Durée : 4 heures

Baccalauréat S – Asie 22 juin 2017

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t)=\frac{d}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t)=12\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{105}{x}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}-1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à $5,9$ micromole par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.*

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} & = & \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n. \end{array}\right.$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.
Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2. **a.** Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer cette conjecture.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

*

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.
   Affirmation 1 : la probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.
2. Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_{\text{M}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\text{N}} = \dfrac{3-\text{i}}{2+\text{i}}$.
   Affirmation 2 : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans les questions **3.** et **4.**, on se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1+t\\y &=& 2,\\z &=& 3+2t\end{array}\right.\quad t \in \mathbb{R}$.

3. On considère les points A, B et C avec A$(-2\,;\,2\,;\,3)$, B $(0\,;\,1\,;\,2)$ et C$(4\,;\,2\,;\,0)$.
   On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   Affirmation 3 : la droite d est orthogonale au plan (ABC).
4. On considère la droite Δ passant par le point D$(1\,;\,4\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\,(2\,;\,1\,;\,3)$.
   Affirmation 4 : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

*

EXERCICE 4 — 3 points

Commun à tous les candidats

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\text{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\text{d}x.$$

Partie A : valeur exacte de l'intégrale *I*

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.
2. Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de la valeur de *J*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a donc : $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\text{d}x$.
Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point M$(x\,;\,y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathcal{C}_g$ est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

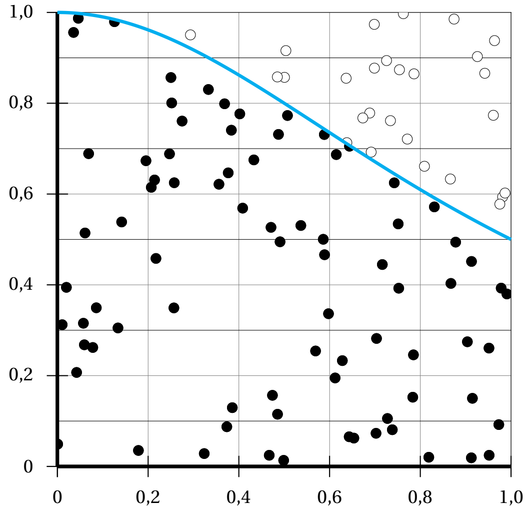
— on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$;

— si M$(x\,;\,y)$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. *C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.*

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.

Illustration de la méthode avec $n = 100$



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres
Traitement	Lire la valeur de n c prend la valeur … Pour i allant de 1 à … faire x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 y prend … Si … alors …prend la valeur … Fin si Fin pour f prend la valeur …
Sortie	Afficher f

2. Pour $n = 1\,000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.

3. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?*

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Question préliminaire

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2\,800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près

Partie A : étude d'un exemple

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.
Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.
On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.
Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.
Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.
On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.
   Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 % ?*

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

— elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;

— elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1 - p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :

— p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;

— q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.
On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$.

1. **a.** Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que : $A = PDP^{-1}$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = PD^n P^{-1}.$$

d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-contre, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.

1	$X0 := [[1], [0]]$	
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	M
2	P : = [[1, 1], [1, −1]]	
	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	M
3	D : = [[1, 0],[0,2 ∗ p − 1]]	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2*p-1 \end{bmatrix}$	M
4	$P * (D\hat{}n) * P\hat{}(-1) * X0$	
	$\begin{bmatrix} \dfrac{(2*p-1)^n+1}{2} \\ \dfrac{-(2*p-1)^n+1}{2} \end{bmatrix}$	M

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un **bit** est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.
On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.
Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

— c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;

— c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;

— c_3 est le reste de la di vision euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires

a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

- la valeur de c_1 est inchangée ;
- la valeur de c_2 est modifiée ;
- la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.

Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de 7 bits :

$$A = 0100010 \quad \text{et} \quad B = 1101001.$$

On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.
Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.*

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie 5 septembre 2017 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. Pour des raisons de sécurité, son accès n'est autorisé qu'aux personnes dont la taille est supérieure ou égale à 1,40 m et dont l'âge est compris entre 10 et 70 ans.
Des études statistiques sont menées pour évaluer l'affluence et la satisfaction des visiteurs pour ce manège.

On arrondira, si nécessaire, les probabilités à 10^{-4}.

1. **a.** La taille en centimètres d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisée par la variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 165 et d'écart-type 20.

   Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait la taille requise pour accéder à ce grand huit ?

   b. L'âge d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 17.

   Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait l'âge requis pour accéder à ce grand huit ?

   c. Les études menées permettent d'établir que 89 % des visiteurs ont la taille exigée, 87 % ont l'âge requis mais 8 % n'ont ni la taille, ni l'âge obligatoires. Quelle est alors la proportion des visiteurs vérifiant les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction ?

2. Un sondage est réalisé à la sortie du grand huit et révèle que 25 % des personnes ont attendu moins de 30 min avant de pouvoir essayer le manège. Parmi elles, 95 % sont satisfaites de l'attraction.

   En revanche, 22 % des personnes ayant attendu plus de 30 min ne sont pas satisfaites de l'attraction.

   On choisit au hasard un visiteur à sa sortie du grand huit.

   On note A l'évènement « le visiteur a attendu plus de 30min » et S l'évènement « le visiteur est satisfait de l'attraction ».

   a. Montrer que la probabilité qu'un visiteur soit satisfait de l'attraction vaut 0,822 5.

   b. Le directeur rencontre un visiteur insatisfait. Quelle est la probabilité que ce visiteur ait attendu moins de 30 min ?

3. Le directeur est soucieux de savoir si le temps d'attente, plus important les jours de grande affluence, remet en cause le taux de satisfaction des visiteurs. Pour cela, on interroge 200 personnes au hasard à la sortie du grand huit. Parmi elles, 46 se disent insatisfaites.

   Le directeur peut-il être rassuré ?*

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties **A** et **B** sont indépendantes

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses.
On note $N(t)$ le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines et $N(0) = N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.
Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que

$$N(t) = N_0\mathrm{e}^{at}.$$

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines.
En déduire la valeur du paramètre a.

2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{0,05t}.$$

La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules. Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer. Or, après intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.
En l'absence de suivi médical, au bout de combien de temps la tumeur pourrait -elle redevenir détectable au toucher ?

Partie B

Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en μmol.L^{-1}, peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$

$$c(t) = \frac{D}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{80}t}\right)$$

où

- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D.

1. Détermination de la clairance
Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 μmol.h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à 6,8 μmol.L^{-1}.

a. Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation

$$112\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6,8k = 0.$$

b. Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit

a. Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ.
Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de 16 μmol.L^{-1}.
En déduire le débit D, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de $5,85$ L.h^{-1}.

*

EXERCICE 3 — 3 points

Commun à tous les candidats

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$.

2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z ; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M.
Montrer que le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)},\ \text{avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathscr{D}$ le plus proche de l'origine O du repère.*

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n(1-u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

- **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
- **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que … faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher …

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} &=& 0,032\\ v_{n+1} &=& 1,06v_n\left(1-v_n\right)\end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 7 septembre 2017

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

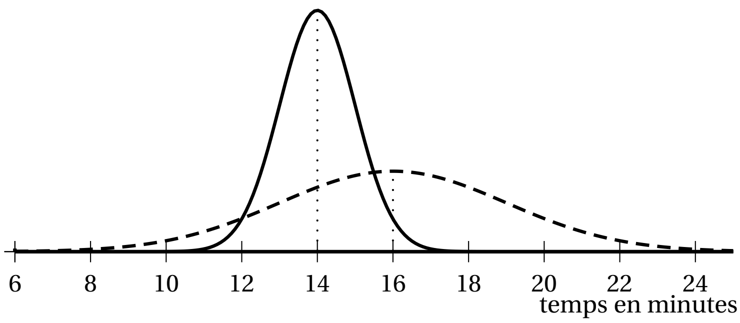
a. Calculer la valeur de p.

b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.
Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_V$ les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.
Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C.



2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4}.

3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail ?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.
La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

1. Soit b un réel positif.
   Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que

$$P(X \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{\lambda b}.$$

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.
   a. En déduire la valeur exacte de λ.
   b. Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

*

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l l} z_0 & = & 100 & \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n & \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{A}M \leqslant r$.
   Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.*

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1~;~+\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1~;~+\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1~;~+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).*

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 1 ; 14), B(0 ; 1 ; 8) et C(−2 ; 2 ; 4) ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

c. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x + 8y - z = 0$.

