché par l'algorithme ci-contre lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

a. $u_3 = 11$.
b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
c. La suite (u_n) est strictement croissante.
d. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 2$.

```
VARIABLES
   u EST DU TYPE NOMBRE
   n EST DU TYPE NOMBRE
   k EST DU TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
   LIRE n
   u PREND LA VALEUR 2
   k PREND LA VALEUR 0
TANT OUE (k < n) FAIRE
     DEBUT TANT OUE
     k PREND LA VALEUR k + 1
     u PREND LA VALEUR u + 2 ⋆ (k − 1) + 1
     FIN TANT OUE
AFFICHER u
FIN ALGORITHME
```

EXERCICE N° 5 : BASES SUR LES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère les nombres complexes $z_1 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + \text{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ et $z_2 = \dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{3}+\text{i}}$.

a. $z_1^2 = 8\sqrt{3} + 8\text{i}$.
b. $|z_2| = \sqrt{2}$.
c. $\arg\left(z_1^2\right) = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.
d. $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

EXERCICE N° 6 : BASES DE LOGIQUE

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. x et y sont deux nombres réels et z est le nombre complexe $x + \text{i}y$.

a. La négation de la proposition : « $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ » est la proposition « $x < 0$ et $y < 0$ ».
b. Si $x = y$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π.
c. La réciproque de la proposition précédente est vraie.
d. On suppose $z \neq 0$. Si $z = \dfrac{1}{z}$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.

EXERCICE N° 7 : CALCULS DE LIMITES

a. La fonction $x \longmapsto x \times \sin(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+2}{\cos(x)+x} = 1$.
c. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\text{e}^x+3x}{x+1} = 0$.
d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 1$.

EXERCICE N° 8 : CALCULS D'INTÉGRALES

a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{x^2}\,\text{d}x = \frac{5}{4}$.

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

b. La fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = 1 + \dfrac{\ln\left(x^2+2x\right)}{2}$ est une primitive de f.
c. $\displaystyle\int_2^{\text{e}} \frac{1+t}{t^2}\,\text{d}t = 2 - \frac{1}{\text{e}}$.

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

EXERCICE N° 9 : TRANSFORMATION COMPLEXE

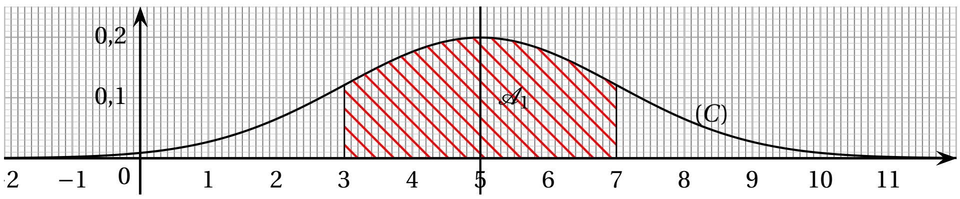
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 1.$$

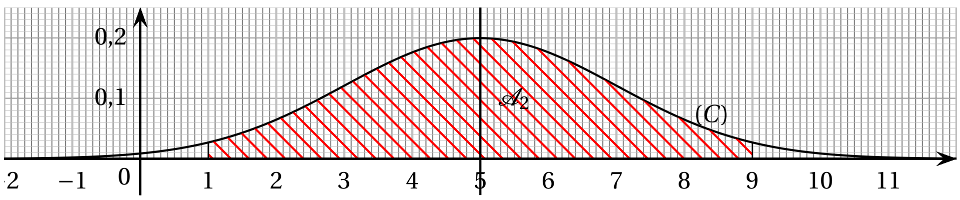
a. L'image, par f, du point B d'affixe 2 est le point C d'affixe $3+2\mathrm{i}$.
b. Le point A d'affixe i est le seul point invariant par f.
c. L'image, par f, de l'axe des réels est la droite (BC).
d. Soit D le point d'affixe 1. Pour tout point M distinct de A et de D, le triangle DMM' est isocèle en M.

EXERCICE N° 10 : LOI NORMALE

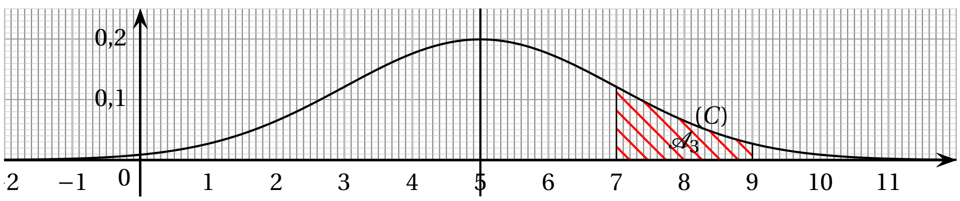
Dans tout l'exercice, on suppose T une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ avec μ et σ deux entiers naturels.
La densité de probabilité de cette loi, notée f, est représentée ci-dessous par la courbe (C).
On suppose que (C) admet la droite $x = 5$ comme axe de symétrie et que l'aire du domaine $\mathcal{A}_1$ (représenté en gris) est environ égale à 0,68.



a. $\mu = 5$ et $\sigma = 4$.
b. L'aire du domaine $\mathcal{A}_2$, représenté ci-dessous, est environ égale à 0,8.



c. L'aire du domaine $\mathcal{A}_3$ représenté ci-dessous, est environ égale à 0,135.



d. On admet, dans cette question, que $P(T \in [\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]) \approx 0,95$.

