CONGRUENCES

* Montrons que $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0\,[5]$ $\forall n\in\mathbb{N}$

On a $3^{3n+2}=3^{3n}\times 3^2=27^n\times 9$ et $2^{n+4}=2^n\times 2^4=2^n\times 16$

$27=5\times 5+2$ et $2=5\times 0+2$ donc $27\equiv 2\,[5]$ ⇒ $27^n\equiv 2^n\,[5]$

$9=5\times 2-1$ et $-1=5\times 0-1$ donc $9\equiv -1\,[5]$, par produit de congruences on obtient le résultat partiel suivant $27^n\times 9\equiv -2^n\,[5]$ (1)

$16=5\times 3+1$ et $1=5\times 0+1$ donc $16\equiv 1\,[5]$ de plus $2\equiv 2\,[5]$ ⇒ $2^n\equiv 2^n\,[5]$

Par produit de congruences, $16\times 2^n\equiv 2^n\,[5]$ (2)

Par addition de congruences sur les résultats (1) et (2) on obtient $27^n\times 9+16\times 2^n\equiv 0\,[5]$

Donc $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0\,[5]$

* Montrons que 7^n+1 est divisible par 8 si n est impair ⇔ $7^n+1\equiv 0\,[8]$ si n est impair

n impair ⇒ $n=2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$ $7^n+1=7^{2k+1}+1=49^k\times 7+1$

$49=8\times 6+1$ et $1=8\times 0+1$ donc $49\equiv 1\,[8]$ et par puissance de congruences $49^k\equiv 1\,[8]$. D'autre part $7=8\times 1-1$ et $-1=8\times 0-1$ donc $7\equiv -1\,[8]$

Par produit de congruences $49^k\times 7\equiv -1\,[8]$ or $1\equiv 1\,[8]$, par somme de congruences, $49^k\times 7+1\equiv 0\,[8]$ ⇔ $7^n+1\equiv 0\,(8)$

* Quel est le reste de la division de $1^n+2^n+3^n+4^n$ par 4 pour n entier positif ?

$3=4\times 1-1$ et $-1=4\times 0-1$ donc $3\equiv -1\,[4]$ et $3^n\equiv(-1)^n\,[4]$, de plus $1^n\equiv 1^n\,[4]$

$4=4\times 1+0$ et $0=4\times 0+0$ donc $4\equiv 0\,[4]$ et $4^n\equiv 0\,[4]$, de plus $2^n\equiv 2^n\,[4]$

Par somme de congruences on a donc $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1^n+2^n+(-1)^n+0\,[4]$

si n est pair $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1+2^n+1=2+2^n\,[4]$

si n est impair $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1+2^n-1=2^n\,[4]$

* n pair $n=2k$ et $2+2^n=2+2^{2k}=2+4^k$ or $4\equiv 0\,[4]$ ⇒ $4^k\equiv 0\,[4]$

et $2\equiv 2\,[4]$ d'où par somme de congruences $4^k+2\equiv 2\,[4]$ donc $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 2\,[4]$

Ce qui signifie que si n est pair le reste de la division de $1^n+2^n+3^n+4^n$ par 4 est 2

* n impair $n=2k+1$ et $2^n=2^{2k+1}=2^{2k}\times 2=4^k\times 2$ or $4^k\equiv 0\,[4]$ et $2\equiv 2\,[4]$

Par produit de congruences $4^k\times 2\equiv 0\,[4]$ donc $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 0\,[4]$

Ce qui signifie que si n est impair le reste de la division de $1^n+2^n+3^n+4^n$ par 4 est 0