2. On considère la droite Δ des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t-3 \\ y &=& t - \dfrac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 4t+2 \end{array}\right.$$

a. Donner un vecteur directeur de la droite Δ.

b. La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

3. Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t^3 + t \\ y &=& t+1, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 2t \end{array}\right.$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).
Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.*

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit p un entier relatif donné.
On s'intéresse dans cette question à l'équation $\left(E_p\right)$

$$3x+4y=p$$

où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-p\ ;\ p)$ est une solution particulière de l'équation.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de $\left(E_p\right)$ est l'ensemble des couples de la forme

$(-p+4k\ ;\ p-3k)$ où k est un entier relatif.

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne

$$6x+8y-z=0.$$

2. Soit M_0 un point de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$ qui appartient au plan $\mathscr{P}$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que z_0 est pair.

b. On pose $z_0=2p$ où p est un entier relatif.
Prouver que le couple $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ est solution de l'équation $\left(E_p\right)$.

c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ à coordonnées entières.

3. À tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ avec

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&75&180\\56&41&-144\\28&-30&29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $6x'+8y'-z'=101(6x+8y-z)$.

b. En déduire que si le point M est un point du plan $\mathscr{P}$, alors le point M' est aussi un point du plan $\mathscr{P}$.

c. Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par O.
Montrer que si le point M appartient à Δ, alors le point M' appartient aussi à Δ.

*

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole - La Réunion 12 septembre 2017

La page de fin est une annexe au sujet, à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

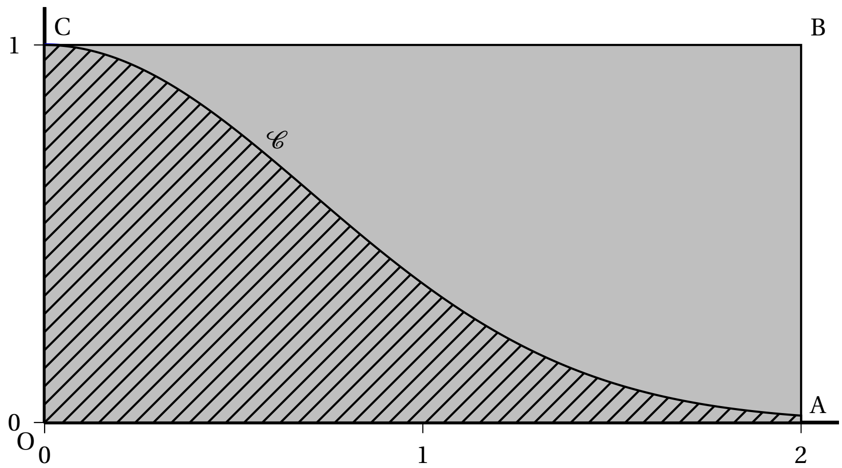
On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1. **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $-x^2 \leqslant -2x+1$, puis :
   $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2.
   Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, et le rectangle OABC où A$(2\,;0)$, B$(2\,;1)$ et C$(0\,;1)$.
   On a hachuré le domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



   On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.
   On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est : $p = \dfrac{\text{aire de } \mathscr{D}}{\text{aire de OABC}}$.

   a. Justifier que $u_2 = 2p$.

   b. On considère l'algorithme suivant :

L1	**Variables** : N, C nombres entiers ; X, Y, F nombres réels
L2	**Entrée** : Saisir N
L3	**Initialisation** : C prend la valeur 0
L4	**Traitement** :
L5	Pour k variant de 1 à N
L6	X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si $Y \leqslant \mathrm{e}^{-X^2}$ alors
L9	C prend la valeur $C+1$
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher C
L13	F prend la valeur C/N
L14	Afficher F

i. Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point $M(X\ ;\ Y)$?

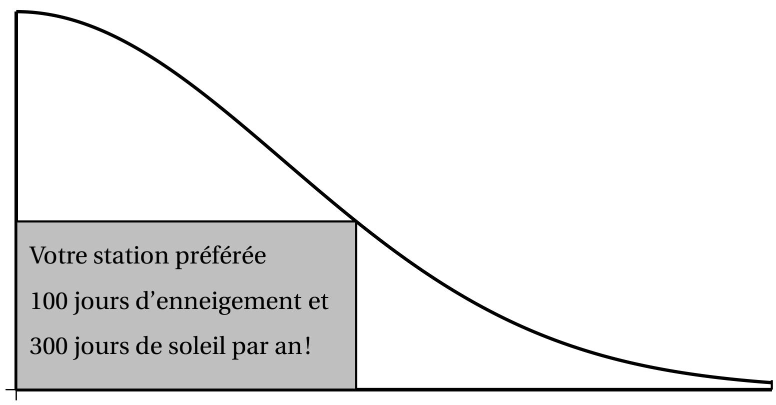
ii. Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.