$P(T \leqslant 9) \approx 0,975$.

EXERCICE N° 11 : NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
À chaque point M d'affixe $z \neq 0$, on associe l'unique point M' d'affixe z' tel que,

$$z' = \left(\frac{\overline{z}}{|z|}\right)^2.$$

a. En posant $z = x + \text{i}y$,avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, et $z' = x' + \text{i}y'$, on a : $x' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.
b. M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si M appartient à la droite d'équation $y = x$ privée de O.
c. M' est un point du cercle trigonométrique.
d. M' a pour affixe -1 si et seulement si $z = \text{i}$ ou $z = -\text{i}$.

EXERCICE N° 12 : ÉTUDE D'UNE FONCTION LOGARITHME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$

de courbe représentative $(\mathscr{C})$.
a. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
b. $(\mathscr{C})$ admet une unique asymptote verticale.
c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.
d. Il existe deux points de $(\mathscr{C})$ ayant une tangente à $(\mathscr{C})$ parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x - \ln 7$.

EXERCICE N° 13 : ÉTUDE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x$.
On désigne par $\left(C_f\right)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

a. Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 2\right)$.
b. Pour tout réel x, on a : $f(x) > \dfrac{3}{2}$.
c. $\left(C_f\right)$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.
d. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE N° 14 : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Un joueur effectue des parties successives d'un jeu vidéo.

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,2$.
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,7$.
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,5$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'évènement : « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

a. $p_2 = 0,54$.
b. Le joueur gagne la deuxième partie. La probabilité qu'il ait perdu la première est $0,6$.
c. Pour tout entier naturel n non nul, on a $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{2}$.
Pour le **d.**, on donne l'algorithme ci-dessous :

```
Variables
    n EST DU TYPE NOMBRE
    p EST DU TYPE NOMBRE
    i EST DU TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
    LIRE n
    p PREND LA VALEUR 0,2
    POUR i ALLANT DE 2 À n
        DÉBUT POUR
        p PREND LA VALEUR 0,2 ⋆ p + 0,5
        FIN POUR
    AFFICHER p
FIN ALGORITHME
```

d. Si on teste le programme pour $n = 5$ alors cet algorithme restitue la probabilité que le joueur gagne la cinquième partie.

EXERCICE N° 15 : DIFFÉRENTES LOIS DE PROBABILITÉS

Les quatre questions sont indépendantes.

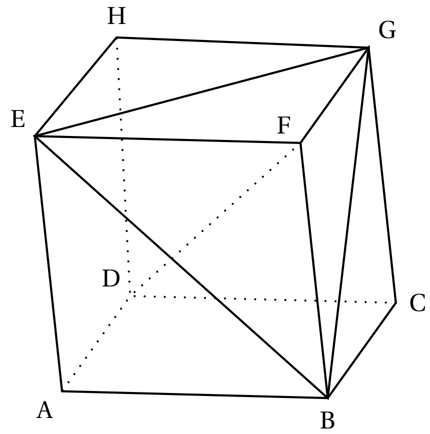
a. Soit $t > 0$. Si X suit une loi uniforme sur $[0\,;\, t]$ telle que $p(X < 5) = 0,4$ alors $t = 20$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\, 0,3)$ d'espérance 12, alors $n = 40$.
c. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-3}$, alors $\mathrm{E}(X) = 5\,000$.
d. On considère A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Si $P_B(A) = P_A(B)$, alors $p(A) = p(B)$.

EXERCICE N° 16 : REPÉRAGE DANS UN CUBE

Dans le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, on considère le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\,,\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

On rappelle que :

- Le plan médiateur d'un segment est le plan passant par le milieu de ce segment tout en lui étant perpendiculaire.
- Si M est un point de l'espace et (P) un plan de l'espace, on appelle distance du point M au plan (P) la plus petite distance d entre le point M et un point H du plan (P).



a. (GDF) est le plan médiateur du segment [EB].

b. Le plan (BEG) a pour équation : $x-y+z=1$.

c. $\text{I}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (DF) avec le plan (BEG).

d. La distance du point D au plan (BEG) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Concours Fesic–Puissance 11 – 16 mai 2015

Calculatrice interdite ; traiter 12 *exercices sur les* 16 *en* 2 *h* 30 *; répondre par Vrai ou Faux sans justification.* +1 *si bonne réponse,* −1 *si mauvaise réponse,* 0 *si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.*

