

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Pondichéry 26 avril 2017 ∞

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;

C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 < X < 87)$.
Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :

$$P(85 - a < X < 85 + a) = 0,9.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7; 88,3]$.

Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie?*

EXERCICE 2**3 points****Commun à tous les candidats**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

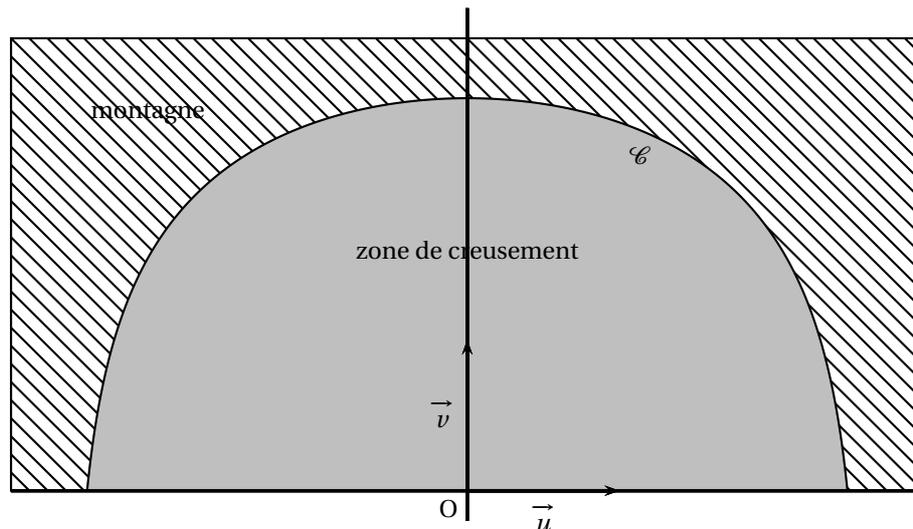
- Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
 - Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B .
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

*

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.

Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} .



On admet que \mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5; 2,5]$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

- Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5 ; 2,5]$.
- Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5 ; 2,5]$.
En déduire le signe de f sur $[-2,5 ; 2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

- La courbe \mathcal{C} est-elle un arc de cercle de centre O? Justifier la réponse.
- Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est
$$\mathcal{A} = 8 \int_0^{2,5} f(x) dx.$$
- L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de
$$I = \int_0^{2,5} f(x) dx,$$
 notée a .

On admet que : $a \leq I \leq a + \frac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.

- Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.
- En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

*

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

- Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites?
- Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

- Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
- On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.
Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

- Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites?
- Soit n un entier naturel.
Conjecturer la valeur de $\text{PGCD}(u_n ; v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
- Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	11	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».

Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
 $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
- Soit n un entier naturel.
 Déduire de la question précédente la valeur de $\text{PGCD}(u_n ; v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n , on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que la matrice $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P .

- b. On admet que, pour tout entier naturel n , on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

$$\text{Démontrer que, pour tout entier naturel } n, \text{ on a } \begin{cases} u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$$

- a. Vérifier que, pour tout entier naturel n , on a $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$.

- b. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

*

EXERCICE 5

3 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
 L'espace est rapporté au repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

On note \mathcal{P} le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$.

Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan \mathcal{P} .

La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.*

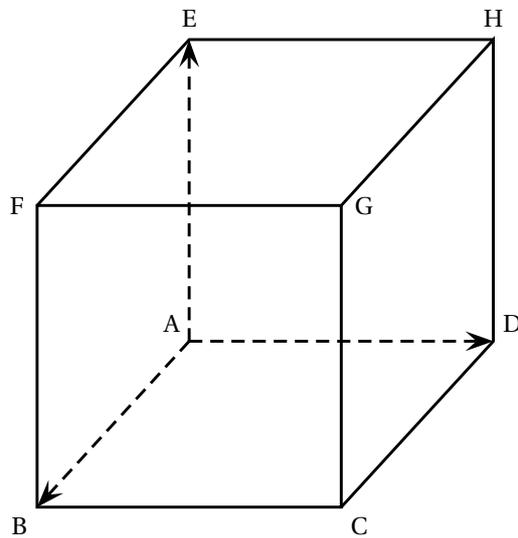
ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