iii. Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient $C = 441\,138$.
On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.
En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

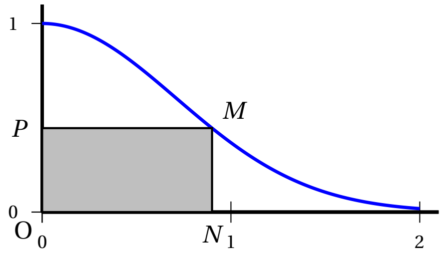
Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine $\mathscr{D}$ défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $\left(x\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- N le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- P le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)$,
- $A(x)$ l'aire du rectangle ONMP.



1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;2]$, on a : $A(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}_f$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.
3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc. *

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.
3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   a. Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   b. Sur la figure donnée en annexe page 7, on a représenté un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
   Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   c. Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?
   La dernière page contenant l'annexe est à rendre avec la copie

*

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés seront arrondis au millième

1. Une étude effectuée sur une population d'hommes âgés de 35 à 40 ans a montré que le taux de cholestérol total dans le sang, exprimé en grammes par litre, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1{,}84$ et d'écart type $\sigma = 0{,}4$.
   a. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol compris entre $1{,}04$g /L et $2{,}64$ g/L.
   b. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol supérieur à $1{,}2$ g/L.
2. Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participer à un essai clinique organisé par un laboratoire.
Dans cet essai, 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).
On étudie la baisse du taux de cholestérol après l'expérimentation.
On constate une baisse de ce taux chez 80 % des patients ayant pris le médicament.
On ne constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.
On choisit au hasard un patient ayant participé à l'expérimentation et on note :

- M l'évènement « le patient a pris le médicament » ;
- B l'évènement « le taux de cholestérol a baissé chez le patient ».

a. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité de l'évènement B.

c. Calculer la probabilité qu'un patient ait pris le médicament sachant que son taux de cholestérol a baissé.

3. Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.

Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.

b. L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.

Que peut-on en conclure ?

c. Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

Cette étude aboutit à une fréquence observée de 37 % de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence 30 %.

Quel est l'effectif minimal de l'échantillon de cette étude ?

*

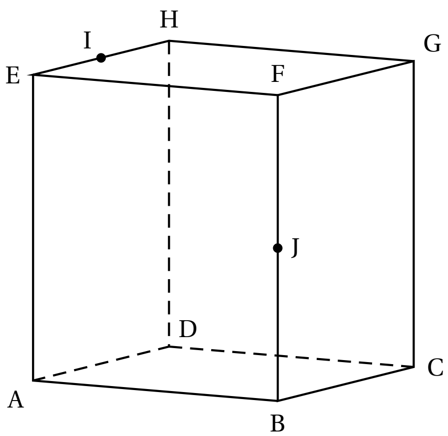
Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.

On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

c. On note K le milieu du segment [HJ]. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\dfrac{1}{6}$.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule
$V = \dfrac{1}{3}B \times h$ *où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.*

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′. Montrer que le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{5}{9}\right)$.

d. Calculer la longueur FF′. En déduire l'aire du triangle BGI.

*

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 5 ; −2), B(7 ; −1 ; 3) et C(−2 ; 7 ; −2) et on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC).

On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax+by+cz=73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX=73Y$, où M est la matrice $M=\begin{pmatrix}1&5&-2\\7&-1&3\\-2&7&-2\end{pmatrix}$.

2. Soit N la matrice : $N=\begin{pmatrix}19&4&-13\\-8&6&17\\-47&17&36\end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M\times N$ et $N\times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M\times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N\times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X=NY$.

En déduire que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne :

$10x+15y+6z=73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathscr{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x+15y+6z=73$.

1. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z=3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation

$(E) : 2x+3y=11$.

b. Justifier que le couple $(7\ ;\ -1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z=3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x~;~y~;~z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

a. Montrer que y est impair.

b. Montrer que : $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$.

