Notions essentielles du cours de mathématiques de MPSI

Julien Élie

Ce petit document reprend le plan de cours de Serge Francinou, l'excellent professeur que j'ai eu l'honneur d'avoir en mathématiques au Lycée Henri-IV de Paris en HX3, classe de mathématiques supérieures en MPSI (Mathématiques, Physique et Sciences de l'Ingénieur), durant l'année scolaire 2002-2003. Il est à noter que j'ai moi-même été interrogateur en mathématiques dans cette même classe durant l'année scolaire 2006-2007.

J'ai pensé qu'il pourrait être utile aux taupins d'avoir une synthèse en une page de ce qu'il faut retenir de chaque chapitre traité. Cela constitue la base du cours et il est essentiel de connaître ces notions. Il va de soi que je ne vise pas l'exhaustivité et qu'il existe une part de subjectivité dans le choix des points que je mentionne.

Je conseille vivement aux étudiants d'annoter, de commenter et de compléter à la main chaque page afin de les personnaliser et de mieux faire ressortir les notions qu'ils maîtrisent le moins. Il peut aussi être profitable de réaliser quelques recherches personnelles sur les curiosités, ce qui permet d'acquérir une meilleure vision des mathématiques et d'élargir sa culture — chose essentielle, surtout à l'oral des grands concours.

Quoi qu'il en soit, la bonne connaissance des notions abordées dans ce recueil est une condition *nécessaire* pour réussir à résoudre les exercices et les problèmes de classes préparatoires.

Veuillez cependant noter qu'il est possible que le programme de mathématiques ait un tantinet changé depuis 2002 ; c'est pourquoi il est utile de se reporter au programme officiel présent sur le site de l'*Union des Professeurs de Spéciales* <http://ups.prepas.org/maths/>, qui seul fait autorité.

Table des matières

A Structures fondamentales

A.1 Éléments de théorie des ensembles

Notions

- Les tables de vérité de $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$; la relation $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.
- L'inclusion, la complémentarité, les parties d'un ensemble, l'intersection et la réunion, avec leurs propriétés élémentaires (comme les lois de DE MORGAN).
- La différence entre une application ($E = \mathfrak{D}_f$) et une fonction ($E \subset \mathfrak{D}_f$).
- L'ensemble $\mathfrak{F}(E, F) = F^E$ des familles indexées sur E à valeurs dans F.
- $f : E \to F$ injective : $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- $f : E \to F$ surjective : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.
- Si f et g sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ et $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = E$ (d'après la quantification).
- Les recouvrements, les partitions et les formules d'associativité.
- Une relation binaire de E est une partie $\mathfrak{R}$ de E^2.
- Une relation binaire est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.
- L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathfrak{R}$ est l'ensemble-quotient ${}^{E}/_{\mathfrak{R}}$, inclus dans $\mathfrak{P}(E)$.
- La relation d'équivalence associée à f est : $x\ \mathfrak{R}_f\ y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
- Une relation binaire est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Si f est monotone et bijective, f^{-1} est monotone de même sens lorsque E est totalement ordonné.
- Le plus grand élément ($\forall x \in E,\ x \leqslant M$), **un** élément maximal ($\forall x \in E,\ M \leqslant x \Rightarrow x = M$) et la borne supérieure (le plus petit des majorants).
- Pour un ensemble $(E, \leqslant)$ totalement ordonné, $S \in E$ est la borne supérieure de $F \subset E$ si, et seulement si, $\forall x \in F,\ x \leqslant S$ et $\forall c < S,\ \exists x \in F,\ c < x$.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
- Le principe de descente infinie de FERMAT : il n'existe pas de suite de $\mathbb{N}$ strictement décroissante.
- L'axiome d'ARCHIMÈDE : $\forall a, b \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ na > b$.

Savoir-faire

- Identifier *la* méthode de raisonnement la plus appropriée à utiliser (syllogisme, double implication, contraposée, absurde, récurrence – faible, forte, descendante –, etc.).
- Dessiner des diagrammes pour mieux visualiser les ensembles !
- Prouver que l'ensemble des ensembles n'existe pas.
- Bien vérifier la vraisemblance des ensembles de départ et d'arrivée des applications (notamment lors des compositions et des restrictions, où $f_{|A} = g$ si $f : E \to \mathbf{F}$, $A \subset E$ et $g : A \to \mathbf{F}$).
- Pour parler d'application réciproque, notée f^{-1}, il est nécessaire de justifier au préalable la bijectivité de f. Ne pas confondre avec l'image réciproque $f^{<-1>}$ d'un ensemble.
- Si $F \subset E$, l'injection canonique $I_{E|F}$ permet d'injecter F dans E.
- Si $f : E \to F$, on peut écrire $f = i \circ \overline{f} \circ s$ où i est l'injection canonique de $\mathrm{im}(f)$ dans F, $\overline{f} : {}^{E}/_{\mathfrak{R}_f} \to \mathrm{im}(f)$ la bijection canonique et s la surjection canonique de E **sur** ${}^{E}/_{\mathfrak{R}_f}$.
- Partitionner $E = \coprod_{i \in I} \omega_i$ où $(\omega_i)_{i \in I}$ est la famille canoniquement associée à ${}^{E}/_{\mathfrak{R}}$.

Curiosités

- La théorie des ensembles de ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEM avec l'axiome du choix (ZFC).
- Les axiomes de PEANO.
- Indécidabilité et théorèmes d'incomplétude de GÖDEL.
- Le théorème de CANTOR : il n'existe pas de surjection de E sur $\mathfrak{P}(E)$.
- Le lemme de KURATOWSKI-ZORN : tout ensemble inductif admet au moins un élément maximal.
- Le théorème de ZERMELO : tout ensemble peut être muni d'une structure de bon ordre.

A.2 Ensembles finis, monoïdes

Notions

- Deux ensembles sont équipotents s'il existe une bijection entre eux.
- $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$ si A et B parties finies de E.
- Principe de DIRICHLET-SCHLÄFLI : soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$. On suppose $\mathrm{card}(E) > \mathrm{card}(F)$. Alors f est non injective.
- Si $f : E \to F$ avec E et F finis de même cardinal, alors il est équivalent de dire que f est injective, surjective ou bijective.
- E infini $\Leftrightarrow$ il existe $f : \mathbb{N} \to E$ injective $\Leftrightarrow$ il existe une suite d'éléments de E deux à deux distincts.
- Si E et F sont finis, $|E \times F| = |E| \times |F|$ et $|\mathfrak{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.
- Tout ensemble non vide **fini** et **totalement** ordonné admet un plus petit et un plus grand élément.
- Une loi de composition interne sur E est une application $\perp : (x, y) \in E^2 \longmapsto x \perp y \in E$.
- Un monoïde est un ensemble E muni d'une lci associative et admettant un élément neutre.
- Si a et b sont inversibles, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- a inversible à droite $\Rightarrow$ a régulier à droite (*i.e.* pour tout (x, y) du monoïde, $xa = ya \Rightarrow x = y$).
- Dans un monoïde **fini**, il est équivalent de dire qu'un élément est régulier à gauche, régulier à droite, inversible à gauche ou inversible à droite.
- Si $(M, \perp)$ est un monoïde, $N \subset M$ en est un sous-monoïde si $1_M \in N$ et $\forall (x, y) \in N^2,\ x \perp y \in N$.
- Si $(M, \perp)$ et $(M', *)$ sont deux monoïdes, $f : M \to M'$ est un morphisme de monoïdes si $f(1_M) = 1_{M'}$ et $\forall (x, y) \in M^2,\ f(x \perp y) = f(x) * f(y)$.
- Si M et N sont deux monoïdes, $M' \subset M$ et $N' \subset N$ deux sous-monoïdes et $f : M \to N$ un morphisme de monoïdes, $f(M')$ est un sous-monoïde de N et $f^{<-1>}(N')$ est un sous-monoïde de M.
- Le principe des bergers : si E est fini et $f : E \to F$, $|E| = \sum_{y \in F} |f^{<-1>}(\{y\})|$.
- Si E est fini, $\mathfrak{P}(E)$ est fini de cardinal $2^{|E|}$.
- Le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans lui-même est $n!$.
- Le nombre d'injections de E dans F, de cardinaux n et p, est 0 si $n < p$, $\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ sinon.
- Le nombre de combinaisons de p objets parmi n est $\mathrm{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
- E est dit dénombrable s'il est fini ou équipotent à $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Savoir-faire

- Pour parler de cardinal, et donc écrire $\mathrm{card}(E)$, on doit au préalable s'assurer que E est fini.
- Pour parler d'inverse, il est nécessaire de justifier son existence au préalable.
- Un ensemble E **fini** et **totalement** ordonné s'écrit de manière unique $E = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_{|E|}\}$.
- Prendre garde à l'ordre des termes lorsque l'ensemble n'est pas commutatif : $(ab)^n \neq a^n b^n$!
- Si $n \leqslant m$ dans $\mathbb{Z}$, $\sum_{k=n}^{m} k = \frac{(n+m)(m-n+1)}{2}$.
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- Décomposer un naturel n dans une base $d \geqslant 2$.
- Utiliser $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$, $p\,\mathrm{C}_n^p = n\,\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$ et la relation de PASCAL $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$.
- Un ensemble non vide E est dénombrable si, et seulement si, il existe $s : \mathbb{N} \to E$ surjective.