Variables	R et S sont des réels n et k sont des entiers		
Traitement	S prend la valeur 0 Demander la valeur de n Pour k variant de 1 à n faire <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$</td> </tr> <tr> <td>$S$ prend la valeur $S + R$</td> </tr> </table> Fin Pour Afficher S	R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$	S prend la valeur $S + R$
R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$			
S prend la valeur $S + R$			

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S , arrondies à 10^{-6} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0, n = 50$			
Boucle Pour	Étape k	R	S	
	1	
	2	0,130 060	0,260 176	
	3	0,129 968	0,390 144	
	4	0,129 837	...	
	⋮		⋮	
	24	0,118 137	3,025 705	
	25	0,116 970	3,142 675	
	⋮		⋮	
	49	0,020 106	5,197 538	
	50	
	Affichage	$S = \dots$		

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie**EXERCICE 5**

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Nord 2 juin 2017 ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, les valeurs seront, si nécessaire, approchées au millième.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4000 euros ?
2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10 % des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte ?
Donner ce montant à l'euro près.

Partie B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam. Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les événements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

1. Calculer $P(S \cap D)$.
2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.
3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?
4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.

Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

*

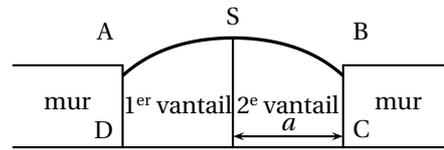
Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leq 2$.

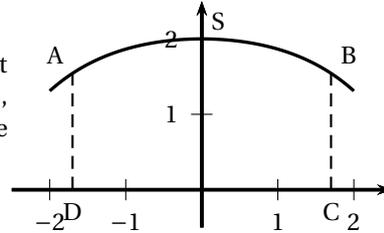
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a; f(-a))$, $(a; f(a))$, $(a; 0)$ et $(-a; 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f , comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2; 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b .

Partie B

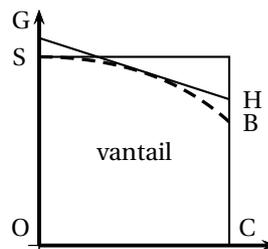
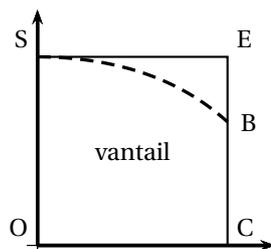
La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b .

1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à $20 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$. Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1,8$ et $b = 1$.

Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h.$$

*

Exercice 3
Commun à tous les candidats

5 points

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .
2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1 = u_0$.
 - a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.
 - b. En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

- c. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.
3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.
 - a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.
 - b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Entrée :	Saisir n Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur ... s prend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher u

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4.
 - a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.
 - b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .

*

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

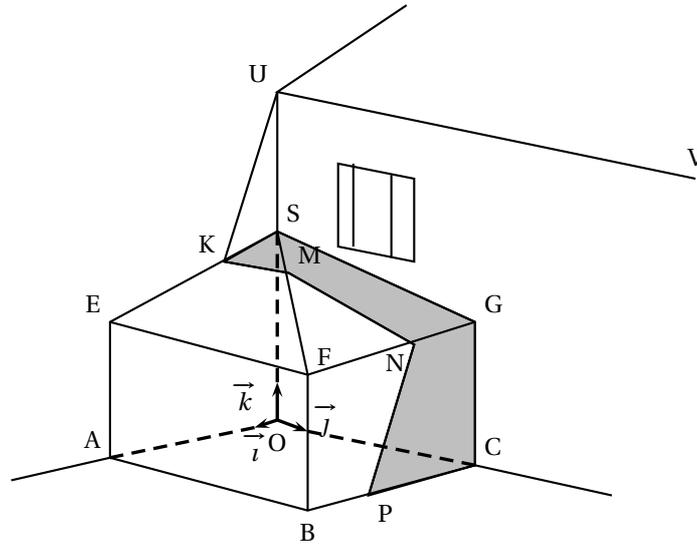
5 points

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).

- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



- Sans calcul, justifier que :
 - le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;
 - le segment [NP] est parallèle au segment [UK].
- Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : $A(4; 0; 0)$, $B(4; 5; 0)$, $C(0; 5; 0)$, $E(4; 0; 2,5)$, $F(4; 5; 2,5)$, $G(0; 5; 2,5)$, $S(0; 0; 3,5)$, $U(0; 0; 6)$ et $V(0; 8; 6)$.
On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.
 - Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont $(1,2; 0; 3,2)$.
 - Montrer que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(7; 0; 3)$ est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).
 - Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).
 - Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.
- Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7° . Cette condition est-elle remplie?

*

Exercice 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.

À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.

Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.

On dispose également des informations suivantes :

Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.

D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.

D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.

Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014 + n$ respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $U_0 = (150 \quad 0)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n)$.
3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k .

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.
 - a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association?
 - b. L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3 c_4 c_5 k$ est transformé en $11c_3 c_4 c_5 k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé?
2. On note $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.
 - a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a - 1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.
 - b. Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \pmod{10}$.
 - c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4 .

*

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat S Liban 5 juin 2017 ⌘

Exercice 1

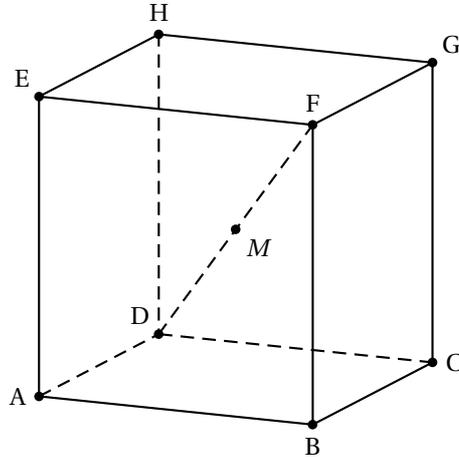
6 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.

Les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur \overrightarrow{DF} est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle \widehat{EMB} lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leq \theta \leq \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D? avec le point F?
2.
 - a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x; x; x)$.
 - b. Montrer que $\cos(\theta) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{ME} et \overrightarrow{MB} .
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$$

	x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f		$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

- a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?
- b. l'angle θ est-il maximal?

*

Exercice 2

6 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4} .

Les parties A, B, et C sont indépendantes

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	$[0; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 6[$	$[6; 8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).
 - a. Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.
 - b. Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière?
 - c. Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante?

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

1.
 - a. Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture?
 - b. Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures?
 - c. À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures?
2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ' .

On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes. Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint?*

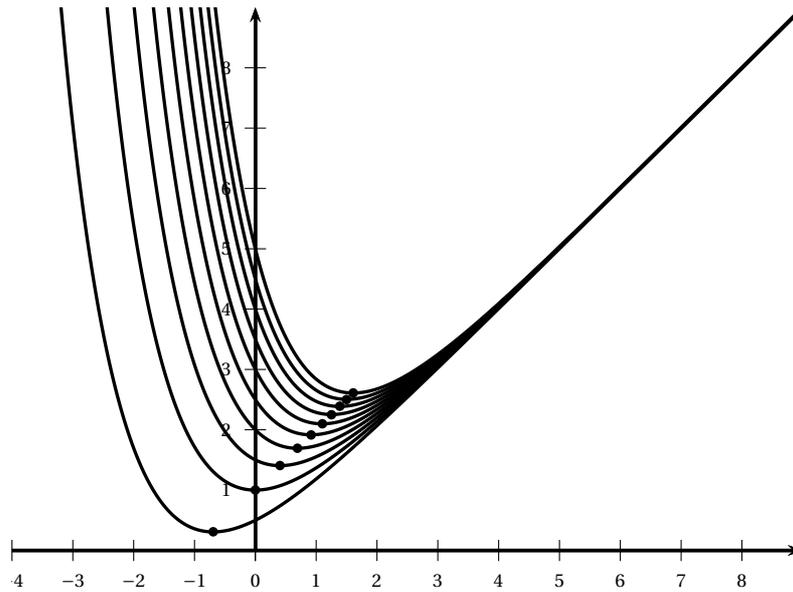
Exercice 3**3 points****Commun à tous les candidats**

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère ortho-normé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes \mathcal{C}_k pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur \mathbb{R} . La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe \mathcal{C}_k . Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas?*

Exercice 4**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1[$ par :

$$f(x) = 30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1.
 - a. Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
 - b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
 - a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
 - b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Exercice 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$$

où a_1, a_2, \dots, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.

Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.

c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.

L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
 | P prend la valeur 0
 | R prend la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
 R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
 I prend la valeur $I + R$
 Fin Pour
 Pour k allant de 1 à 7 :
 | P prend la valeur $P + a_{2k}$
 Fin Pour
 S prend la valeur $I + P + c$

Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
 | Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
 Sinon :
 | Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
 Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
 - a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I .
 - b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
 - c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
 Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu 6a35 4002 9561 3411 reste correct?
2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
 Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.
3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.
4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
 On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
 Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté?*

Annexe*À rendre avec la copie***Exercice 4 – Question 1. a.**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Centres étrangers 13 juin 2017 ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2% des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leq 170) = 0,02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

Réponse a : 0,04

Réponse b : 0,96

Réponse c : 0,98

Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.

Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.

Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse a : 0,72

Réponse b : 0,28

Réponse c : 0,54

Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02.

Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse a : 0,02

Réponse b : 0,67

Réponse c : 0,44

Réponse d : 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse a : 0,45

Réponse b : 1

Réponse c : 0,55

Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse a : 40

Réponse b : 400

Réponse c : 1600

Réponse d : 20

*

Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point $A(2; 3; 0)$ appartient à la droite d_1 .
2. Donner un vecteur directeur \vec{u}_1 de la droite d_1 et un vecteur directeur \vec{u}_2 de la droite d_2 .
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1; -2; -3)$ est orthogonal aux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .
4. Soit P le plan passant par le point A , et dirigé par les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{v} .
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P .
 - a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.
 - b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3; 3; 5)$.
5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, et passant par le point $B(3; 3; 5)$.
 - a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ .
 - b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
 - c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

*

Exercice 3

6 points

Commun à tous les candidats

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma. On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g.L}^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0; +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2 \mu\text{g.L}^{-1}$.
Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en $\mu\text{g.L}^{-1}$, le nombre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt.$$

Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à $200 \mu\text{g.L}^{-1}$.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g.L}^{-1}$), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$, avec $t \in [0; +\infty[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0 \mu\text{g.L}^{-1}$.

- Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :
 $g'(t) = 20e^{-t}(1 - 0,1e^{0,9t})$.
- Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de $20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n -ième injection.

Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit $20 \mu\text{g.L}^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse $38 \mu\text{g.L}^{-1}$.
Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

*

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

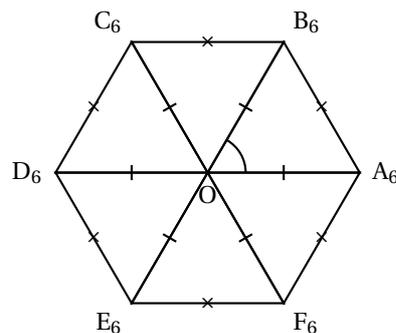
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout entier $n \geq 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O .

On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

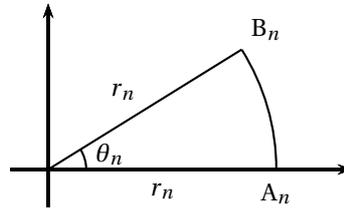
On a représenté ci-contre un polygone P_6 .



1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6 .
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geq 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geq 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n . On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $OA_n B_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2} \sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
Donner, en fonction de n , une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; \pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n , défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$.
2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L , et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme? *

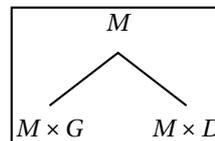
Exercice 4**5 points****Candidats ayant choisi la spécialité mathématique**

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

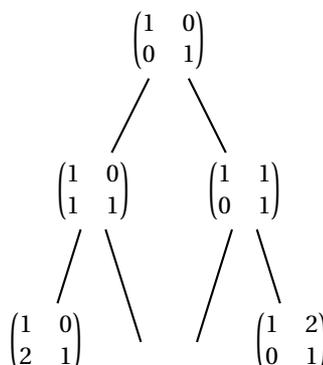
On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M .



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B , dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant :
 $b + d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\frac{a+c}{b+d}$. Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.

On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

b. En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.