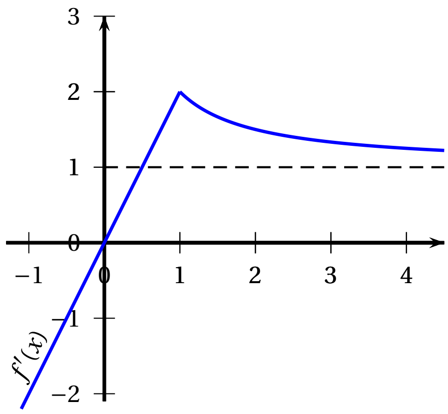
EXERCICE 1

Étude de fonction

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de courbe représentative (Γ) dont la fonction dérivée f' a pour représentation graphique la courbe ci-contre.

On admet que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



a. La courbe (Γ) admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

b. Pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 1]$, $f(x) = x^2$.

On suppose dans le c. et d. que (Γ) passe par $\Omega(1\ ;\ 1)$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

d. $f(2) = \ln 2 + 2$.

EXERCICE 2

Fonction définie par deux paramètres

Soit a et b deux réels strictement positifs fixés et f la fonction définie sur $I = [-a\ ;\ a]$ par $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ de courbe représentative (Γ).

a. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{b}{2 \times \sqrt{a^2 - x^2}}$.

b. Si $a = 6$ et $b = 3$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 3$.

c. Si $a = b = 1$, alors l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux solutions sur I.

d. Si $a = b$ alors (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = x - 5$.

EXERCICE 3

Bases de la géométrie

Les questions suivantes sont indépendantes.

a. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Si la droite (D) a pour équation paramétrique $\begin{cases} x &= t \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{cases}$ avec t réel, alors le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ est un vecteur directeur de (D).

b. Soit $a > 0$. Si ABC est un triangle équilatéral direct de côté a, alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \dfrac{a^2}{2}$.

Pour le **c.** et **d.**, on suppose que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

c. Le nombre $(1 + \mathrm{i})^4$ est un nombre réel négatif.

d. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z + 4 - 3\mathrm{i}| = 5$ est un cercle passant par l'origine du repère.

EXERCICE 4

Questions de logique

Agnan, Clotaire, Eudes, Geoffroy et Rufus ne s'entendent pas tous très bien. Pour la fête d'anniversaire qu'organisait le petit Nicolas, ils avaient prévenu :

- Clotaire refuserait de venir si Rufus était présent.
- Eudes ne viendrait que s'il était accompagné d'Agnan ou de Rufus.
- Quant à Geoffroy et Agnan, ils n'iraient nulle part l'un sans l'autre.

a. Si Clotaire n'est pas venu à la fête, alors Rufus était présent.
b. Si Rufus était absent, alors Clotaire est venu à la fête.
c. Si Agnan est venu, alors Geoffroy et Eudes aussi.
d. Si Eudes et Clotaire sont venus, alors Geoffroy était lui aussi présent.

EXERCICE 5

Petite démonstration

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ de courbe représentative (Γ) et $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

a. Pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2x(1-x)}{(1-2x)^2}$.
b. (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = -x+5$.
c. Si $x \in I$, la fonction $k\,:\,x \longmapsto \ln(f(x))$ admet comme dérivée la fonction $k'\,:\,x \longmapsto \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{2x-1}$.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (u_n) par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2}{2u_n-1} \end{array}\right.$.
Afin d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) on effectue le raisonnement suivant :
« Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite démontrer la relation « $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ».
Si $x \in I$, alors $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur I.
Supposons que la relation soit vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{k+1} - u_k > 0$.
Par définition de la suite (u_n) nous avons $u_{k+2} = f(u_{k+1})$ et $u_{k+1} = f(u_k)$ avec f strictement croissante sur I ; donc si $u_{k+1} > u_k$ alors nous pouvons en déduire que $u_{k+2} = f(u_{k+1}) > u_{k+1} = f(u_k)$ soit $u_{k+2} > u_{k+1}$ ce qui nous permet de conclure que la relation est vraie au rang $k+1$.
Conclusion : la relation est héréditaire et, comme la fonction f est strictement croissante sur I, nous pouvons en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante ».
Ce raisonnement est correct.

EXERCICE 6

Calculs de limites

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$.
b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$.
c. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x - x - 1}$. La courbe (Γ) représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sin(n) - 2n}{n+1}$ converge vers 0.

EXERCICE 7

Calcul intégral

a. $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3 + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

b. $K = \displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{20}$.

c. Soit α un réel strictement positif, $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \alpha - \ln(1+\alpha)$.

d. Soit $L = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} -x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. On a : $\mathrm{e}^2\left(1-\mathrm{e}^2\right) \leqslant L \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\left(1-\mathrm{e}^2\right)$.