Curiosités

- Le nombre de surjections de E_n sur E_p est $(-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \mathrm{C}_p^k k^n$.
- Le théorème de CANTOR-BERNSTEIN-SCHRÖDER : soient E et F deux ensembles. S'il existe deux fonctions injectives $f : E \to F$ et $g : F \to E$, alors E et F sont équipotents.
- La notion de monoïdes isomorphes n'est pas une relation d'équivalence car l'ensemble des monoïdes n'existe pas.
- L'hypothèse du continu : si $E \subset \mathbb{R}$ est infini, on ne peut décider si $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ ou si $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

A.3 Groupes

Notions

- Un groupe est un monoïde dont tout élément est inversible. Il est dit abélien s'il est commutatif.
- L'ensemble des permutations d'un ensemble E est le groupe symétrique $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ de E.
- Si $(G, \times)$ est un groupe, $H \subset G$ en est un sous-groupe si $1_G \in H$, $\forall (x, y) \in H^2,\ xy \in H$ et $x^{-1} \in H$.
- Le centre (ou commutant) du groupe G en est un sous-groupe : $\{g \in G, \forall x \in G, gx = xg\}$.
- $f : G \to H$ (G et H deux groupes) est un morphisme de groupes si $\forall (x, y) \in G^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.
- Si G et H sont deux groupes, $G' \subset G$ et $H' \subset H$ deux sous-groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes, $f(G')$ est un sous-groupe de H et $f^{<-1>}(H')$ est un sous-groupe de G.
- Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes, f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{1_G\}$.
- L'ordre d'un élément a est le plus petit entier k strictement positif tel que $a^k = 1$.
- Les trois versions du théorème de Lagrange :
  - Si H sous-groupe du groupe G fini, $\operatorname{card}(H) \mid \operatorname{card}(G)$.
  - Si $a \in G$ groupe fini, l'ordre de a divise $\operatorname{card}(G)$.
  - Si $a \in G$ groupe fini, $a^{\operatorname{card}(G)} = 1$.
- Une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur un monoïde $(M, \perp)$ est dite compatible avec $\perp$ si $\forall x, y, a \in M$, $x \,\mathfrak{R}\, y \Rightarrow a \perp x \,\mathfrak{R}\, a \perp y$ et $x \perp a \,\mathfrak{R}\, y \perp a$.
- Si H est un sous-groupe du groupe **abélien** $(G, +)$, on définit la relation d'équivalence $x \,\mathfrak{R}_H\, y \Leftrightarrow (x - y) \in H$. Alors $({}^{G}\!/_{\mathfrak{R}_H}, \oplus)$, où $\oplus : (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x + y}$, est un groupe abélien, appelé groupe-quotient de G par H. Et si G est fini, $|{}^{G}\!/_{\mathfrak{R}_H}| = \frac{|G|}{|H|}$.
- Le premier théorème d'isomorphisme : si G est un groupe **abélien** et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes, ${}^{G}\!/_{\ker(f)}$ et $\operatorname{im}(f)$ sont isomorphes par la bijection canonique $\overline{f}$.
- L'intersection de sous-groupes d'un même groupe G est un sous-groupe de G.
- Le sous-groupe engendré par une partie A d'un groupe G est le plus petit sous-groupe de G qui contient A : $\bigcap_{A \subset H \subset G,\ H \text{ sous-groupe de } G} H = \{a_1 a_2 \cdots a_r \ /\ a_i \in A \vee a_i^{-1} \in A\}_{r \geqslant 0}$.
- Un groupe engendré par un élément est dit monogène. S'il est fini, il est cyclique.
- Si $p \geqslant 2$ et les $a_i \in E$ deux à deux distincts, $\sigma = [a_1, a_2, \ldots, a_p]$ est un cycle d'ordre p dans $\mathfrak{S}_E$.
- Toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions.
- Les cycles engendrent $\mathfrak{S}_n$; les transpositions aussi.
- L'application ε qui, à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, associe sa signature est un morphisme de groupes. $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = (-1)^{I(\sigma)}$ où I est le nombre d'inversions : $|\{(i, j) \ /\ i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)\}|$. Et si $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$ est décomposée en un produit de r transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$.
- Le groupe alterné, constitué des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$, est le noyau de la signature.

Savoir-faire

- Pour montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe, on a intérêt à le faire apparaître comme un sous-groupe d'un groupe connu.
- Utiliser pour un morphisme de groupes $f : G \to H$ avec G fini : $|G| = |\operatorname{im}(f)| |\ker(f)|$.
- Caractériser les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$: ils sont soit denses soit discrets dans $\mathbb{Z}$.
- Trouver les orbites d'une permutation et la décomposer en un produit de cycles à support disjoint.

Curiosités

- Les groupes de Galois, les groupes de Lie, les sous-groupes de Sylow, les groupes simples (*i.e.* ne possédant pas de sous-groupe distingué non trivial), le groupe de Klein, les automorphismes intérieurs, les actions de groupes, les produits semi-directs, les sous-groupes distingués, l'équation des classes, la formule de Burnside, les groupes libres...
- Le théorème de Cayley : tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}(G)$ des permutations de G.
- Le lemme de Cauchy : si l'ordre d'un groupe est divisible par un nombre premier p, alors il contient au moins un élément d'ordre p.

A.4 Anneaux

Notions

- Un anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ telles que $(A,+)$ soit un groupe abélien, $(A,\times)$ un monoïde et $\times$ distributive à droite et à gauche sur $+$.
- Si $(A,+,\times)$ est un anneau, $B \subset A$ en est un sous-anneau si $1_A \in B$, $\forall (x,y) \in B^2,\ x+y \in B,\ xy \in B$ et $-x \in B$.
- Si $(A,+,\times)$ est un anneau, $I \subset A$ en est un idéal bilatère si $0_A \in I$, $\forall (x,y) \in I^2,\ x+y \in I$ et $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$ et $xa \in I$.
- Si A et B sont deux anneaux, $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux si f est un morphisme de groupes pour l'addition et un morphisme de monoïdes pour la multiplication.
- Si A et B sont deux anneaux, $A' \subset A$ et $B' \subset B$ deux sous-anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux, $f(A')$ est un sous-anneau de B et $f^{<-1>}(B')$ est un sous-anneau de A. Si J est un idéal de B, $f^{<-1>}(J)$ est un idéal de A. Si I est un idéal de A, $f(I)$ est un idéal de B si f est **surjective**.
- Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_A\}$.
- La formule du binôme de Newton : si A est un anneau, $a, b \in A$ avec $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, a^k b^{n-k} = \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} a^k b^l$.
- La formule du multinôme : si A est un anneau avec $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in A^p$ commutant deux à deux, $(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_p!} a_1^{k_1} \cdots a_p^{k_p}$.
- L'intersection d'idéaux d'un même anneau A est un idéal de A.
- L'idéal engendré par une union d'idéaux est leur somme.
- L'idéal engendré par une partie M d'un anneau A **commutatif** est le plus petit idéal de A qui contient M : $\bigcap_{M \subset I \subset A,\ I \text{ idéal de } A} I = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r \ /\ a_i \in A \wedge x_i \in M\}_{r \geqslant 0}$.
- Un idéal engendré par un élément est principal.
- Si I est un idéal de l'anneau **commutatif** $(A,+,\times)$, on définit la relation d'équivalence $x\ \mathfrak{R}_I\ y \Leftrightarrow (x-y) \in I$. Alors $({}^{A}\!/\!_{\mathfrak{R}_I}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif : l'anneau-quotient de A par l'idéal I.
- Le premier théorème d'isomorphisme : si A est un anneau **commutatif** et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux, ${}^{A}\!/\!_{\ker(f)}$ et $\mathrm{im}(f)$ sont isomorphes par la bijection canonique $\overline{f}$.
- La caractéristique d'un anneau A est le plus petit entier k strictement positif tel que $k \cdot 1_A = 0$.
- Un élément a d'un anneau unitaire A est régulier si $\forall x \in A^*, ax \neq 0 \wedge xa \neq 0$.
- Un anneau **commutatif** sans diviseur de zéro (*i.e.* dont tous les éléments sont réguliers) est intègre.
- Un corps est un anneau dont tout élément non nul est inversible.
- Si K est un corps, $M \subset K$ en est un sous-corps si M est un sous-anneau de K et $\forall x \in M^*,\ x^{-1} \in M$.
- Si K et L sont des corps, $L \supset K$ est un surcorps de K si les lois de L prolongent celles de K.