On admet de même que $\Delta_{M \times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

4. Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.
5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant

VARIABLES : m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux
 TRAITEMENT : Tant que $m \neq n$, faire
 Si $m < n$
 Afficher « Gauche »
 n prend la valeur $n - m$
 Sinon
 Afficher « Droite »
 m prend la valeur $m - n$

- a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage	
m	4
n	7

- b. Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

*

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat S Polynésie 14 juin 2017 œ

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile. Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

Partie A - Durée d'attente

1. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur.

Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.

- a. Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance ?
 - b. Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.
2. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant un réel strictement positif.
 - a. Sachant que $P(D_2 \leq 4) = 0,798$, déterminer la valeur de λ .
 - b. En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

Partie B - Obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.

On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.

On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7.

De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :

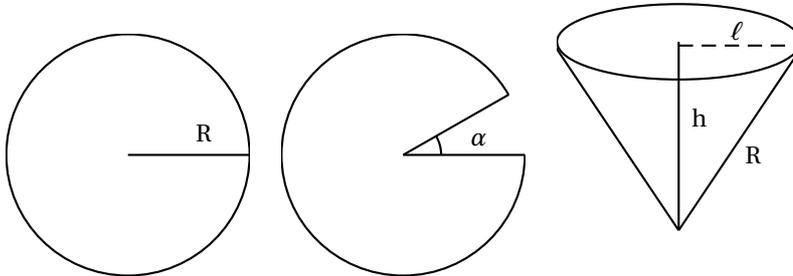
- Si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95.
- Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

1. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.
2. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile ?

Partie C - Enquête de satisfaction

La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur.

Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes. Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites. Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société? *

EXERCICE 2**5 points****Commun à tous les candidats**

Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire \mathcal{A} et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathcal{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ , exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h , est

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h.$$

b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

c. Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum? Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton?

*

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.



L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.

Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.

Représenter la molécule dans le cube donné en annexe page 31.

Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.
3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

*

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1} , de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi : Pour tout réel positif ou nul t ,

$$v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right);$$

la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute?
3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.

À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1} .

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1} .

*

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

- À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.
 — Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,33	3,23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E?
2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 \pmod{26} \\ b \equiv 4 \pmod{26} \end{cases}$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

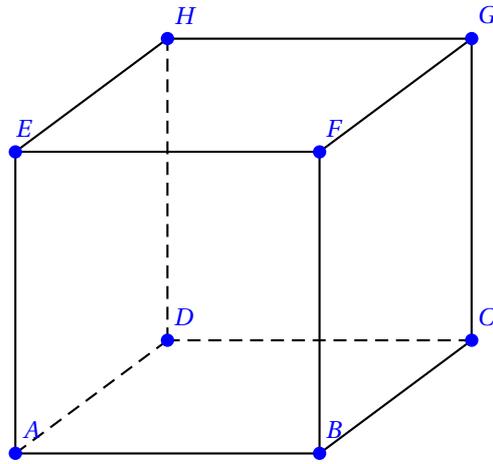
1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.
 - a. Coder les lettres K et X.
 - b. Ce codage est-il envisageable?
2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.
 - a. Montrer que pour tous entiers naturels n et m , on a :

$$m \equiv 9n + 4 \pmod{26} \iff n \equiv 3m + 14 \pmod{26}$$

- b. Décoder le mot AQ.

*

Annexe
À rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane 16 juin 2017 ∞

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E): \quad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z .

1. Donner une solution entière de (E) .
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z ,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange? Justifier.

*

EXERCICE 2

4 points

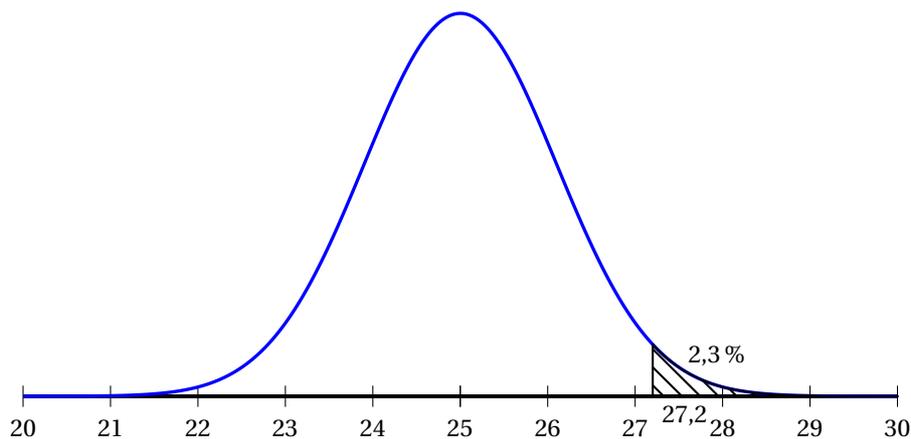
Commun à tous les candidats

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X , qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1 .