EXERCICE 8

Fonction exponentielle

Soit F_1 et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$F_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(x+1)}{\mathrm{e}^{-x}+2}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction F_1 et par (x_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = g\left(x_n\right)$.

a. L'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution α avec $0 < a < 1$.

Dans les questions **b.**, **c.** et **d.**, on admet la convergence de la suite (x_n).

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x_n = \alpha$.

c. Si $a \in \mathbb{R}$, alors la tangente à (C) en $x = a$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $g(a)$.

On donne le programme Prog ci-contre :

d. Pour $n = 5$, Prog affiche 0,3125 et 0,375, nous pouvons en déduire que $0{,}3125 < \alpha < 0{,}375$.

```
VARIABLES
    A EST_DU_TYPE NOMBRE
    B EST_DU_TYPE NOMBRE
    I EST_DU_TYPE NOMBRE
    F_A EST_DU_TYPE NOMBRE
    F_B EST_DU_TYPE NOMBRE
    F_I EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
    A PREND_LA_VALEUR 0
    B PREND_LA_VALEUR 1
    I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
    F_A PREND_LA_VALEUR F_1(A)
    F_B PREND_LA_VALEUR F_1(B)
    F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
    TANT QUE (abs(A − B) > 0,1) FAIRE
      DÉBUT TANT QUE
      SI (F_A * F_I > 0) ALORS
      DEBUT_SI
      A PREND_LA_VALEUR I
      F_A PREND_LA_VALEUR F_1(A)
      I PREND_LA_VALEUR (A + B)/2
      F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
      FIN_SI
      SINON
         DÉBUT_SINON
         B PREND_LA_VALEUR I
         F_B PREND_LA_VALEUR F_1(B)
         I PREND_LA_VALEUR (A + B)/2
         F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
         FIN_SINON
      FIN_TANT_QUE
    AFFICHER A
    AFFICHER B
FIN_ALGORITHME
```

EXERCICE 9

Fonction exponentielle et logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^x}$, g la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1)\times\ln(x-1)$ et φ la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

a. $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.
b. $\varphi'(x) = \dfrac{g\left(x^2\right)}{x^2}$.
c. g admet un minimum en $x = \text{e} + 1$.
On admet qu'il existe une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$ sur $]\text{e}+1\ ;\ +\infty[$.
d. $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

EXERCICE 10

Suite et trigonométrie

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in N$, par $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)$.
a. Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+8} > u_n$.
b. Pour tout entier naturel n, on a : $-3 \leqslant u_n \leqslant 3$.
c. La suite (u_n) est monotone.
d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$.

EXERCICE 11

Suite de nombres complexes

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ et on considère la suite
(z_n) de nombres complexes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 2 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\text{i}}{2} z_n \end{array}\right.$
On pose A_n le point d'affixe z_n et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) par $u_n = |z_n|$.
a. La suite (u_n) est géométrique.
b. Pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \text{i}$.
c. À partir du rang $n = 4$, le point A_n appartient au disque de centre O et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$.
d. Pour tout entier naturel n, le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est isocèle et rectangle.

EXERCICE 12

Géométrie et complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On définit A et B deux points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$ et T la transformation complexe du plan qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 2\text{i}}{z}$.

a. L'image du point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ par la transformation T est le point d'affixe $1 + 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
b. L'ensemble des points M du plan complexe tels que $\text{O}M' = 1$ représente la médiatrice du segment [OB].
c. M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1 si et seulement si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon $R = 2$.
d. z' est un nombre complexe imaginaire pur si et seulement si le point M appartient au cercle de diamètre [OB].

EXERCICE 13

Variables aléatoires réelles : Cours - Calculs

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

a. Pour tout entier naturel n, on a : $P(X > n) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$.
b. Pour tout entier naturel n, on a : $P_{X>n}(X > n+1) = P(X < 1)$.
Soit $\sigma > 0$, Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(9\,;\,\sigma^2\right)$ et Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y-9}{\sigma}$
c. Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
d. $P(7 \leqslant Y \leqslant 11) = 2P\left(0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right)$.

EXERCICE 14

Probabilités conditionnelles

Un acteur est sujet à des trous de mémoire.
S'il relit son texte avant d'entrer en scène, la probabilité qu'il ait un trou de mémoire pendant la représentation vaut $\dfrac{1}{9}$, tandis que s'il ne relit pas son texte, cette probabilité vaut $\dfrac{1}{3}$.
S'il a eu un trou de mémoire au cours d'une représentation, il relit forcément son texte avant la représentation suivante ; mais s'il n'a pas eu de trou de mémoire, il ne relit son texte qu'avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$.
On suppose que l'acteur a relu son texte le soir de la première représentation.

a. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation est de $\dfrac{1}{9}$.
b. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire à la deuxième représentation est de $\dfrac{25}{81}$.
c. Sachant qu'il n'a pas eu de trou de mémoire le soir de la première, la probabilité qu'il n'en ait pas eu non plus à la deuxième représentation est de $\dfrac{7}{9}$.