Savoir-faire

- Si I est un idéal de $\mathbb{Z}$, I est principal : il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.
- Utiliser pour un idéal I de A : $I = A \Leftrightarrow 1 \in I$.
- Si $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}$, $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1})$.
- Si $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}$ impair, $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.
- Utiliser pour un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ avec A fini : $|A| = |\mathrm{im}(f)||\ker(f)|$.
- Un morphisme de corps est toujours injectif.
- Plonger un anneau intègre dans son corps des fractions ($\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$).

Curiosités

- Un anneau de Boole, de Bézout, de Dedekind, le nilradical, le radical de Jacobson, un anneau réduit, principal, intégralement clos, local, noethérien, artinien, factoriel, euclidien, un idéal premier, primaire, radiciel, décomposable, irréductible, fractionnaire, les modules sur un anneau...
- Le théorème de Krull : tout idéal propre d'un anneau commutatif unitaire est contenu dans un idéal maximal.
- Le théorème de Wedderburn : tout corps fini est commutatif.

A.5 Arithmétique

Dans tout ce chapitre, A désigne un anneau commutatif unitaire intègre, p un élément non nul et non inversible de A, a et b des éléments non nuls de A.

Notions

- p est dit **irréductible** si les seuls diviseurs de p sont les éléments inversibles ou les éléments associés à p (*i.e.* les éléments $q \in A$ tels que $p = qu$ avec $u \in A$ inversible).
- p est dit **premier**, ou indissoluble, si $\forall (x, y) \in A^2,\ p|xy \Rightarrow p|x \vee p|y$ (*i.e.* le lemme d'EUCLIDE).
- p est dit **extrémal** si tout élément de A non multiple de p est inversible modulo p.
- a et b sont dits **premiers entre eux** si tout diviseur commun à a et b est inversible ($a \wedge b = 1$).
- a et b sont dits **premiers entre eux au sens de GAUSS** si $\forall x \in A,\ a|bx \Rightarrow a|x$.
- a et b sont dits **étrangers** s'il existe $(u, v) \in A^2$ tels que $au + bv = 1$.
- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{Z}$, le PGCD des a_i est la borne inférieure pour la divisibilité de $(|a_i|)_{i\in I}$. Il est l'unique entier $d \geqslant 0$ tel que $d\mathbb{Z} = \sum_{i\in I} a_i\mathbb{Z}$.
- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{Z}$, le PPCM des a_i est la borne supérieure pour la divisibilité de $(|a_i|)_{i\in I}$. Il est l'unique entier $m \geqslant 0$ tel que $m\mathbb{Z} = \bigcap_{i\in I} a_i\mathbb{Z}$.
- L'identité de BÉZOUT : $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z},\ \exists k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z},\ \bigwedge_{i=1}^n a_i = k_1a_1 + \cdots + k_na_n$.
- Le théorème de BÉZOUT : si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z},\ \bigwedge_{i=1}^n a_i = 1 \Leftrightarrow \exists k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z},\ 1 = k_1a_1 + \cdots + k_na_n$.
- Si $m, n \in \mathbb{N},\ (m \wedge n)(m \vee n) = mn$.
- Le petit théorème de FERMAT : si p est premier et $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a\ [p]$. De plus, si $p \not| a$, $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.
- Si $n \geqslant 1$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau intègre $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps $\Leftrightarrow$ n est premier.
- Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \geqslant 1$, $\overline{k}$ inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{k}$ régulière dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow k \wedge n = 1$.
- Si $k \in \mathbb{Z}$ et G est un groupe cyclique d'ordre n engendré par a, a^k engendre $G \Leftrightarrow k \wedge n = 1$.
- Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique.
- La caractéristique d'un corps ou d'un anneau intègre est soit nulle soit égale à un nombre premier.

Savoir-faire

- Le PPCM et le PGCD ne sont définis qu'à un élément inversible près.
- Utiliser l'identité de LAGRANGE : $\forall (a, b, c, d) \in A^4,\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.
- Si $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m|n$.
- Distinguer « premier entre eux dans leur ensemble » et « deux à deux premiers entre eux ».
- Utiliser la forme réduite d'un rationnel (avec numérateur et dénominateur premiers entre eux).
- Utiliser le théorème fondamental de l'arithmétique (décomposition en produit de facteurs premiers).
- Utiliser l'algorithme d'EUCLIDE (si $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $r \equiv a\ [b]$, $a \wedge b = b \wedge r$). Il est en $O(\log(n))$.
- Calculer des inverses dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et manier l'exponentiation rapide.
- Utiliser le théorème chinois ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{\alpha_r}\mathbb{Z}$ où $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ décomposé).

Curiosités

- Les nombres de FERMAT $2^{2^n} + 1$, de MERSENNE $2^p - 1$, d'innombrables conjectures...
- Le théorème de HADAMARD-DE LA VALLÉE POUSSIN : $\mathrm{card}(\{p \leqslant n,\ p \text{ premier}\}) \sim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n}$.
- Le n-ième nombre premier p_n est asymptotiquement égal à $n\ln(n)$.
- Le postulat de BERTRAND : pour tout $n \geqslant 1$, il existe un entier p premier tel que $n < p \leqslant 2n$.
- Le théorème de WILSON : p est premier si, et seulement si, $(p - 1)! \equiv -1\ [p]$.
- Le théorème d'EULER : si $a \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 2$ avec $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.
- La relation d'EULER $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ et la formule d'inversion de MÖBIUS $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$.
- a et b étrangers $\Rightarrow$ a et b premiers entre eux au sens de GAUSS $\Rightarrow$ a et b premiers entre eux.
- p extrémal $\Rightarrow$ p premier $\Rightarrow$ p irréductible.
- Dans un anneau de GAUSS (où tout couple d'éléments possède un PGCD), les deux dernières notions sont équivalentes. Dans un anneau de BÉZOUT (intègre, où tout idéal de type fini est principal), les trois notions sont équivalentes. Le caractère principal assure l'existence du PGCD et du PPCM.

A.6 Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$

Notions

- $\mathbb{Q}$ est archimédien : $\forall (a,b) \in {\mathbb{Q}_+^*}^2,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ na > b$. En particulier, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
- L'ensemble des sections commençantes ouvertes de $\mathbb{Q}$ est un ensemble $(E, \leqslant)$ totalement ordonné dont l'ordre prolonge celui de $\mathbb{Q}$. $E \subset \mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ est un surcorps commutatif de $\mathbb{Q}$: on le note $\mathbb{R}$.
- L'inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ||x| - |y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si $\forall x \in A,\ x \leqslant S$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x$.
- Axiome de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ admet une borne supérieure.
- Pour $F \subset \mathbb{R}$ majoré non vide, si $a > 0$, $\sup(aF) = a \sup(F)$; si $a < 0$, $\inf(aF) = a \sup(F)$.
- L'axiome d'Archimède : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(n,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ tel que $x = n + r$ et $0 \leqslant r < 1$. Cet entier n est la partie entière de x et vérifie $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$ ainsi que $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$, A est dense dans $\mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ x - \varepsilon \leqslant a \leqslant x + \varepsilon$.
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$.
- Si $I \subset \mathbb{R}$, I est un intervalle de $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall (\alpha, \beta) \in I^2,\ [\alpha; \beta] \subset I$.
- L'intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- L'union d'intervalles de $\mathbb{R}$ d'intersection non vide est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Si $a \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$, il existe un unique $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $b^n = a$ ($b = \sqrt[n]{a}$ est la racine n-ième de a).
- Si $n \geqslant 2$ et $a \in \mathbb{N}$ n'est pas la puissance n-ième d'un entier, alors $\sqrt[n]{a}$ est un irrationnel.
- Si $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \Leftrightarrow |a| = |b|$.
- Si $a > 0$ et $\alpha, x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x_0 \in [\alpha; \alpha + a[$ tel que $x \equiv x_0\ [a]$.
- $]0;1[$ n'est pas dénombrable.