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre $22,8 \mu\text{m}$ et $27,2 \mu\text{m}$.

La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-dessous. On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.



1.
 - a. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
 - b. Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.
 - c. Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à $24 \mu\text{m}$. Arrondir à 10^{-3} .

2. Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.

La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25 \mu\text{m}$ et d'écart-type σ_2 .

- a. En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2 .
- b. Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes.
Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs?

*

EXERCICE 3**3 points****Commun à tous les candidats**

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

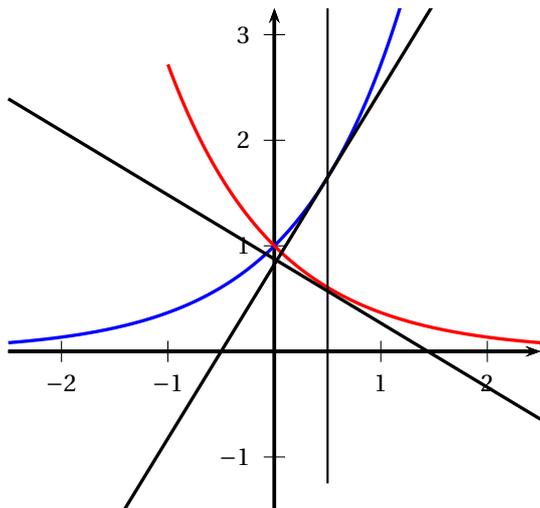
$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f et \mathcal{C}_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a , on note M le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et N le point de \mathcal{C}_g d'abscisse a .

La tangente en M à \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en P , la tangente en N à \mathcal{C}_g coupe l'axe des abscisses en Q .

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a .



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2,5	2
4	-2	2
5	-1,5	2
6	-1	2
7	-0,5	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à \mathcal{C}_f est perpendiculaire à la tangente en N à \mathcal{C}_g .
2.
 - a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
 - b. Démontrer cette conjecture.

*

EXERCICE 4**5 points****Commun à tous les candidats**

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n): \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x .

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; e]$ notée α_n .
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n) .
 - a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3 , D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - c. En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$

- a. On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}.$$

- b. En déduire la limite de la suite (β_n) .

*

EXERCICE 5

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .
5. a. Vérifier que $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

*

EXERCICE 5**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
c. En déduire la mesure de l'angle \widehat{BAC} , arrondie au degré.
2. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
a. Démontrer que \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC).
b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soient \mathcal{P}_1 le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et \mathcal{P}_2 le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
a. Démontrer que le plan \mathcal{P}_2 a pour équation $x = 2z$.
b. Démontrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.
c. Soit la droite \mathcal{D} dont un système d'équations paramétriques est