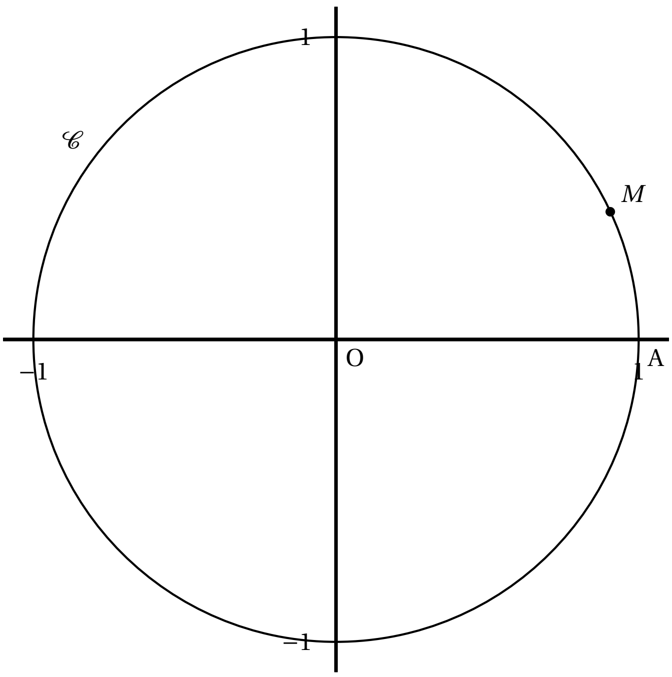
c. On pose alors : $x = 1+3p$, $y = 1+2q$ et $z = 3+5r$, où p, q et r sont des entiers naturels. Montrer que le point $M(x~;~y~;~z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $p+q+r = 1$.

d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.

*

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2



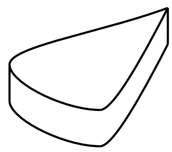
Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud 21 novembre 2017

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

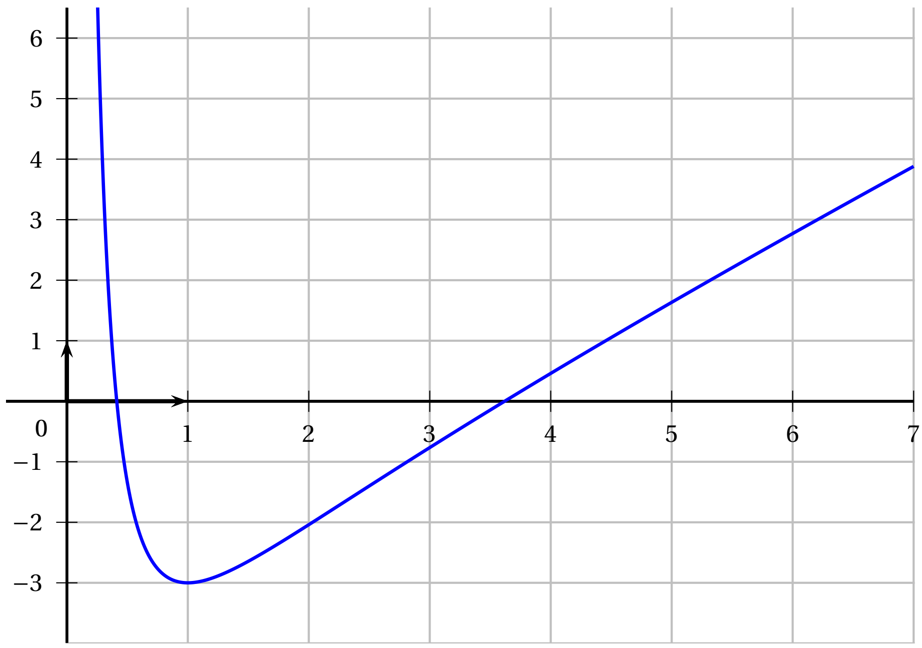


Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 *cm en abscisses et* 1 *cm en ordonnées.*

1. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

 a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

 b. Étudier les variations de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.
 En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

 b. Montrer que sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
 En déduire le tableau de variation de f.

c. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\,;\,+\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

d. Soit F la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

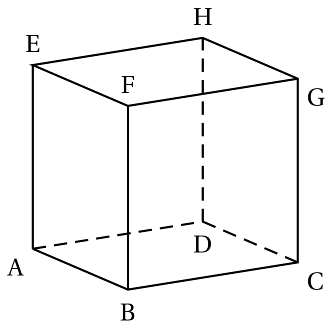
Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} *près de* α *et* β *de la partie* A.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative C de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ ainsi que son symétrique C' par rapport à l'axe des abscisses.
Les deux courbes C et C' délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH.