Savoir-faire

- Toujours vérifier le sens des inégalités lorsque l'on multiplie par une quantité qui peut être négative.
- Toujours vérifier les signes avant de passer à l'inverse dans une inégalité, à la racine, etc.
- Toujours faire attention aux valeurs absolues (notamment pour $|\sum_{i=1}^n x_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|$).
- Utiliser pour des réels : $(\forall i,\ x_i \leqslant y_i) \wedge (\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i) \Rightarrow \forall i,\ x_i = y_i$.
- La formule de Legendre : si p premier et $n > 0$, la valuation p-adique de $n!$ est $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right) \cdot$
- Le seul endomorphisme du corps $\mathbb{R}$ est l'identité.
- Caractériser les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$: ils sont soit denses soit discrets dans $\mathbb{R}$.
- L'inégalité du réordonnement : si $n \geqslant 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ S_\sigma = \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$ est maximale lorsque les deux suites de réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}$ sont rangées dans le même ordre d'inégalités. Elle est minimale lorsqu'elles sont rangées dans l'ordre inverse.

Curiosités

- La construction des nombres réels par les coupures de Dedekind, les suites de Cauchy...
- Le théorème d'unicité de $\mathbb{R}$: si $\mathbb{K}$ est un surcorps ordonné de $\mathbb{Q}$ qui vérifie l'axiome de la borne supérieure, il existe un unique isomorphisme croissant de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$.
- Les nombres constructibles à la règle et au compas.
- La quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle.
- L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
- Le théorème de Gelfond-Schneider : si α est un nombre algébrique non nul différent de 1 et β un nombre algébrique irrationnel, alors le nombre α^β est transcendant.
- L'un au moins des deux réels $e + \pi$ et $e\pi$ est transcendant.
- La constante Ω de Chaitin, la constante de Champernowne, de Liouville, etc.
- On ne sait pas si γ, la constante d'Euler, est un nombre rationnel.

A.7 Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

Notions

- Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$.
- $\mathbb{C}$ peut être identifié au plan complexe $\mathbb{R}^2$ d'Argand-Cauchy.
- Si $z \in \mathbb{C}$, $\text{Ré}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$. Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\cdot$
- Si $z \in \mathbb{C}$, $|\text{Ré}(z)| \leqslant |z|$, $|\text{Im}(z)| \leqslant |z|$ et $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\overline{z}}$.
- Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\text{Ré}\left(z\overline{z'}\right)$.
- L'inégalité triangulaire : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ ||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
- Le cercle trigonométrique est $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. C'est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- $a = X + iY \in \mathbb{C}^*$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, possède exactement deux racines carrées : $\pm z$ où $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x^2 - y^2 = X,\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et xy du signe de Y.
- Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$. Si Δ n'est pas un carré dans $\mathbb{K}$, (E) n'admet aucune solution. Sinon, (E) admet deux solutions distinctes ou confondues : $\frac{-b\pm\delta}{2a}$ où $\Delta = \delta^2$.
- Si $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\cdot$ Si $z \neq 0$, il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = e^u$. Et si $|z| = 1$, $z = e^{ix}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
- Définition du nombre π : il existe un unique $\pi \in \mathbb{R}$ tel que $\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.
- Les formules d'Euler : si $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \text{Ré}(e^{ix}) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \text{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot$
- Les formules de de Moivre : si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $e^{inx} = (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$.
- L'argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est l'unique classe $\overline{\theta} \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ telle que $z = |z|e^{i\theta}$.
- Si $n \geqslant 2$, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe cyclique d'ordre n engendré par $e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
- Si $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{Z}$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ engendre $\mathbb{U}_n \Leftrightarrow k \wedge n = 1$.
- Si $n \geqslant 2$, il y a exactement $\varphi(n)$ racines primitives n-ièmes de l'unité.

Savoir-faire

- Ne jamais faire figurer de nombres complexes dans des inégalités.
- Toujours distinguer le cas où la raison d'une suite géométrique est 1.
- Décomposer un complexe $z = a + ib$ en précisant que a et b sont réels.
- Utiliser le discriminant réduit lorsque b est pair dans une équation du second degré : en notant $b = 2b'$ et $\Delta' = b'^2 - ac$, les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}\cdot$
- Utiliser la caractérisation $z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ z = 2i\pi n$.
- Utiliser la caractérisation $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = e^{iy} \Leftrightarrow x \equiv y\ [2\pi]$.
- Tracer des cercles trigonométriques pour facilement retenir les valeurs de $e^{i\pi}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, etc.
- Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour développer et linéariser les fonctions circulaires.
- Savoir réduire les expressions du type $a\cos(x) + b\sin(x)$.
- Manier les formules de trigonométrie sur le bout des doigts !
- Connaître sans hésiter le graphe de chacune des fonctions trigonométriques circulaires.
- Résoudre des équations trigonométriques comme $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow (x \equiv y\ [2\pi]) \vee (x \equiv \pi - y\ [2\pi])$ ou $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow (x \equiv y\ [2\pi]) \vee (x \equiv -y\ [2\pi])$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
- Ne pas oublier que si $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$ mais $\text{Arcsin}(\sin(x)) \neq x$ lorsque $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\cdot$
- La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle. En particulier, $1 + j + j^2 = 0$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$
- Les seuls endomorphismes de $\mathbb{C}$ qui laissent $\mathbb{R}$ invariant sont l'identité et la conjugaison.
- La formule de Machin : $\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\cdot$

Curiosités

- La construction de $\mathbb{C}$ par des couples, des polynômes ($\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/_{X^2+1}$), des matrices...
- Les nombres de Lorentz (complexes hyperboliques), les entiers de Gauss, les hypercomplexes...
- Les fonctions trigonométriques circulaires à argument complexe.
- L'ensemble des nombres algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$ est un sous-corps dénombrable de $\mathbb{C}$.

B Nombres réels – Suites

B.1 Suites

Notions

- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ converge vers l si $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0,\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
- Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ et $l \in \mathbb{C}$. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.
- Une suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ converge si, et seulement si, les suites $(\text{Ré}(z_n))_{n\geqslant 0}$ et $(\text{Im}(z_n))_{n\geqslant 0}$ convergent.
- Le théorème de prolongement des inégalités **larges** : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de $\mathbb{R}$ respectivement convergentes vers l et m avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$, alors $l \leqslant m$.
- Le théorème des gendarmes : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont trois suites de $\mathbb{R}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite est l.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite **croissante** de $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.
- Le théorème des segments emboîtés : l'intersection d'une suite décroissante de segments (*i.e.* des intervalles fermés et bornés) dont la longueur tend vers 0 est réduite à un singleton.
- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0,\ u_n \geqslant A$.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite **croissante** non majorée de $\mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.
- Les théorèmes de croissances comparées : si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0$ et $|\lambda| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \lambda^n n^k = 0$. Mais si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \lambda^n n^k = +\infty$.
- Si $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ est de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |u_n - u_{n+p}| \leqslant \varepsilon$.
- Toute suite convergente de $\mathbb{C}$ est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ est convergente ($\mathbb{C}$ est complet).
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de $\mathbb{C}$ convergente vers l, toute suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers l.
- $l \in \mathbb{C}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de $\mathbb{C}$, la série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ des sommes partielles d'indice n, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Cette série converge et a pour **somme** S si la suite converge vers S.
- On ne modifie pas la nature d'une série en en changeant un nombre fini de termes.
- Si une série de $\mathbb{C}$ converge, son terme général tend vers 0.
- Si $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$. Elle a alors pour somme $\frac{1}{1-z}$.
- Le théorème de comparaison des séries à termes **positifs** : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs avec $\forall n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ; $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.
- Le théorème de convergence des séries de Riemann : si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\zeta(\alpha) = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- Toute série absolument convergente de $\mathbb{C}$ est convergente.
- Le théorème de décomposition en base $B \geqslant 2$: pour tout réel $x \in [0; 1[$, il existe une unique suite d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n}$ où $0 \leqslant a_n \leqslant B - 1$ et $\forall p,\ \exists q \geqslant p,\ a_q < B - 1$.
- Le théorème de Wallis : $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (a_n)_{n\geqslant 1}$ périodique à partir d'un certain rang.