On note p_n (n étant un entier naturel non nul) la probabilité de l'évènement « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la n-ième représentation ».
d. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad p_{n+1} = \dfrac{2-p_n}{9}$.

EXERCICE 15

Logique et géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et m et p sont deux réels.
On définit le plan (P) ayant pour équation cartésienne $x-y+2z-3=0$ et (Δ) la droite passant par le point A de coordonnées $(2\,;\,p\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\m\\1\end{pmatrix}$.

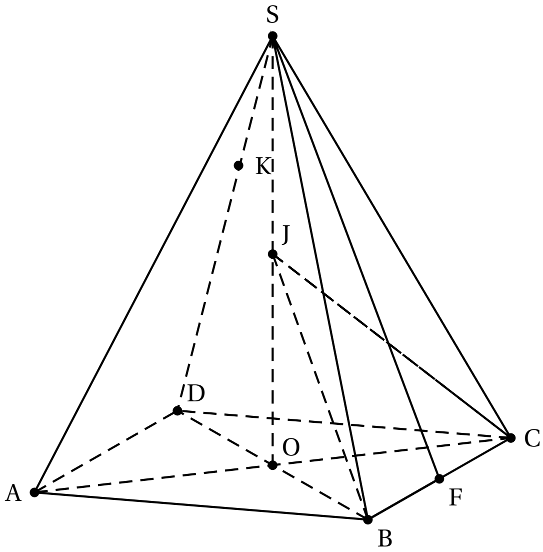
a. Il existe au moins un réel m tel que (Δ) soit parallèle à (P).
b. Si $m = 1$, alors il existe au moins un réel p tel que $(\Delta) \cap (P) = \emptyset$.
c. Si $m \neq 1$, alors pour tout réel p, $(\Delta) \cap (P) \neq \emptyset$.
d. Si $p = 1$, alors pour tout réel m, $(\Delta) \cap (P) = \{\mathrm{A}\}$.

EXERCICE 16

Orthogonalité dans l'espace

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD.
Le point O est le centre du carré ABCD, J est le milieu du segment [SO], F est le milieu du segment [BC] et K est le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{SK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SD}}$.

a. $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et
$\overrightarrow{BJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SD}$.
b. B, K et J sont alignés.
c. Les plans (BJC) et (SAD) sont sécants suivant une droite (Δ) orthogonale à la droite (SF).
Pour le **d.**, on suppose que BD = SO et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(O~;~\overrightarrow{OB},~\overrightarrow{OC},~\overrightarrow{OJ}\right)$.
d. La droite (KJ) coupe le plan (P) d'équation cartésienne
$2x+3y-z+4=0$ au point Ω de coordonnées $(-1~;~0~;~2)$.

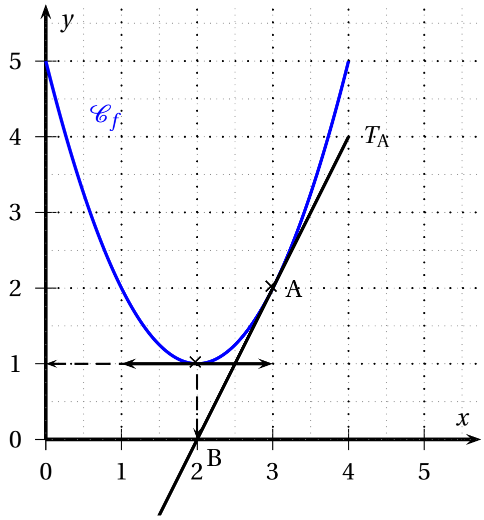


Concours Fesic–Puissance 11 – 14 mai 2016

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.
+1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1 **LECTURE-INTERPRÉTATION ÉNONCÉ**

Soit f une fonction définie, dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 4]$. On pose $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et g la fonction définie sur $[0\,;\ 4]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
La tangente T_{A} au point A$(3\,;\ 2)$ passe par le point B$(2\,;\,0)$.



a. $f'(2) = 1$.
b. $f'(3) = f(3)$.
c. Une équation de T_{A} est $y = 2x + 2$.
d. $g'(3) = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 2 **LOGIQUE**

Soit x un réel donné.
a. Si $\sqrt{x} = 2$ alors $|x| = 4$.
b. La réciproque du a. est toujours vraie.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I = [-3\ ;\ 7]$.
c. Si,pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ et $f(-3) = 1$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$.
d. Si une suite est croissante et admet une limite finie alors e11e est nécessairement bornée.

EXERCICE 3 **PROBABILITÉS CONDITIONNELLES**

On joue avec deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Le premier dé, D_1, est un dé « honnête » c'est-à-dire pour lequel la sortie de chacune des faces est équiprobable.
Le deuxième dé, D_2, est truqué de façon que :
- la face numérotée 1 et la face numérotée 4 ont une chance sur douze de sortir ;
- la face numérotée 3 a une chance sur quatre de sortir.

