

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X , notée $E(X)$, est égale à :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x 0,2t e^{-0,2t} dt.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(X) = 5$.

- On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = 0,2t e^{-0,2t}$.
On définit la fonction G sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $G(t) = (-t - 5)e^{-0,2t}$.
Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 5.

Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-0,2x} = 0.$$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T . Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ . Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0,067$.

- Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.
- Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

- La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2 \text{ min}^{-1}$.
 - Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
 - Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.
- L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
 - parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
 - parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » ;

\bar{B} : « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10€ d'achats.

Par exemple, si le montant des achats est 58,64€, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31€, le client obtient 12 cartes.

Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

- Un client effectue des achats pour un montant de 158,02€.
Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?
- À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10€, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

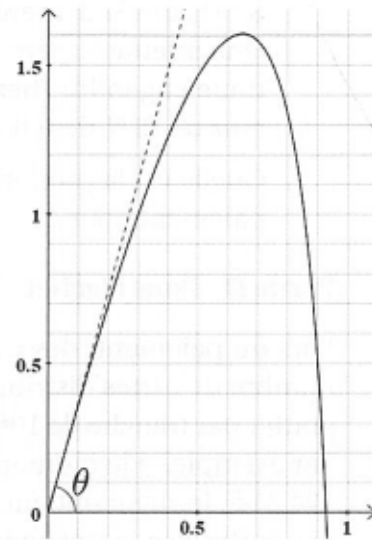
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1[$. On note f' sa fonction dérivée. On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0; 1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1-x}$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

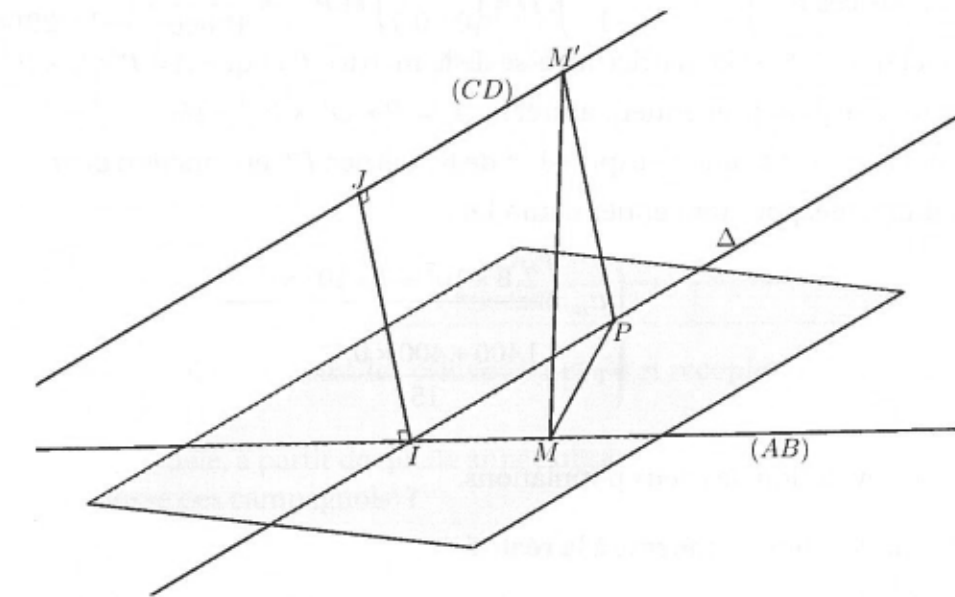
- Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
- Dans cette question, on choisit $b = 5,69$. L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ .

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A . On considère les points $B(10; -8; 2)$, $C(-1; -8; 5)$ et $D(14; 4; 8)$.

- Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD) .
 - Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
- On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.
 - Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ .
 - Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD) . La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD) .
- Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD) . Sur le schéma ci-dessous on a représenté les droites (AB) et (CD) , les points I et J , et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I . On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I . On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J .



- Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P .
- Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P .
- Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1^{er} juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1^{er} juillet de l'année 2012+n.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} = 2 \times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0, \text{ avec } u_0 = 2000000 \text{ et } v_0 = 120.$$

- 1.a) On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 0$.
Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0 .
- b) Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1^{er} juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20000 & 5000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{15000} \times \begin{pmatrix} 1 & -5000 \\ -1 & 20000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

- a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.
- b) Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n .
- c) On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n = \frac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n = \frac{1400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

Décrire l'évolution des deux populations.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent. On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} = 2 \times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0, \text{ avec } u_0 = 2000000 \text{ et } v_0 = 120.$$

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

| | A | B | C |
|----|-----------------------|-----------|-------|
| 1 | Modèle de la partie B | | |
| 2 | n | u_n | v_n |
| 3 | 0 | 2 000 000 | 120 |
| 4 | 1 | 1 960 000 | 120 |
| 5 | 2 | 1 920 800 | 119 |
| 6 | 3 | 1 884 228 | 117 |
| 7 | 4 | 1 851 905 | 114 |
| 8 | 5 | 1 825 160 | 111 |
| 9 | 6 | 1 804 988 | 107 |
| 10 | 7 | 1 792 049 | 103 |
| 11 | 8 | 1 786 692 | 99 |
| 12 | 9 | 1 789 005 | 94 |
| 13 | 10 | 1 798 854 | 91 |
| 14 | 11 | 1 815 930 | 87 |
| 15 | 12 | 1 839 780 | 84 |
| 16 | 13 | 1 869 827 | 81 |
| 17 | 14 | 1 905 378 | 79 |
| 18 | 15 | 1 945 622 | 77 |
| 19 | 16 | 1 989 620 | 77 |
| 20 | 17 | 2 036 288 | 76 |
| 21 | 18 | 2 084 374 | 77 |
| 22 | 19 | 2 132 440 | 78 |
| 23 | 20 | 2 178 846 | 80 |
| 24 | 21 | 2 221 746 | 83 |
| 25 | 22 | 2 259 109 | 87 |
| 26 | 23 | 2 288 766 | 91 |
| 27 | 24 | 2 308 508 | 97 |

- Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?
- Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

Partie C

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.

Est-il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$? (On parle alors d'état stable.)