1. **a.** Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide BDEG.

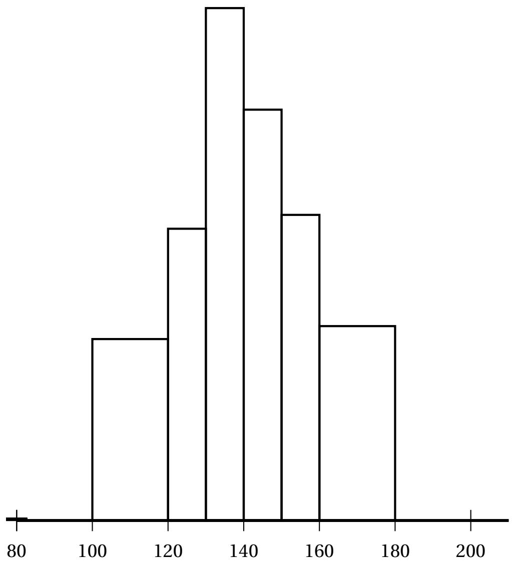
EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenues dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur 10 000 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.
Les résultats sont donnés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous :

Nombre de bactéries (en milliers)	$[100 ; 120[$	$[120 ; 130[$	$[130 ; 140[$	$[140 ; 150[$	$[150 ; 160[$	$[160 ; 180[$
Nombre de prélèvements	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711



À l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B :

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1. **a.** Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.

   b. On note $p = P(X \geqslant 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{-3}.

2. Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie ; 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.

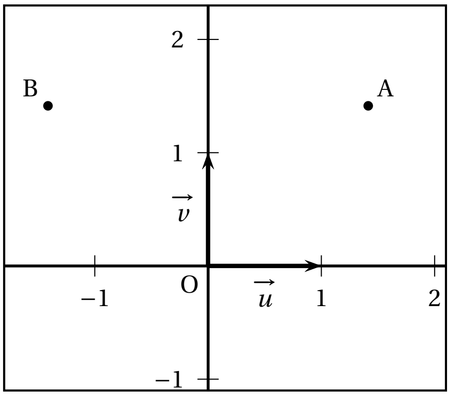
   a. L'organisme déclare qu'il y a une anomalie dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper. Justifier sa déclaration.

   b. Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de $0,01$ de se tromper ?

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.
2. On considère l'équation

$$(E)\ :\ z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc

$v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   a. Justifier que g est croissante sur $[0\,;60]$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n).

e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** .... u prend la valeur .... n prend la valeur .... **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l'équipe B (statut noté B) ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S).
Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.
Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

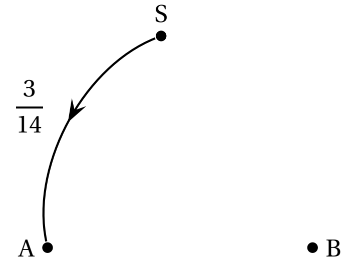
- un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6; il devient joueur solitaire avec une probabilité de 0,25. Sinon, il rejoint l'équipe B;
- un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A;
- un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\dfrac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solitaires.
On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & s_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire, après n jours de jeu.
On a donc : $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $s_0 = 1$.

1. On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant. Justifier que $p = \dfrac{3}{14}$.

2. **a.**

Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre représentant la situation.



b. On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.

Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = U_0 T^n$.

c. Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.

3. On pose $V = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.

a. Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel VT. Que constate-t-on ?

b. En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.

4. On donne l'algorithme suivant, où la commande « $U[i]$ » renvoie le coefficient de la i-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 7 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[1]$

a. Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme ? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

b. Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna ∾
28 novembre 2017

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Sofia souhaite se rendre au cinéma. Elle peut y aller à vélo ou en bus.

Partie A : En utilisant le bus
On suppose dans cette partie que Sofia utilise le bus pour se rendre au cinéma. La durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_B qui suit la loi uniforme sur $[12\ ;\ 15]$.

1. Démontrer que la probabilité que Sofia mette entre 12 et 14 minutes est de $\dfrac{2}{3}$.
2. Donner la durée moyenne du trajet.

Partie B : En utilisant son vélo

On suppose à présent que Sofia choisit d'utiliser son vélo.
La durée du parcours (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire T_v qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart-type $\sigma = 1,5$.