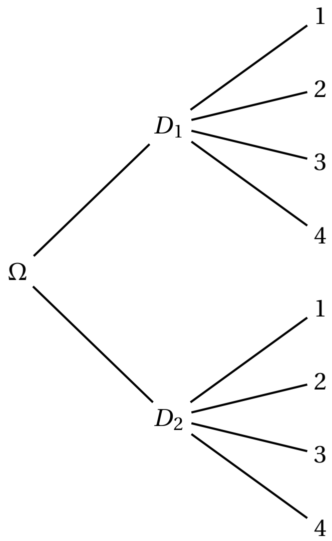
a. On lance le dé n° 2 , la probabilité de l'évènement « on a obtenu la face numérotée 2 » est égale à $\dfrac{7}{12}$.

Dans toute la suite, on lance un dé pris au hasard.

b. La probabilité d'obtenir l'évènement « on a obtenu la face numérotée 1 » est égale à $\dfrac{1}{9}$.

c. Les évènements « on a obtenu un numéro pair » et « on a utilisé le dé D_1 » sont indépendants.

d. Sachant qu'on a obtenu la face numérotée 1, la probabilité qu'on ait utilisé le dé D_1 est égale à $\dfrac{3}{4}$.



EXERCICE 4 **LIEN ENTRE TABLEAU ET ARBRE DE PROBABILITÉS**

Dans un lycée, les 200 élèves de Terminale se répartissent suivant les 3 activités : sport (S), théâtre (T) et dessin (D).

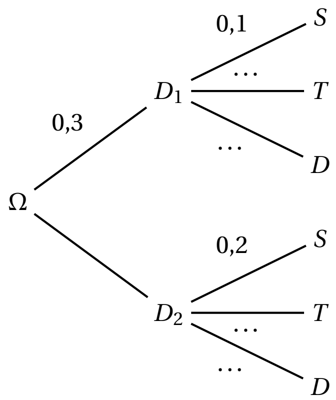
On donne les informations suivantes :

- 20 garçons choisissent le théâtre et 34 garçons choisissent le dessin.
- 28 filles choisissent le sport et 72 filles choisissent le dessin.
- Le nombre total de garçons représente 30 % de J'effectif total.
- Le sport est choisi par 10 % des garçons et par 20 % des filles.
- On pose x le nombre total de filles.

On note G l'évènement « l'élève est un garçon », F l'évènement « l'élève est une fille », S l'évènement « l'élève fait du sport », T l'évènement « l'élève fait du théâtre » et D l'événement « l'élève fait du dessin ».

On rassemble les informations précédentes dans le tableau et l'arbre ci-dessous.

	Garçons (G)	Filles (F)	Total
Sport (S)		28	
Théâtre (T)	20		
Dessin (D)	34	72	
Total		x	200



a. La probabilité qu'un garçon fasse du sport est égale à $0,1$.

b. $x = 160$.

c. La probabilité qu'un élève fasse du théâtre est égale à $0,3$.

d. $P_T(F) = \dfrac{2}{5}$.

EXERCICE 5 **CALCUL DU NOMBRE D'ABONNÉS D'UNE SOCIÉTÉ**

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

- chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés ;
- chaque année, 40 % des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1 500 abonnés.
La suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2010+n$.
On définit la suite (v_n) par $v_n = a_n - 1\,000$.

a. $a_1 = 1\,300$.
b. $a_{n+1} = 0{,}6 \times a_n + 400$.
c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}4$.
d. $a" = 500 \times 0{,}6^{n-1} + 1\,000$.

EXERCICE 6 **CALCULS DE LIMITES**

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - 4x + 7 = -\infty$.
b. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) - 3 \leqslant 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3}{3^n+2} = \dfrac{3}{2}$.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+(-1)^n} = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 7 **NOTIONS DE BASE SUR LES COMPLEXES**

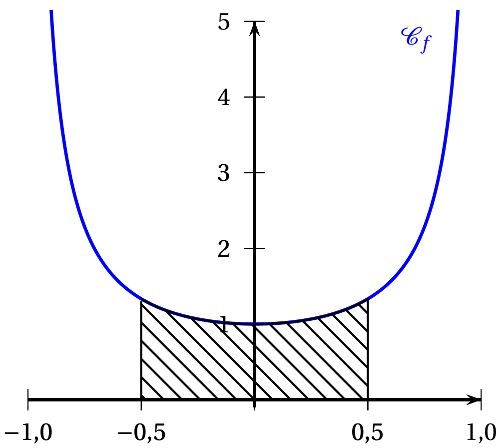
a. $(2\mathrm{i})^4 = -16$.
b. La forme trigonométrique de $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ est $-3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.
c. Soit z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2|$.
d. $\arg\left(\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -\dfrac{7\pi}{6} \quad [2\pi]$.

EXERCICE 8 **CALCULS D'INTÉGRALES**

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$.
c. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 3}{2}$.
d. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2$.