Savoir-faire

- Utiliser des suites adjacentes réelles : elles convergent vers la même limite.
- Retenir les démonstrations de ce chapitre : elles sont reproductibles dans les exercices.
- Déterminer la limite d'un quotient de polynômes en n.
- Lors des grandes occasions, utiliser le critère de Cauchy pour prouver qu'une suite de $\mathbb{C}$ converge.
- Le critère de Cauchy pour des séries s'applique à des tranches de Cauchy $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$.
- Extraire dans le bon ordre une sous-suite $v_{\psi(n)} = u_{\phi\circ\psi(n)}$ de la sous-suite $v_n = u_{\phi(n)}$.
- Toujours s'assurer de la convergence d'une série avant d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.
- Utiliser le théorème spécial des séries alternées : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une série **alternée** dont le terme général **décroît** en module vers 0, alors $\sum u_n$ converge. Mieux, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ et a le signe de $(-1)^{n+1}$.
- Utiliser le théorème de Cesàro et ses nombreuses variantes !

B.2 Topologie de $\mathbb{R}$ – Limites

Notions

- On dit que $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert si $\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subset U$.
- Une union quelconque d'ouverts est ouverte. Une intersection **finie** d'ouverts (IFO) est ouverte.
- L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est appelé « topologie de $\mathbb{R}$ ».
- On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est fermée si son complémentaire est ouvert.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée. Une union **finie** de fermés est fermée.
- Les parties finies de $\mathbb{R}$ sont fermées.
- Un voisinage de $x \in \mathbb{R}$ est une partie $V \subset \mathbb{R}$ telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subset V$.
- Un voisinage de $(+\infty)$ est une partie $V \subset \mathbb{R}$ telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ avec $[A; +\infty[\subset V$.
- $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert $\Leftrightarrow$ U est voisinage de tous ses points.
- Une intersection **finie** de voisinages de $x \in \overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage de x.
- Si $x \neq y$ dans $\mathbb{R}$, il existe V et W, voisinages respectifs de x et de y, tels que $V \cap W = \emptyset$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subset A$ et $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ [x-\varepsilon; x+\varepsilon] \cap A \neq \emptyset$.
- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.
- Si $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$, a est adhérent à $A \Leftrightarrow$ il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de A tendant vers a.
- Si $B \subset A$, B est dense dans A si $A \subset \overline{B}$ (tout point de A est limite d'une suite de B).
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite convergente.
- $K \subset \mathbb{C}$ est un compact $\Leftrightarrow$ de toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.
- Si $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$, on note $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si $\forall V \in \mathcal{V}_l,\ \exists W \in \mathcal{V}_a,\ f(W \cap A) \subset V$.
- Si $f : A \to \mathbb{R}$ et $a, l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, (|x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon)$.
- Si $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, (|x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M)$.
- Si $f : A \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, (x \geqslant M \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon)$.
- Si $f : A \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, (x \geqslant N \Rightarrow f(x) \geqslant M)$.
- Le théorème de recollement : si $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ adhérent à chacune des p parties A_p de A avec $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = A$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $\lim_{x\to a} f_{|A_i}(x) = l$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
- Le théorème de prolongement des inégalités **larges** : si $f, g : A \to \mathbb{R}$ convergent respectivement vers l et m en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f < g$, alors $l \leqslant m$.
- Le théorème des gendarmes : si $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ sont telles que $f \leqslant g \leqslant h$ et $\lim_a f = \lim_a h = l$, alors g converge en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et sa limite est $l \in \mathbb{R}$.
- Si $f : A \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Cauchy en $a \in \mathbb{R}$ adhérent à A (*i.e.* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}_a$, $\forall x, y \in V \cap A,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$), f admet une limite **finie** en a.

Savoir-faire

- Caractériser A ouvert $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$ et A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.
- Même si $(+\infty)$ est adhérent à A, $(+\infty) \notin \overline{A}$ (ce n'est pas un réel).
- Utiliser le théorème de composition des limites.
- Faire tendre la variable le long d'une certaine suite.
- Utiliser la caractérisation séquentielle des limites : si $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A, $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow$ pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de A convergente vers a, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.
- Utiliser les critères d'existence des limites à droite et à gauche pour des fonctions **monotones**.

Curiosités

- Les points d'accumulation, les points isolés, la notion d'espace topologique, de topologie faible...
- Le théorème de Borel-Lebesgue (ou de Heine-Borel) : A est fermé et borné $\Leftrightarrow$ de tout recouvrement de A par des ouverts de $\mathbb{R}^n$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- Le théorème de Baire : toute intersection dénombrable d'ouverts denses d'un espace métrique complet est dense. *De là découlent moult jolis résultats.*
- Le théorème de Tychonoff : un produit quelconque de compacts est compact.

B.3 Systèmes dynamiques discrets

Notions

- Si $f : E \to E$ et $a \in E$, la suite f-récurrente définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geqslant 0$ est appelée système dynamique discret.
- Les notations de LANDAU : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont des suites réelles, on dit que $u_n = O(v_n)$ pour n tendant vers $(+\infty)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\varphi_n)_{n\geqslant n_0}$ bornée telle que $u_n = \varphi_n v_n$ pour $n \geqslant n_0$; on dit que $u_n = o(v_n)$ pour n tendant vers $(+\infty)$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ tendant vers 0 en $(+\infty)$ telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour $n \geqslant n_0$.
- $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_n)_{n\geqslant n_0}$ tendant vers 1 en $(+\infty)$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ pour $n \geqslant n_0$.
- $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.
- $e^{u_n} \sim_{n\to+\infty} e^{v_n} \Leftrightarrow u_n - v_n = o(1)$.
- Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont positives avec $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 1$, alors $\ln(u_n) \sim_{n\to+\infty} \ln(v_n)$.
- Le théorème de comparaison des séries à termes **positifs** : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites réelles, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ étant à valeurs positives et $u_n = o(v_n)$ (ou $u_n = O(v_n)$), alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge. Et si $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n \geqslant 0$, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- Le théorème des gendarmes : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $u_n =\sim_{n\to+\infty} w_n \sim_{n\to+\infty} l_n > 0$, alors $v_n \sim_{n\to+\infty} l_n$.
- $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ suite f-récurrente de I convergente vers $l \in I \Rightarrow f(l) = l$.
- Le théorème du point fixe de BANACH-PICARD : une application f contractante (*i.e.* k-lipschitzienne avec $k < 1$) d'un espace métrique complet non vide dans lui-même admet un unique point fixe, vers lequel converge toute suite f-récurrente.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, $l \in I$ point fixe de f et $|f'(l)| < 1$, l est un point fixe attractif.

Savoir-faire

- Ne pas sommer des équivalents !
- Ne pas composer des équivalents par une fonction !
- Utiliser les équivalences suivantes : $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists M \geqslant 0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M|v_n|$ et $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon|v_n|$.
- $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ (1-\varepsilon)v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)v_n$.
- Toujours vérifier la non-nullité des expressions présentes dans des équivalents.
- Deux quantités équivalentes sont de même signe strict à partir d'un certain rang.
- Étudier les suites du type $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ et exprimer le terme général en fonction des racines $\lambda \neq \mu$ de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ ($u_n = A\lambda^n + B\mu^n$ ou $u_n = (An+B)\lambda^n$, $A, B \in \mathbb{C}$).
- Identifier les limites potentielles d'un système dynamique discret (points fixes de f continue...).
- Tracer le graphe de la fonction en question, de la première bissectrice, etc.
- Étudier des suites f-récurrentes avec f monotone (si f est croissante, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante).
- Étudier des suites homographiques ($v_n = u_n - l$ pour $u_{n+1} = au_n + b$ et $v_n = \frac{u_n-\lambda}{u_n-\mu}$ ou $v_n = \frac{1}{u_n-\lambda}$ pour $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ où $\lambda \neq \mu$ sont racines de l'équation $l = \frac{al+b}{cl+d}$ en $l \neq -\frac{d}{c}\Big)$.
- Étudier des suites récurrentes simultanées (comme l'arithmético-géométrique).
- Utiliser les algorithmes de recherche de zéros d'une fonction (dichotomie en $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$, méthode des sécantes de LAGRANGE en $O(\alpha^n)$, méthode des tangentes de NEWTON-RAPHSON en $O\left(\beta^{2^n}\right)$, etc.).

