Rappel de cours : Une fonction f est dérivable en un point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, c'est à dire est différente de l'infini, de plus $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

On obtient un nombre fini qui est un réel et qui vaut $f'(x_0)$.

* Exemple 1 :

Soit la fonction $f(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$

La fonction f est elle dérivable en 0 ?

Pour cela cherchons $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = ?$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-1/x}-0}{x-0} = \frac{e^{-1/x}}{x} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \mapsto 0^+} e^{-1/x} = 0 \\ \lim\limits_{x \mapsto 0^+} x = 0 \end{array}\right\} FI\ 0/0$$

Donc posons $X = 1/x \Leftrightarrow x = 1/X$

$$\frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{e^{-X}}{\frac{1}{X}} = \frac{1}{e^X} \cdot X = \frac{X}{e^X}$$

Quand $x \mapsto 0^+$, $X \mapsto +\infty$ chercher $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$ est équivalent à $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \dfrac{X}{e^X}$

Cours $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ Donc $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \dfrac{X}{e^X} = \dfrac{1}{\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \dfrac{e^X}{X}} = 0^+$

ccl Comme $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0^+$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

* Exemple 2 :

Soit la fonction $h(x) = \dfrac{x^2}{e^x-1}$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = 0$

La fonction h est elle dérivable en 0 ?

Cherchons $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\frac{x^2}{e^x-1}}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{x^2}{e^x-1} \times \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{x}{e^x-1}$ Rappel $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$

$= \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

ccl Comme $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = 1$, h est dérivable en 0 et $h'(0) = 1$