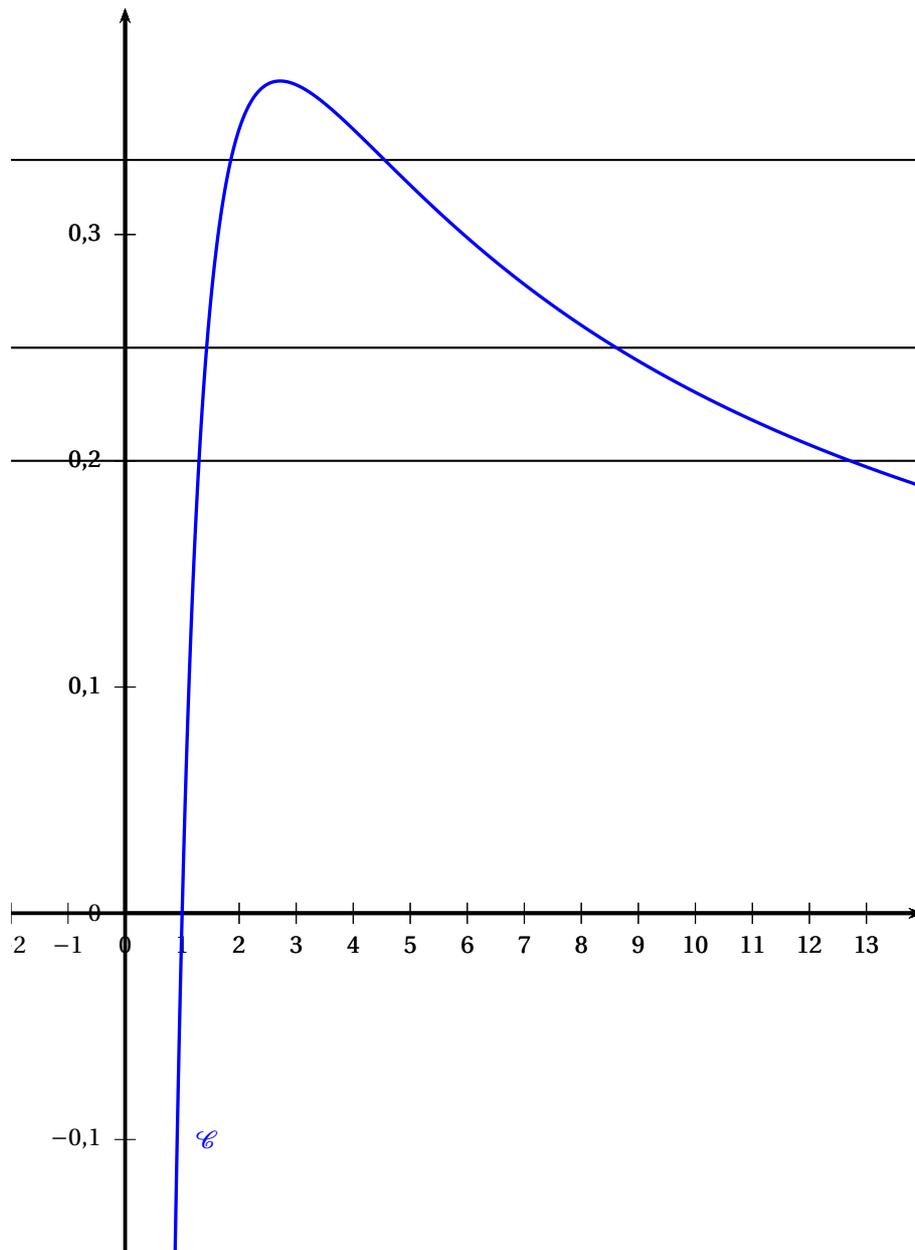
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3, & t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Démontrer que \mathcal{D} est l'intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

4. Démontrer que la droite \mathcal{D} coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées. *

ANNEXE de l'exercice 4

Cette annexe n'est pas à rendre.



Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Métropole 21 juin 2017 ∞

Exercice 1

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h .
 - a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$

où h' désigne la fonction dérivée de h .

- b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
- c. Dédire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1).$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Ces deux courbes sont tracées en annexe page 44. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x ; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x ; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
 - a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
 - b. Placer sur le graphique fourni en annexe page 44 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN .
2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
 - a. Hachurer le domaine D_λ , correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe page 44.
 - b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$

- c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	λ est un réel positif S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	Saisir S λ prend la valeur 0
Traitement :	Tant Que $1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda} < S$ faire λ prend la valeur $\lambda + 1$ Fin Tant Que
Sortie :	Afficher λ

- Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?
- Quel est le rôle de cet algorithme?

*

Exercice 2**3 points****Commun à tous les candidats**

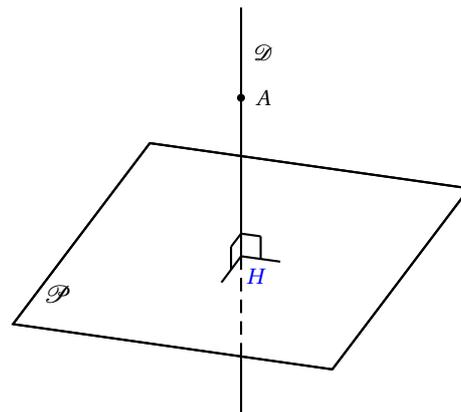
L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.