Curiosités

- La suite de FIBONACCI, les suites de LUCAS, le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, les calculs approchés de racines (méthode de HÉRON pour les racines carrées)...
- L'expression du terme général des suites récurrentes d'ordre n.
- Les variantes du théorème du point fixe (à paramètre, de BROUWER, etc.).
- La méthode des parties principales successives (ou de la loupe), le théorème de RAABE-DUHAMEL...

C Fonctions de la variable réelle

C.1 Fonctions continues

Notions

- Si $f : A \to \mathbb{C}$, f est continue en $a \in A$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Si $f : A \to \mathbb{C}$, f est continue en $a \in A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in A,\ (|x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon)$, équivalent à ce que pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W\cap A) \subset V$.
- Le théorème de recollement : si $f : A \to \mathbb{C}$, $a \in A$ adhérent à chacune des p parties A_p de A avec $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = A$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $\lim_{x\to a} f_{|A_i}(x) = f(a)$, alors f est continue en a.
- Le théorème du prolongement par continuité : si $f : A \to \mathbb{C}$ continue et $b \in \overline{A}$ avec $\lim_{x\to b} f(x) = l$, alors f admet un prolongement continu g sur $A \cup \{b\}$ avec $g_{|A} = f$ et $g(b) = l$.
- Si K est un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{C}$ est continue, alors $f(K)$ est compacte.
- $f : A \to \mathbb{C}$ est uniformément continue si $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x, y \in A,\ (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon)$.
- Si $k \geqslant 0$, $f : A \to \mathbb{C}$ est k-lipschitzienne si $\forall x, y \in A,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
- f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.
- Le théorème de Heine : si K compact et $f : K \to \mathbb{C}$ continue, alors f est uniformément continue.
- Le théorème des valeurs intermédiaires : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Si I est un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ est **monotone**, alors f continue $\Leftrightarrow$ $f(I)$ intervalle.
- $f : A \to B$ est un homéomorphisme si f est continue, bijective et f^{-1} est continue.
- Si I est un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ est **strictement monotone** et **continue**, alors $f : I \to f(I)$ est un homéomorphisme. En particulier, $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue.
- Les théorèmes de croissances comparées : si $a > 1$ et $\alpha, \beta > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x)^\beta = 0$.
- Une application continue sur $\mathbb{R}$ qui admet une limite finie en $(\pm\infty)$ est uniformément continue.

Savoir-faire

- Nier la notion de continuité (pour des raisonnements par contraposée ou par l'absurde).
- Utiliser les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.
- Justifier les passages à la limite par la continuité des fonctions.
- Tracer les graphes des fonctions pour y voir plus clair !
- Identifier les graphes des fonctions exponentielles, puissances et trigonométriques.
- Retenir que la continuité est un phénomène local.
- f continue sur A n'est pas équivalent à $f_{|A}$ continue sur A (*cf.* $\chi_{\mathbb{Q}}$).
- Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité : si $f : A \to \mathbb{R}$, f est continue en $a \in A \Leftrightarrow$ pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de $A \setminus \{a\}$ convergente vers a, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
- Une fonction f continue sur un compact atteint ses bornes : f admet un minimum et un maximum.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires aux moments opportuns (et aussi à $f - g$).
- Si $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$, $e^{nz} = (e^z)^n$, mais pas forcément pour n non entier !
- Utiliser $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\cdot$ L'exponentielle est un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque le logarithme népérien ln (aussi noté Log).
- Si $D > 1$, le logarithme en base D est $\log_D(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(D)}$. Par convention, $\log_1(x) : x \mapsto 0$.
- L'écriture décimale de tout entier naturel non nul n comporte $\mathrm{E}(\log(n)) + 1$ chiffres.
- Résoudre des équations fonctionnelles pas à pas (avec extension par densité ou passage à la limite).

Curiosités

- Définition topologique d'une fonction continue : l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.
- $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes pour des entiers $m \neq n$.
- Il n'existe pas d'homéomorphisme de $[0; 1]$ dans $[0; 1]^2$, mais une surjection continue, oui (Hilbert) !

C.2 Dérivation des fonctions à variable réelle

Dans tout ce chapitre, I et J désignent des intervalles d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Notions

- Si $f : I \to \mathbb{C}$, f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe dans $\mathbb{C}$.
- Si $f : I \to \mathbb{C}$, f est dérivable en $x_0 \in I \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ (|x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon)$ où $f'(x_0)$ est la valeur de la dérivée de f en x_0.
- L'équation de la tangente en x_0 d'une fonction dérivable en x_0 est : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.
- La dérivabilité d'une fonction en un point implique sa continuité en ce point.
- Si $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{C}$ sont dérivables, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} f_k$ l'est et $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_k' \cdots f_n$.
- La formule de Leibniz : si $f, g : I \to \mathbb{C}$ sont $\mathcal{C}^n$, fg l'est et $\displaystyle (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.
- Si $f, g : I \to \mathbb{C}$ sont dérivables, $g \circ f$ l'est et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.
- Si $f : I \to J$ est bijective, $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0) \in J$ avec f dérivable en x_0, $f'(x_0) \neq 0$ et f^{-1} **continue** en y_0, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $\displaystyle (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}$.
- $f : I \to J$ est un difféomorphisme si f est bijective avec f et f^{-1} dérivables.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est **strictement monotone** et **dérivable** avec $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, alors $f(I)$ est un intervalle d'intérieur non vide et $f : I \to f(I)$ est un difféomorphisme ; $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable.
- Un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^n$. f^{-1} est alors aussi $\mathcal{C}^n$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.
- Si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\frac{da^x}{dx} = \ln(a)a^x$.
- $\displaystyle \frac{d^n \frac{1}{x}}{dx^n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\ \frac{d^n \ln(x)}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
- $\displaystyle \frac{d\operatorname{Arccos}(x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{d\operatorname{Arcsin}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{d\operatorname{Arctan}(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2},\ \frac{d\operatorname{Arccotan}(x)}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$.

Savoir-faire

- Pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, les opérations se font composante par composante. Par exemple, $F : I \to \mathbb{C}^n$ est dérivable en $x_0 \in I$ si, et seulement si, chacune de ses n composantes l'est.
- Ne pas dissocier « physiquement » $\frac{dy}{dx}$.
- Retenir que la dérivabilité est un phénomène local.
- Manier avec aisance les dérivées de fonctions composées.
- Connaître les dérivées des fonctions usuelles.
- Utiliser $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on ne peut dériver f^α que si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Toujours vérifier la dérivabilité aux bornes des intervalles de définition ($x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0).
- Si $P(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$, utiliser l'écriture $P^{(n)}(x) = \sum_{k\geqslant p} k(k-1)\cdots(k-p+1)a_k x^{k-p}$.

Curiosités

- Les fonctions à variable complexe (méromorphes, holomorphes, analytiques, etc.).
- Il existe des fonctions continues partout mais nulle part dérivables.
- Il existe des fonctions dérivées discontinues sur un ensemble dense.
- L'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense.
- Une fonction dérivée n'est pas nécessairement intégrable au sens de Riemann.
- Le théorème de Darboux : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, $f'(I)$ est un intervalle.

