Récurrence

* Exemple 1 Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ avec $u_1 = 1$ $\forall n \geq 1$

Calculons quelques termes de la suite :

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2\times 1 + 1 = 2 + 1 = 3 = 2^2 - 1$
$u_3 = 2u_2 + 1 = 2\times 3 + 1 = 6 + 1 = 7 = 2^3 - 1$
$u_4 = 2u_3 + 1 = 2\times 7 + 1 = 14 + 1 = 15 = 2^4 - 1$
$u_5 = 2u_4 + 1 = 2\times 15 + 1 = 30 + 1 = 31 = 2^5 - 1$
$u_6 = 2u_5 + 1 = 2\times 31 + 1 = 62 + 1 = 63 = 2^6 - 1$

Montrons que $u_n = 2^n - 1$ $\forall n \geq 1$

a) Initialisation $n = 1$ $u_1 = 1$ par hypothèse avec la formule $u_1 = 2^1 - 1 = 1$

la relation de récurrence est donc vraie au rang $n = 1$ (premier rang)

b) Hérédité supposons que $u_n = 2^n - 1$ vraie pour n

c) Montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ $\forall n \geq 1$

On part de la relation de l'étape b) $u_n = 2^n - 1$

$\Leftrightarrow$ $2u_n = 2(2^n - 1)$

On fait apparaître le terme de gauche de l'égalité à démontrer c'est à dire u_{n+1}

$\Leftrightarrow$ $2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1$
$\Leftrightarrow$ $u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1$
$\Leftrightarrow$ $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\underline{u_n = 2^n - 1}$

* Exemple 2 Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = 2v_n - 3$ avec $v_0 = 1$ $\forall n \geq 0$

Montrons que $v_n = 3 - 2^{n+1}$ $\forall n \geq 0$

a) Initialisation $n = 0$ $v_0 = 1$ par hypothèse avec la formule $v_0 = 3 - 2^1 = 1$

la relation de récurrence est donc vraie au premier rang $n = 0$

b) Hérédité supposons que $v_n = 3 - 2^{n+1}$ vraie pour n

c) Montrons que $v_{n+1} = 3 - 2^{n+2}$ $\forall n \geq 0$

On part de la relation de l'étape b) $v_n = 3 - 2^{n+1}$

Faisons apparaître v_{n+1}

$\Leftrightarrow$ $2v_n = 2(3 - 2^{n+1})$
$\Leftrightarrow$ $2v_n = 6 - 2^{n+2}$
$\Leftrightarrow$ $2v_n - 3 = 6 - 2^{n+2} - 3$

$\Leftrightarrow$ $v_{n+1} = 3 - 2^{n+2}$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underline{v_n = 3 - 2^{n+1}}$

Récurrence

* Exemple 1

Montrer que $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Initialisation $n=0$ $\quad 3^{6\times 0+2}-2 = 3^2-2 = 9-2 = 7\times 1$ donc la relation est vraie au premier rang $n=0$

b) Hérédité supposons que $3^{6n+2}-2$ est un multiple de 7 c'est à dire que $3^{6n+2}-2 = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$

c) Montrons que $3^{6n+8}-2$ est divisible par 7 en montrant qu'il est multiple de 7

On part de la relation de l'étape b) $\quad 3^{6n+2}-2 = 7k$

Faisons apparaître le terme de gauche de la relation que l'on veut démontrer

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 3^6 \times (3^{6n+2}-2) = 7k\times 3^6\\
&\Leftrightarrow 3^{6+6n+2} - 2\times 3^6 = 7.k\times 3^6\\
&\Leftrightarrow 3^{6n+8} - 2\times 729 = 7k\times 3^6\\
&\Leftrightarrow 3^{6n+8} - 2\times 729 + 2\times 728 = 7k\times 3^6 + 2\times 728\\
&\Leftrightarrow 3^{6n+8} - 2 = 7k\times 3^6 + 2\times 7\times 104\\
&\Leftrightarrow 3^{6n+8} - 2 = 7(k\times 3^6 + 208)\\
&\Leftrightarrow 3^{6n+8} - 2 = 7k' \quad (\text{multiple de } 7)
\end{aligned}$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 3^{6n+2}-2$ est divisible par 7

* Exemple 2

Montrer que 4^n-1 est multiple de 3 pour $n \geq 0$

a) Initialisation $n=0$ $\quad 4^n-1 = 4^0-1 = 1-1 = 0 = 3\times 0$ donc la relation est vraie pour $n=0$

b) Hérédité supposons que 4^n-1 est un multiple de 3 c'est à dire que $4^n-1 = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$

c) Montrons que $4^{n+1}-1$ est un multiple de 3

On part de la relation de l'étape b) $\quad 4^n-1 = 3k \Leftrightarrow 4(4^n-1) = 4\times 3k$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4^{n+1}-4 = 4\times 3k \Leftrightarrow 4^{n+1}-4+3 = 4\times 3k+3\\
&\Leftrightarrow 4^{n+1}-1 = 3(4k+1) = 3k' \quad (\text{multiple de } 3)
\end{aligned}$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 4^n-1$ est un multiple de 3