EXERCICE 9 **ÉTUDE DE FONCTION**

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (fig. ci-contre).



a. La dérivée de f est définie sur $]-1\,;\,1[$ par $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$.

b. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $x = 0,5$ est parallèle à la droite (D) d'équation $16x - 9y - 7 = 0$.
c. La fonction F définie sur $]-1~;~1[$ par $F(X) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est une primitive de f.
d. L'aire du domaine (hachuré sur la figure) compris entre les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ vaut, en unités d'aires du repère, $\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

EXERCICE 10 **PROBLÈME AUTOUR DE LA FONCTION EXPONENTIELLE**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 5x + 4.$$

On définit f' la dérivée de f et f'' la dérivée de f'.

a. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 5$ et $f''(x) = 2\mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
b. $2\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \iff x < \ln 2$.
c. La fonction f' est croissante sur $[0~;~+\infty[$.
d. f est décroissante sur $[0~;~+\infty[$.

EXERCICE 11 **PROBLÈME AUTOUR DE LA FONCTION LN**

On considère la fonction f définie sur $I =]5~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+1) - 3\ln(x-5) + 5.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

a. $f'(x) = \dfrac{4x+13}{(2x+1)(5-x)}$.
b. $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 5$ comme asymptote verticale.
c. $f(x) = \ln\left[\dfrac{\mathrm{e}^{5}(2x+1)}{(x-5)^3}\right]$.
d. $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 5$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

EXERCICE 12 **UTILISATION DES ALGORITHMES DANS UNE SUITE**

Soit N un entier naturel.
On considère l'algorithme ALGO n° 1 ci-contre :
Par exemple, si on saisit la valeur 2 pour N, l'algorithme affiche le nombre 9 comme valeur de U.

Variables	N	I	U
Initialisation	2	—	1
Boucle pour	2	1	4
	2	2	9

```
ALGO n° 1

Début programme
    Lire N
    U prend la valeur 1
    Pour I allant de 1 à N
        Début Pour
        U prend la valeur U + 2 × I + 1
        Fin Pour
    Afficher U
Fin du programme
```

```
ALGO n° 2

Début programme
    Lire N
    U prend la valeur 1
    I prend la valeur 0
Tant que I < N Faire
        Début Tant que
        U prend la valeur U + 2 × I + 1
        I prend la valeur I + 1
        Fin Tant que
    Afficher U
Fin du programme
```

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

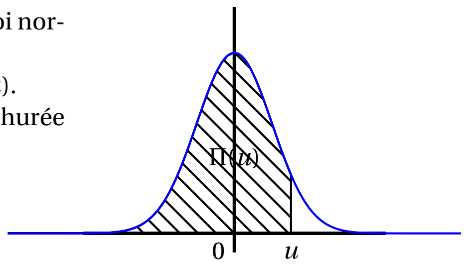
a. L'algorithme ALGO n° 1 permet d'afficher la valeur de u_N connaissant N.
b. $u_4 = 16$.
c. L'algorithme ALGO n° 2 permet d'afficher la valeur de u_N connaissant N.
d. Pour tout entier naturel n,
$u_n = (n+1)^2$.

EXERCICE 13 — PROBABILITÉS CONTINUES

La durée de vie (exprimée en années) d'un appareil électroménager avant la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Pour tout réel t strictement positif, $p(X \geqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
b. Si la probabilité d'avoir une panne la première année est égale à 0,2, alors
$\lambda = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0\,;\,\sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$.
Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose $\Pi(u) = P(Y \leqslant u)$.
$\Pi(u)$ représente l'aire de la surface hachurée ci-contre.



c. $P(0 \leqslant Y \leqslant \sigma) > 0,4$.
d. $\Pi(-\sigma) \leqslant \dfrac{1}{10}$.

EXERCICE 14 — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$, on donne les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives (P) : $x + y + 3z = 1$ et (Q) : $-y + 2z = 4$.

(D) est la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -5t+1\\ y & = & 2t\\ z & = & t-1\end{array}\right.$ pour tout t réel.

a. Le plan (Q) est orthogonal à l'axe des abscisses.
b. Les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite Δ.
c. Une équation cartésienne de Δ est $x + 5z = 5$.
d. D est parallèle à Δ.

EXERCICE 15 — UTILISATION DES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = 2-3\text{i}$, $z_{\text{B}} = \text{i}$, $z_{\text{C}} = 6-\text{i}$ et $z_{\text{D}} = -2+5\text{i}$.

a. $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}} = \text{i}$.

b. Le triangle ABC est équilatéral.