C.3 Variation des fonctions

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Notions

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en l'extremum local $x_0 \in \mathring{I}$, alors $f'(x_0) = 0$.
- Le théorème de ROLLE : si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- La formule des accroissements finis : si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ avec $a < b$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
- L'inégalité des accroissements finis : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et s'il existe M tel que $|f'| \leqslant M$, alors $\forall x, y \in I,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M|y-x|$.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, $\exists k,\ |f'| \leqslant k \Leftrightarrow f$ est k-lipschitzienne.
- $F : I \to \mathbb{C}^n$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}^n$ si F est dérivable et $F' = f$.
- Le théorème de la limite de la dérivée : si $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ avec $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l$, alors f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = l$ et f' est continue en x_0.
- La règle de L'HOSPITAL : si $x_0 \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur I et dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ avec $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ g'(x) \neq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$.
- La formule de TAYLOR-LAGRANGE : si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;b]$ et $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.
- Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, le segment d'extrémités X et Y est $[X;Y] = \{(1-\lambda)X + \lambda Y\}_{\lambda \in [0;1]}$.
- $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si $\forall X, Y \in C,\ \forall \lambda \in [0;1],\ (1-\lambda)X + \lambda Y \in C$.
- $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe $\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1,\ \forall X_1, \ldots, X_p \in C,\ \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i \in C$.
- $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
- L'inégalité de JENSEN : $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe $\Leftrightarrow$ l'épigraphe de f est convexe $\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1,\ \forall x_1, \ldots, x_p \in I,\ f(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow \forall a, b \in I,\ f(b) \geqslant f'(a)(b-a) + f(a)$.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{D}^2$, f convexe $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$. Et si f'' ne s'annule pas sur tout un intervalle d'intérieur non vide de I, f est strictement convexe.
- L'inégalité de la moyenne : si $0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\ x_1 \leqslant \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum x_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2} \leqslant x_n$.

Savoir-faire

- Le théorème de ROLLE s'applique souvent à une différence $f - g$.
- Plus que pour tout autre chapitre, tracer les graphes des fonctions – avec les tangentes remarquables !
- Utiliser les inégalités $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$; $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$ et $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
- Caractériser la (stricte) monotonie d'une fonction dérivable par le signe (strict) de sa dérivée.
- Dresser des tableaux de variations complets (dérivée(s), signes, limites, valeurs remarquables, etc.).
- Deux primitives d'une fonction définie sur un **intervalle** sont égales à une constante additive près.
- Ne jamais oublier les valeurs absolues dans $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)$.
- Utiliser et surutiliser le théorème de la limite de la dérivée.
- Retrouver la formule de MAC-LAURIN (pour $a = 0$) et TAYLOR-LAGRANGE pour $b = a + h$.
- Déterminer l'équation d'une tangente et d'une sécante à un graphe.
- Utiliser l'inégalité aux pentes des sécantes et la croissance des pentes des sécantes issues d'un point pour les fonction **convexes** (sans oublier de faire un dessin...).
- Caractériser des extrema locaux avec la convexité.
- Manier les formules de trigonométrie sur le bout des doigts !
- Connaître sans hésiter le graphe de chacune des fonctions trigonométriques hyperboliques.

Curiosités

- Les fonctions trigonométriques hyperboliques à argument complexe.

C.4 Développements limités

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Notions

- Les notations de Landau : si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}$ et si $f, g : A \to \mathbb{R}$, on dit que $f = O(g)$ en a s'il existe un voisinage V_0 de a et $\varphi : V_0 \cap A \to \mathbb{R}$ bornée telle que $f(x) = \varphi(x)g(x)$ pour $x \in V_0 \cap A$; on dit que $f = o(g)$ en a s'il existe un voisinage V_0 de a et et $\varepsilon : V \cap A_0 \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en a telle que $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour $x \in V_0 \cap A$.
- $f \sim_a g$ s'il existe $V_0 \in \mathcal{V}_a$ et $\alpha : V_0 \cap A \to \mathbb{R}$, $\lim_a \alpha = 1$, telle que $f(x) = \alpha(x)g(x)$ pour $x \in V_0 \cap A$.
- $f \sim_a g \Leftrightarrow f - g = o_a(g)$.
- $e^{f(x)} \sim_{x\to a} e^{g(x)} \Leftrightarrow f - g = o_a(1)$.
- Si $f, g : A \to \mathbb{R}_+^*$ avec $f \sim_a g$ et $\lim_a f \neq 1$, alors $\ln(f(x)) \sim_{x\to a} \ln(g(x))$.
- Le théorème d'intégration des o : si $a \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur I et dérivables sur $I \setminus \{a\}$ avec $f' = o(g')$ en a et $g'(x) \neq 0$ pour $x \in I \setminus \{a\}$, alors $f(x) - f(a) = o_{x\to a}(g(x) - g(a))$.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ et 0 est adhérent à I, f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour x tendant vers 0, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$.
- f admet un développement limité à l'ordre 0 en $a \Leftrightarrow f$ admet une limite en a.
- f admet un développement limité à l'ordre 1 en $a \Leftrightarrow f$ (se prolonge en une fonction) dérivable en a.
- La formule de Taylor-Young : si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{D}^n$ avec $a \in I$, alors f admet un développement limité au voisinage de a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$.
- Au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$, $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ et $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Savoir-faire

- Ne pas sommer des équivalents ! Ne pas composer des équivalents par une fonction !
- Ne pas dériver des équivalents ! Ne pas oublier la constante d'intégration lors de leur intégration !
- En cas de doute dans les notations, toujours revenir aux définitions.
- Ne pas écrire $\cos(x) \sim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{2}$ mais $\cos(x) - 1 \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}$.
- Toujours préciser au voisinage de quel point on réalise des développements limités et équivalents.
- Utiliser le théorème de changement de variables dans les développements limités et équivalents.
- L'écriture $f = o(g)$ en a n'est pas une vraie égalité (non transitive). C'est $f(x) \in o_{x\to a}(g(x))$.
- Utiliser les équivalences : $f = O(g)$ en $a \Leftrightarrow \exists V_0 \in \mathcal{V}_a,\ \exists M \geqslant 0,\ \forall x \in V_0 \cap A,\ |f(x)| \leqslant M|g(x)|$ et $f = o(g)$ en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists V_0 \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in V_0 \cap A,\ |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$.
- $f \sim_a g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists V_0 \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in V_0 \cap A,\ (1-\varepsilon)g(x) \leqslant f(x) \leqslant (1+\varepsilon)g(x)$.
- Toujours vérifier la non-nullité des expressions présentes dans des équivalents.
- Deux quantités équivalentes en a sont de même signe strict au voisinage de a.
- Retrouver rapidement les développements limités usuels (par parité, en intégrant, $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, etc.).
- Toujours effectuer les calculs **sereinement** et **avec méthode**.
- Étudier une fonction (points d'inflexion, directions asymptotiques, position des tangentes, etc.).
- Donner des développements asymptotiques (de fonctions, de racines d'équations, etc.).
- Lorsque $u_n \sim u_{n+1} \to 0$, chercher α tel que $u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha\left(1 + \alpha u_n^k + o\left(u_n^k\right)\right)$ en effectuant un développement limité de u_{n+1} ; prendre alors $\alpha = -k$ et appliquer le théorème de Cesàro.

Curiosités

- La série harmonique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{256n^6} + \frac{1}{240n^8} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\cdot$
- Les séries entières...

C.5 Suites de fonctions

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. X est un ensemble.

Notions

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to \mathbb{C}$, on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $f : X \to \mathbb{C}$ sur X si pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers f sur $X \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to \mathbb{C}$, on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f : X \to \mathbb{C}$ sur X si $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,X} = 0$.
- $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||f_n - f||_{\infty,X} \leqslant \varepsilon$.
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple vers la même fonction sur le même intervalle.
- La limite uniforme d'une suite de fonctions continues en un point est continue en ce point.
- Le théorème de $\mathcal{D}^1$-ation : si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions dérivables sur I **borné** qui converge simplement sur I vers f et si $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers g, alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur I, f est dérivable sur I et de dérivée g sur I.
- $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de $[a; b]$ telle que pour tout $0 \leqslant i < n$, il existe $\varphi : [x_i; x_{i+1}] \to \mathbb{C}$ continue vérifiant $\varphi_{i|]x_i;x_{i+1}[} = f_{|]x_i;x_{i+1}[}$. En particulier, f est bornée.
- Toute fonction continue sur un **compact** est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux. Elle est aussi limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
- Toute fonction continue par morceaux sur un **compact** est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
- La limite uniforme d'une suite de fonctions réglées sur un **compact** est réglée sur ce compact.
- Le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur un **compact** est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Savoir-faire

- Toujours préciser l'intervalle sur lequel une suite de fonctions converge.
- La convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ revient à la convergence de la suite de fonctions $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\geqslant 0}$.
- Il est souvent utile d'étudier la suite $(\sum_{k=0}^{n} f_k(x_0))_{n\geqslant 0}$ à x_0 fixé.
- Toujours vérifier la finitude de la norme infinie d'une fonction avant de l'utiliser.
- Tracer les graphes des fonctions et intuiter les limites éventuelles.
- Le théorème de $\mathcal{D}^1$-ation peut être étendu au cas $\mathcal{C}^1$. Si I n'est pas borné, on peut se ramener à des convergences uniformes sur tout compact de I.