* Exemple 3 Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - n - 1$ $\forall n \geq 1$

Montrer que $u_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1$

a) Initialisation $n=1$ $\quad u_1 = 5$ par hypothèse, avec la formule $u_1 = 2(2^0+1)+0+1 = 5$

La relation de récurrence est donc vraie au premier rang c'est à dire pour $n=1$

b) Hérédité supposons que $u_n = 2(2^{n-1}+1)+n$ vraie pour n

c) Montrons que $u_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1$

On part de la relation de l'étape b) $\quad u_n = 2(2^{n-1}+1)+n = 2^n+2+n$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2u_n = 2(2^n+2+n) = 2^{n+1}+4+2n\\
&\Leftrightarrow 2u_n - n - 1 = 2^{n+1}+4+2n-n-1\\
&\Leftrightarrow u_{n+1} = 2^{n+1}+2+n+1\\
&\Leftrightarrow u_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1 \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

La relation de récurrence est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n = 2(2^{n-1}+1)+n$

Recurrence

* Exemple 1

Montrer que $4^n - 1 - 3n$ est un multiple de 9 $\forall n \geq 2$

a) Initialisation $n=2$ $\quad 4^2 - 1 - 3\times 2 = 16 - 1 - 6 = 9 = 9\times 1$ donc la relation ~~est~~ vraie au premier rang

b) Hérédité Supposons que $4^n - 1 - 3n = 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$ relation vraie au rang n

c) Montrons que $4^{n+1} - 1 - 3n - 3$ est un multiple de 9

On part de la relation de l'étape b) c'est à dire $4^n - 1 - 3n = 9k$

Faisons apparaître le terme de gauche de la relation que l'on veut démontrer $4(4^n - 1 - 3n) = 9k \times 4$

$$\Leftrightarrow 4^{n+1} - 4 - 4\times 3n = 9k\times 4 \quad \Leftrightarrow 4^{n+1} - 1 - 3 - 4\times 3n = 9k\times 4$$
$$\Leftrightarrow 4^{n+1} - 1 - 3 - 4\times 3n + 3\times 3n = 9k\times 4 + 3\times 3n \quad \Leftrightarrow 4^{n+1} - 1 - 3 - 3n = 9k\times 4 + 9n$$
$$\Leftrightarrow 4^{n+1} - 1 - 3n - 3 = 9(4k + n) \quad \Leftrightarrow 4^{n+1} - 1 - 3(n+1) = 9k'$$

Conclusion $\forall n \geq 2$ $\quad \underline{4^n - 1 - 3n \text{ est un multiple de } 9}$

* Exemple 2

Montrer que $7\times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11 $\forall n \geq 0$

a) Initialisation $n=0$ $\quad 7\times 3^{5\times 0} + 4 = 7\times 3^0 + 4 = 7+4 = 11 = 11\times 1$ donc la relation est vraie au premier rang

b) Hérédité Supposons que $7\times 3^{5n} + 4 = 11k$ avec $k \in \mathbb{N}$ relation vraie au rang n

c) Montrons que $7\times 3^{5n+5} + 4$ est un multiple de 11 donc divisible par 11

On part de la relation de l'étape b) c'est à dire $7\times 3^{5n} + 4 = 11k$ Faisons apparaître le terme de gauche de la relation que nous voulons démontrer $3^5(7\times 3^{5n} + 4) = 11k\times 3^5$

$$\Leftrightarrow 3^5\times 7\times 3^{5n} + 3^5\times 4 = 11k\times 3^5 \quad \Leftrightarrow 7\times 3^{5n+5} + 3^5\times 4 = 11k\times 3^5$$
$$\Leftrightarrow 7\times 3^{5n+5} + 3^5\times 4 - 4\times 242 = 11k\times 3^5 - 4\times 242 \qquad (3^5 = 243)$$
$$\Leftrightarrow 7\times 3^{5n+5} + 4 = 11k\times 3^5 - 4\times 11\times 22$$
$$\Leftrightarrow 7\times 3^{5n+5} + 4 = 11(\underbrace{3^5 k - 88}_{k'}) \quad \Leftrightarrow 7\times 3^{5n+5} + 4 = 11\times k'$$

Conclusion $\forall n \geq 0$ $\quad \underline{7\times 3^{5n} + 4 \text{ est donc multiple de } 11\text{, donc divisible par } 11}$