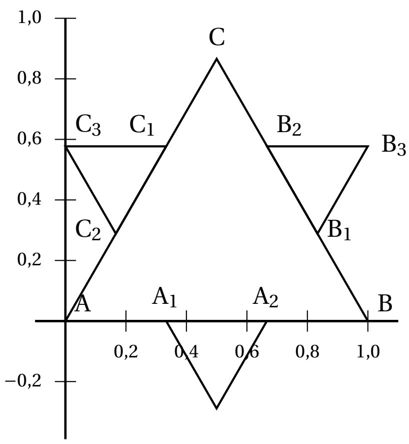
x et y désignent deux nombres réels, on note f la fonction qui, à tout point M d'affixe $z = x+\text{i}y$ distinct de i, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}(z-2+3\text{i})}{z-\text{i}}$.

c. La partie imaginaire de z' est $\dfrac{x^2-2x+y^2+2y-3}{x^2+(y-1)^2}$.

d. L'ensemble γ des points M d'affixe z tels que z' soit un réel est une droite.

EXERCICE 16 — UTILISATION DES ALGORITHMES EN GÉOMÉTRIE

On effectue le programme de construction ci-dessous :

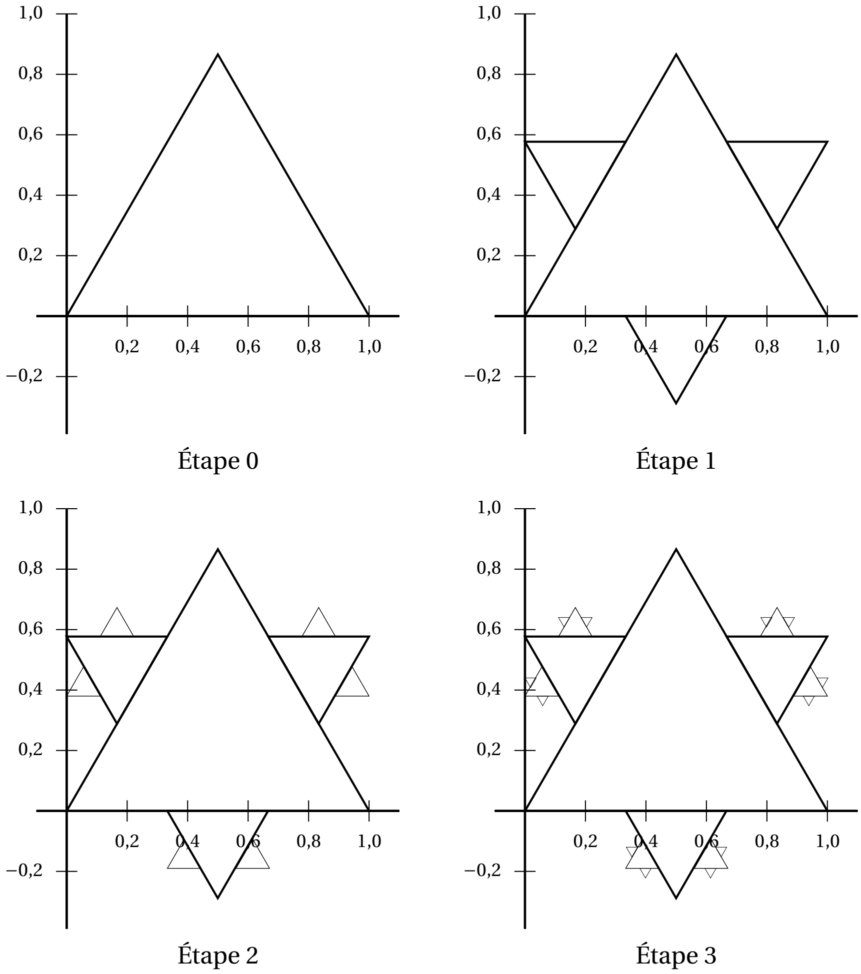


Étape 1 :

- On divise chaque côté d'un triangle équilatéral de côté 1 en 3 segments de même longueur (par exemple les segments : [A ; C_2], [C_2 ; C_1] et [C_1 ; C]).
- Sur chacun des côtés du triangle, on construit, à l'extérieur du triangle, un triangle équilatéral ayant pour base le second segment (par exemple le triangle $C_1C_2C_3$ ayant pour base le segment [C_2 ; C_1] pour le côté [A ; C]).

Étapes suivantes :

Sur chaque triangle obtenu à l'étape précédente, on construit deux nouveaux triangles équilatéraux selon le même procédé de construction que celui de l'étape 1.



Étape 0 Étape 1

Étape 2 Étape 3

Pour tout entier naturel n, on pose :

- u_n le nombre de triangles construits à l'étape n,
- ℓ_n la longueur du côté du triangle équilatéral construit à l'étape n,
- h_n la hauteur du triangle équilatéral construit à l'étape n,
- s_n la surface que l'on colore à l'étape n.

a. $h_1 = \dfrac{1}{2 \times \sqrt{3}}$.

b. La suite $(\ell_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

c. $h_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \times 3^n}$.

d. Si $n \geqslant 1$, alors $s_n = \dfrac{3 \times \sqrt{3} \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^n}{8}$.