On note A le point de coordonnées $(1 ; a ; a^2)$ où a est un nombre réel.

- Justifier que, quelle que soit la valeur de a , le point A n'appartient pas au plan \mathcal{P} .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} (de paramètre t) passant par le point A et orthogonale au plan \mathcal{P} .
 - Soit M un point appartenant à la droite \mathcal{D} , associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.
Exprimer la distance AM en fonction du réel t .

On note H le point d'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite \mathcal{D} orthogonale à \mathcal{P} et passant par le point A . Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} et la distance AH est appelée distance du point A au plan \mathcal{P} .



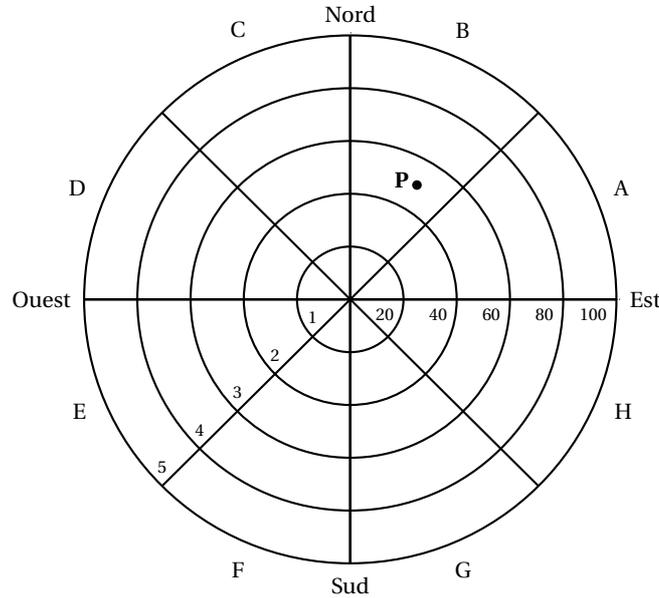
- Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(1 ; a ; a^2)$ au plan \mathcal{P} est minimale? Justifier la réponse.

*

Exercice 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur. L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z .

PARTIE A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$.

Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	Proposition B	Proposition C	Proposition D
$40 < r < 60$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z . Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :
- $z = 70e^{-i\frac{\pi}{3}}$;
 - $z = -45\sqrt{3} + 45i$.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.

Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire que, quels que soient les intervalles I et J , les événements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.

Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer la probabilité $P(M \in]40 ; 60])$.
3. On admet que $P\left(T \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right[\right) = 0,819$.

En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

*

Exercice 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés;
- Parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n + 1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n »;

M_n : « l'individu est malade en semaine n »;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

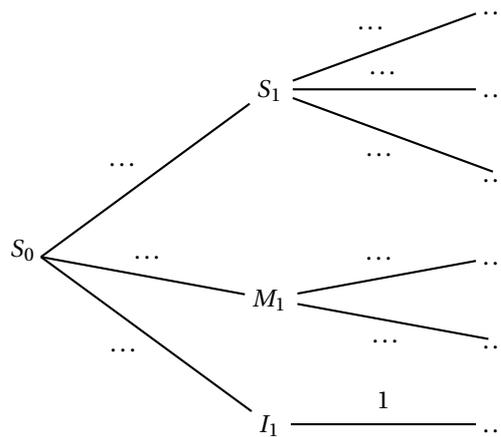
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 ; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millièmè, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n , on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n , M_n et I_n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

- a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?
- b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.
3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n).$$

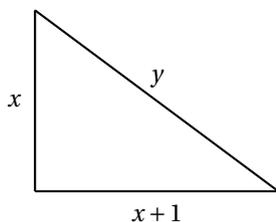
4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?*

Exercice 4**5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x + 1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y , où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x , $x + 1$ et y , où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x ; y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3 ; 5)$.
3. **a.** Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
- b.** Montrer que dans un couple d'entiers $(x ; y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
- a.** Montrer que : $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.
- b.** En déduire que si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI.
2. On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.
- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , le couple $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI.
3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017. *

ANNEXE À REMETTRE AVEC LA COPIE