* Exemple 3

Montrer que $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5 $\forall n \geq 0$

a) Initialisation $n=0$ $\quad 3^{3\times 0+2} + 2^{0+4} = 3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25 = 5\times 5$ donc multiple de 5

b) Hérédité Supposons que $3^{3n+2} + 2^{n+4} = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}$ relation vraie au rang n

c) Montrons que $3^{3n+5} + 2^{n+5}$ est un multiple de 5

On part de la relation de l'étape b) c'est à dire $3^{3n+2} + 2^{n+4} = 5k$

$$\Leftrightarrow 3^3(3^{3n+2} + 2^{n+4}) = 5k\times 3^3 \quad \Leftrightarrow 3^{3n+5} + 3^3\times 2^{n+4} = 5k\times 3^3$$
$$\Leftrightarrow 3^{3n+5} + 27\times 2^{n+4} = 5k\times 3^3 \quad \Leftrightarrow 3^{3n+5} + 27\times 2^{n+4} - 25\times 2^{n+4} = 5k\times 3^3 - 25\times 2^{n+4}$$
$$\Leftrightarrow 3^{3n+5} + 2\times 2^{n+4} = 5(\underbrace{k\times 27 - 5\times 2^{n+4}}_{k'}) \quad \Leftrightarrow 3^{3n+5} + 2^{n+5} = 5k'$$

Conclusion $\forall n \geq 0$ $\quad \underline{3^{3n+2} + 2^{n+4} \text{ est divisible par } 5\text{, car multiple de } 5}$

Récurrence

* Exemple 1 Démontrer que $\forall n \geq 0$ $\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$

a) Initialisation $n=0$ $\sum_{k=0}^{0}(3k+1) = 3\times 0+1 = 1$ $\frac{1}{2}(3\times 0^2+5\times 0+2) = \frac{1}{2}\times 2 = 1$

La relation de récurrence est donc vraie au rang 1 c'est à dire pour $n=0$

b) Hérédité On suppose que $\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$ est vraie au rang n

c) Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1}(3k+1) = \frac{1}{2}\left(3(n+1)^2+5(n+1)+2\right)$

C'est à dire que $\sum_{k=0}^{n+1}(3k+1) = \frac{1}{2}\left(3(n^2+2n+1)+5n+5+2\right) = \frac{1}{2}(3n^2+6n+3+5n+7) = \frac{1}{2}(3n^2+11n+10)$

Pour cela on part de la relation que l'on a supposée être vraie à l'étape b) c'est à dire

$\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = 1+4+7+10+\cdots\ 3n+1 = \frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$ et on ajoute des deux côtés le terme $3n+4$ ce qui donne

$\sum_{k=0}^{n}(3k+1)+3n+4 = 1+4+7+\cdots+3n+1+3n+4 = \frac{1}{2}(3n^2+5n+2)+3n+4$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1}(3k+1) = \frac{1}{2}(3n^2+5n+2+6n+8) = \frac{1}{2}(3n^2+11n+10)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1}(3k+1) = \frac{1}{2}\left(3(n+1)^2+5(n+1)+2\right)$ quand on met en forme $3n^2+11n+10$

Conclusion la relation de récurrence est démontrée et $\forall n \geq 0$ $\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$

* Exemple 2 Démontrer que $\forall n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)!-1$ Rappel $n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 1$

a) Initialisation $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k\,k! = 1\times 1! = 1$ et $(1+1)!-1 = 2!-1 = 2-1 = 1$

La relation de récurrence est donc vraie au premier rang c'est à dire pour $n=1$

b) Hérédité On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)!-1$ est vraie au rang n

c) Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k\,k! = (n+2)!-1$ Pour cela on part de la relation de l'étape b) c'est à dire $\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)!-1$ et on fait apparaître le terme de gauche de la relation à démontrer

$\sum_{k=1}^{n} k\,k! = 1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\,n! = (n+1)!-1$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\,k! + (n+1)(n+1)! = 1\times 1!+2\times 2!+\cdots+n\,n!+(n+1)(n+1)! = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)!$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k\,k! = (n+1)!\left(1+(n+1)\right)-1 = (n+1)!(n+2)-1 = (n+2)!-1$

On a donc bien $\sum_{k=1}^{n+1} k\,k! = (n+2)!-1$, la relation est donc vraie $\forall n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)!-1$

Récurrence

* Exemple 1 Démontrer que $\forall n \geq 1$ $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

a) Initialisation $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et avec la formule $\frac{1\times 2\times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

La relation de récurrence est donc vraie au premier rang c'est à dire $n=1$

b) Hérédité On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie au rang n

c) Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ Pour cela on part de la relation que l'on a supposé être vraie à l'étape b) c'est à dire $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On fait apparaître le terme de gauche de la relation à démontrer en ajoutant de chaque côté le terme $(n+1)^2$ On a donc $\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$$

On obtient bien le résultat cherché donc $\forall n \geq 1$ on a bien $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* Exemple 2 Démontrer que $\forall n \geq 1$ $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$

c'est à dire $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

a) Initialisation $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = (1)^2 = 1$

La relation de récurrence est donc vraie au premier rang c'est à dire pour $n=1$

b) Hérédité On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ est vraie au rang n

c) Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$ Pour cela on part de la relation que l'on a supposé être vraie à l'étape b) c'est à dire $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ On fait apparaître le terme de gauche de la relation à démontrer en ajoutant de chaque côté le terme $(n+1)^3$ On a donc $\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$

Rappel $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ Donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^3\times 4}{4}$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

On obtient bien le résultat cherché donc $\forall n \geq 1$ $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+4+\dots+n)^2$ est vraie