

BACCALAURÉAT, SÉRIE S
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

Soit E un ensemble de n éléments

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$; $0! = 1$

$$C_n^p = C_n^{n-p} ; \quad C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p+1}$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) ; \quad P(\Omega) = 1 ; \quad P(\emptyset) = 0$$

Si A_1, \dots, A_n forment une partition de A , $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) ; \quad P(A|B) \text{ se note aussi } P_B(A)$$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

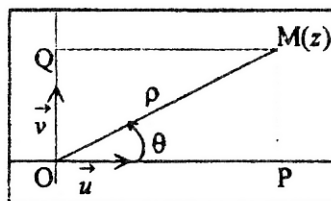
Ecart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

III. ALGÈBRE

A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x \vec{u} + y \vec{v} \\ \overline{OP} &= x = \Re(z) = \rho \cos \theta \\ \overline{OQ} &= y = \Im(z) = \rho \sin \theta \\ OM &= \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y')$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} ; \quad \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$$

$$z \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho \rho' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$|zz'| = |z| |z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

Inégalité triangulaire

$$\left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

B. IDENTITÉS REMARQUABLES

(valables sur \mathbf{C} et donc sur \mathbf{R})

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

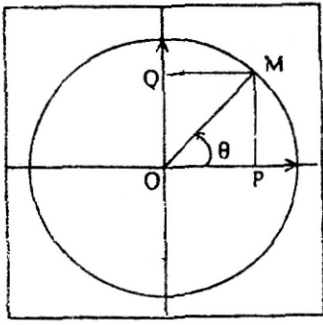
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 ;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) ; \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

C. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) ; \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} ; \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules de Moivre et applications

Pour tout entier naturel non nul n , $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

(formules valables sur \mathbb{C} et donc sur \mathbb{R})

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

IV. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0)$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$\text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[,$$

$$y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, +\infty[\text{ et } y \in [0, +\infty[,$$

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$, $(1+x)^\alpha$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\begin{cases} (1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h) & (\alpha \neq 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases}$$

2. Suites

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0 \text{ et } a > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } a > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty ; \quad \text{si } 0 < a < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

C. **DÉRIVÉES ET PRIMITIVES** (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. **Dérivées et primitives des fonctions usuelles**

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. **Opérations sur les dérivées**

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. **CALCUL INTÉGRAL**

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

E. **ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$,

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$