limites de fonctions contenant ln (expression)

* ? $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{x+4}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln(2x+3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x+4 = +\infty$

On a donc une forme indeterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

On a $\dfrac{\ln(2x+3)}{x+4} = \dfrac{\ln(2x+3)}{2x+3} \times \dfrac{2x+3}{x+4}$ changement de variable posons $X = 2x+3$

quand $x\mapsto+\infty$ $X\mapsto+\infty$

l'expression devient $\dfrac{\ln X}{X} * \dfrac{X}{\frac{1}{2}X+\frac{5}{2}}$

D'après le cours $\lim\limits_{X\mapsto+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ et $\lim\limits_{X\mapsto+\infty} \dfrac{X}{\frac{1}{2}X+5/2} = \lim\limits_{X\mapsto+\infty} \dfrac{X}{\frac{1}{2}X} = 2$

d'après le theorème du rapport de deux polynomes en $+\infty$ ou en $-\infty$

Par consequent et par produit de limites on peut conclure et affirmer

que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{(2x+3)}{x+4} = 0$

* ? $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x = +\infty$

On a donc une forme indeterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

On fait un changement de variable posons $X = \ln x \Leftrightarrow e^X = x$ quand $x\to+\infty$ $X\mapsto+\infty$

l'expression devient $\dfrac{X^2}{e^X} = \dfrac{1}{\frac{e^X}{X^2}}$ D'après le cours $\lim\limits_{X\mapsto+\infty} \dfrac{e^X}{X^2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{X\mapsto+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^X}{X^2}} = 0$ Par consequent $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

* ? $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln(2x+3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

c'est une forme indeterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

On fait le changement de variable suivant $X = x^{1/3} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow X^3 = x$

quand $x\mapsto+\infty$, $X\mapsto+\infty$

l'expression devient $\dfrac{\ln(2X^3+3)}{X} = \dfrac{\ln\left(2X^3\left(1+\frac{3}{2X^3}\right)\right)}{X} = \dfrac{\ln(2X^3) + \ln\left(1+\frac{3}{2X^3}\right)}{X}$

ce qui donne $\dfrac{\ln 2 + \ln x^3 + \ln\left(1+\frac{3}{2x^3}\right)}{x} = \dfrac{\ln 2 + 3\ln x + \ln\left(1+\frac{3}{2x^3}\right)}{x}$

$= \dfrac{\ln 2}{x} + 3\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{2x^3}\right)}{x}$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3\dfrac{\ln x}{x} = 0$ (cours)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{2x^3}\right)}{x} = 0$

Par limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{3\sqrt{x}} = 0$

* ? $\lim \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

On a donc une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

On fait le changement de variable suivant $X = \ln x \iff e^X = x$ d'où l'écriture $\dfrac{X^2}{e^{\frac{X}{2}}} = \dfrac{4\left(\frac{X}{2}\right)^2}{e^{X/2}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^{\frac{X}{2}}}{4\left(\frac{X}{2}\right)^2}} = \dfrac{4}{\dfrac{e^{\frac{X}{2}}}{\left(\frac{X}{2}\right)^2}}$ Or d'après le cours $\lim\limits_{Y\to+\infty} \dfrac{e^Y}{Y^2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2}{e^{X/2}} = 0$ par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = 0$

* ? $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x+5) - \ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x+5) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$

C'est une forme indéterminée $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x+5) - \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x+5}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(2+\dfrac{5}{x}\right) = \ln 2$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = 0$ (cours)

* ? $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$

C'est une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{x\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x\ln x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x\ln x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x\ln x}$$

D'après le cours $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x\ln x} = 0^-$ Par somme de limites $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{x\ln x} = +\infty$

* ? $\lim_{x\to0^+} x^2 \ln x$

$\lim_{x\to0^+} x^2 = 0^+$
$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

On a donc une forme indéterminée $0 \times \infty$

On fait un changement de variable $X = 1/x$ donc si $x \to 0^+$, $X \to +\infty$

$$\lim_{x\to0^+} x^2\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^2} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^2}(\ln 1 - \ln X)$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln X}{X^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln X}{X} \times \frac{1}{X}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} \times \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0 \times 0 = 0$$

* ? $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{4x}$

$\lim_{x\to0} \ln(1+x) = 0$
$\lim_{x\to0} 4x = 0$

On a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{4} \times 1 = 1/4$$ (cours)

* ? $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}$

$\lim_{x\to0} \ln(1+x+x^2) = 0$
$\lim_{x\to0} x = 0$

On a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\ln\left((1+x)\left(1+\frac{x^2}{1+x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{1+x}\right)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{x\to0} \frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{1+x}\right)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} + \lim_{x\to0} \frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{x+1}\right)}{\frac{x^2}{x+1}} \times \frac{x}{x+1}$$

Or d'après le cours $\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{x+1}\right)}{\frac{x^2}{x+1}} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0$

Par conséquent $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} = 1 + 1 * 0 = 1$

* ? $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ $\quad \lim_{x\to 0} \ln(1+x^2) = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ C'est donc une forme indéterminée $0/0$

On fait un changement de variable posons $X = x^2$ si $x \to 0$ donc $X \to 0$

On a donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (cours)

* ? $\lim_{x\to 5} \frac{\ln(x-4)}{x^2-25}$ $\quad \lim_{x\to 5} \ln(x-4) = 0$, $\lim_{x\to 5} x^2-25 = 0$ C'est une forme indéterminée $0/0$

On fait un changement de variable posons $X = x-5$ si $x \to 5$, $X \to 0$

On a donc $\lim_{x\to 5} \frac{\ln(x-4)}{x^2-25} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(X+1)}{(X+5)^2-25} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(X+1)}{X^2+10X}$

$= \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X(X+10)} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} * \frac{1}{X+10}$

$= \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} * \lim_{X\to 0} \frac{1}{X+10} = 1 \times \frac{1}{10} = 1/10$

* ? $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2$ $\quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$ C'est une forme indéterminée $0 \times \infty$

On fait un changement de variable en posant $X = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{X}$

Si $x \to 0$, $X \to +\infty$

On a donc $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = \lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X} * \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X} * (\ln 1 - \ln X)$

$= \lim_{X\to +\infty} -\frac{\ln X}{X}$ car $\ln 1 = 0$

d'après le cours $\lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = 0^-$