1. Quelle est la probabilité que Sofia mette moins de 14 minutes pour se rendre au cinéma ?
   Quelle est la probabilité que Sofia mette entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Partie C : En jouant aux dés

Sofia hésite entre le bus et le vélo. Elle décide de lancer un dé équilibré à 6 faces.
Si elle obtient 1 ou 2, elle prend le bus, sinon elle prend son vélo. On note :

— B l'évènement « Sofia prend le bus » ;
— V l'évènement « Sofia prend son vélo » ;
— C l'évènement « Sofia met entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ».

1. Démontrer que la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que Sofia mette entre 12 et 14 minutes est de 0,49.
2. Sachant que Sofia a mis entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma, quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'elle ait emprunté le bus ?

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)\big(2 - \ln(x)\big)}{x^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

c. Calculer $f(1)$ et $f\left(\text{e}^2\right)$.

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{\text{e}^2}$	↘	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0~;~+\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 3 (3 points)
Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(x) = 2\text{e}^x - \text{e}^{2x}$$

et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que, pour tout x appartenant à $[0~;~\ln(2)]$, $f(x)$ est positif.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition A :

L'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ est égale à 1 unité d'aire.

Partie B

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2n\text{e}^x - \text{e}^{2x}$$

et $\mathcal{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que f_n est dérivable et que $\mathcal{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition B :

Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.

Exercice 4 (3 points)
Commun à tous les candidats

Les questions 1. et 2. de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

2. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

Exercice 5 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{21}{4}$.

2. **a.** En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. **a.** Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).
Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\left\{\begin{array}{rcr} b_0 & = & 1\,000 \\ c_0 & = & 1\,500 \\ b_{n+1} & = & 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} & = & -0,5b_n + 1,3c_n \end{array}\right.$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1er juin de l'année $2000 + n$ (où n désigne un entier naturel).

1. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1\,050 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$ et calculer U_2.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

a. Déterminer la valeur de a en justifiant.

b. On admet que $A = PTQ$.
Démontrer que, pour tout entier n non nul, on a

$$A^n = PT^nQ.$$

c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n non nul,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}.$$

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.
Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

Initialisation :	N prend la valeur 0
	B prend la valeur 1 000
	C prend la valeur 1 500
Traitement :	Tant que $B > 2$ ou $C > 2$
	N prend la valeur $N + 1$
	R prend la valeur B
	B prend la valeur $0,3R + 0,5C$
	C prend la valeur $-0,5R + 1,3C$
	Fin Tant Que
Sortie :	Afficher N

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$U_n = \begin{pmatrix} 1\,000 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0,8^n \\ 1\,500 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0,8^n \end{pmatrix}$$

et

$$n \leqslant 10 \times 1,1^n.$$

a. En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n).

b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.

À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna

26 février 2018

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 36.
On a alors, à 10^{-3} près :

a. $P(X \leqslant 81,2) \approx 0,542$

b. $P(X \leqslant 81,2) \approx 0,301$

c. $P(81,2 \leqslant X \leqslant 103,8) \approx 0,542$

d. $P(81,2 \leqslant X \leqslant 103,8) \approx 0,301$

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2.
Une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite. On a alors :

a. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-2 < N < 2)}{2}$

b. $P(X > 52) = 1 - P(-2 < N < 2)$

c. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}$

d. $P(X > 52) = 1 - P(-1 < N < 1)$

3. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T > 2) = 0,5$.
Une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P_{(T>2)}(T > 5)$ est égale à :

a. 0,35

b. 0,54

c. 0,53

d. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

4. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.
On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne. On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées.
On note $E(X)$ l'espérance de X. On a alors :

a. $E(X) = 3$

b. $E(X) = \dfrac{3}{8}$

c. $P(X \geqslant 1) \approx 0,905$ à 10^{-3} près

d. $P(X \geqslant 1) \approx 0,095$ à 10^{-3} près

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

Soient les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

On pose :

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner la forme algébrique de Z.
2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. On admet que :
   - $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   - pour tous réels a et b, $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.

   Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}.$$

Exercice 3 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcr} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{array}\right.$$

   Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

   Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.
   Affirmation B : Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2n + 5.$$

2. Soit une suite (v_n).
   Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

   alors la suite (v_n) converge.
3. **Affirmation D :** Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \ldots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7).$$

4. Soit (w_n) une suite convergente.

Affirmation E : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g.

b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\,;\,0]$.

3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

b. En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}$ puis montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0.$$

d. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.