Curiosités

- f est réglée sur $[a; b] \Leftrightarrow f$ est limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite de fonctions en escalier $\Leftrightarrow f$ admet une limite à droite en tout point de $[a; b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a; b]$.
- Les polynômes de Bernstein : $B_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$.
- Le critère de Cauchy uniforme : la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon$.
- Le théorème de Chudnovsky : si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur un segment I ne contenant pas d'entiers, alors il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes à coefficients entiers convergeant uniformément vers f sur I.
- Le théorème d'Ascoli : la convergence simple d'une suite de fonctions équicontinues sur un compact entraîne la convergence uniforme vers la même fonction sur le même compact.
- Le premier théorème de Dini : la convergence simple d'une suite croissante de fonctions **continues** sur un compact vers une fonction **continue** entraîne la convergence uniforme sur le même compact.
- Le second théorème de Dini : la convergence simple d'une suite de fonctions croissantes sur un compact vers une fonction **continue** entraîne la convergence uniforme sur le même compact.

C.6 Intégrale des fonctions réglées

Notions

- $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux $\Leftrightarrow$ il existe une subdivision $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ telle que si $0 \leqslant i < n$, $f_{|]x_i;x_{i+1}[}$ soit continue et $f(x_0^+), f(x_1^-), f(x_1^+), \ldots, f(x_n^-)$ existent dans $\mathbb{C}$.
- L'intégrale d'une fonction en escalier est indépendante de la subdivision compatible choisie.
- L'intégrale d'une fonction réglée est indépendante de la suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers elle.
- La positivité de l'intégrale : si $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables, $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
- La relation de Chasles : si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est localement réglée, $c \in [a;b]$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est **continue**, **positive** et d'intégrale nulle sur $[a;b]$, alors $f \equiv 0$.
- Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions réglées sur $[a;b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a;b]$, alors f est réglée et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.
- L'inégalité de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz : si $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ sont réglées, $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$. Si f et g sont continues, il y a égalité si, et seulement si, f et g sont proportionnelles.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ est localement réglée et $x_0 \in I$, alors $F : x \in I \mapsto \int_{x_0}^x f$ est continue. De plus, si f est continue en $a \in I$, alors F est dérivable en a et $F'(a) = f(a)$.
- Si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.
- L'inégalité des accroissements finis : si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et s'il existe M tel que $|f'| \leqslant M$, alors $\forall x, y \in [a;b],\ |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$.
- La première formule de la moyenne : si $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ sont continues et si g garde un **signe constant** sur $[a;b]$, alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.
- La valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a;b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
- Le théorème de changement de variables : si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est continue et $\varphi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ est $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, alors $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_a^b f$.
- La formule d'intégration par parties : si $f, g : [a;b] \to \mathbb{C}$ sont continues, g $\mathcal{C}^1$ et F une primitive de f sur $[a;b]$, alors $\int_a^b \overset{\uparrow}{f}\, g_\downarrow = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'$.
- La formule de Taylor avec reste de Laplace : si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$, alors $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$.
- La somme de Riemann d'une fonction f relative à une subdivision pointée est $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.
- Si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est continue, $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$.

Savoir-faire

- On ne change pas la valeur de $\int f$ en modifiant f en un nombre **dénombrable** de points.
- Ne pas oublier les valeurs absolues dans la majoration $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$ pour f réglée et $a \leqslant b$.
- Toujours s'assurer de l'existence d'une intégrale avant d'en parler et de la majorer !
- Interpréter géométriquement les intégrales comme des mesures algébriques d'aires.
- Utiliser la parité et la périodicité des fonctions pour simplifier les intégrales.
- Ne pas oublier de modifier les bornes d'intégration lors d'un changement de variables.
- L'inégalité de Taylor-Lagrange s'obtient en majorant par $||f^{(n+1)}||_\infty$ le reste intégral si $a \leqslant b$.
- Utiliser la méthode des rectangles en $O\left(\frac{1}{n}\right)$ avec les sommes de Riemann pour calculer des intégrales de fonctions monotones et continues. La méthode des trapèzes pour des fonctions $\mathcal{C}^2$ est en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$ Puis viennent les méthodes de Simpson en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, de Bode en $O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ et de Newton-Cotes.
- Le lemme de Riemann-Lebesgue : si $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^0$ par morceaux, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\,dx = 0$.

Curiosités

- L'intégrale de Lebesgue prolonge celle de Riemann.

C.7 Calculs des primitives

Dans tout ce chapitre, il ne faut pas perdre de vue que les intégrales sont définies à une constante additive près et que les fonctions doivent être intégrables et définies sur leur domaine d'intégration.

Notions

- Les règles de Bioche pour les fonctions rationnelles trigonométriques :
  - si $f(x)\,dx$ est invariant par $x \mapsto -x$, on posera $u = \cos(x)$ (ou $u = \text{ch}(x)$) ;
  - si $f(x)\,dx$ est invariant par $x \mapsto \pi - x$, on posera $u = \sin(x)$ (ou $u = \text{sh}(x)$) ;
  - si $f(x)\,dx$ est invariant par $x \mapsto \pi + x$, on posera $u = \tan(x)$ (ou $u = \text{th}(x)$).
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\cdot$
- $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = -\ln(|\cos(x)|)$, $\displaystyle\int \text{cotan}(x)\,dx = \ln(|\sin(x)|)$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$, $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{Argth}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)\cdot$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln\left(\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{|a|}\right)\cdot$

Savoir-faire

- Reconnaître puis étudier une intégrale qui dépend d'un paramètre.
- Ne pas oublier les **constantes d'intégration** (sur un intervalle).
- Toujours vérifier le signe des expressions dans un logarithme.
- Calculer $\int \cos^n \sin^p$ et $\int \text{ch}^n \text{sh}^p$ en linéarisant les fonctions trigonométriques.
- Réaliser rapidement des changements de variables $\mathcal{C}^1$ et des intégrations par parties.
- Intégrer des fractions rationnelles :
  - les éléments de première espèce $\displaystyle\int_I \frac{dx}{x-a} = \ln(|x-a|)$ et $\displaystyle\int_I \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ si $a \notin I$;
  - les éléments de deuxième espèce $\displaystyle\int_I \frac{mx+p}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$ à faire apparaître comme $\displaystyle\int_I \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$ (logarithme si $n=1$ ou fraction) et $\displaystyle\int_I \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}$ (Arctan si $n=1$ ou intégrale de cosinus).
- Intégrer des fonctions abéliennes ainsi que des produits de polynômes et d'une exponentielle.
- Le calcul des primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^n\sqrt{x^2+bx+c}}$ est simplifié en posant $u = \dfrac{1}{x+a}\cdot$
- Toujours effectuer les calculs **sereinement** et **avec méthode**.
- Manier les formules de trigonométrie sur le bout des doigts (notamment les formules du demi-angle).

Curiosités

- L'intégrale généralisée de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot$
- L'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$
- Les intégrales d'Euler : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.
- Les intégrales de Fresnel : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$
- Les intégrales de Wallis : $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\cdot$
- Le calcul numérique d'intégrales par la méthode de Romberg, l'extrapolation de Richardson...
- Les intégrales elliptiques.

C.8 Fonctions intégrables

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Notions

- Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est localement réglée si elle est réglée sur tout compact de I.
- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+$ localement réglée est intégrable sur I s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout segment $J \subset I$, $\int_J f \leqslant M$. Dans ces conditions, $\int_I f = \sup_{I \supset J \text{ segment}} \left(\int_J f \right)$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : [a; b[\to \mathbb{R}_+$ localement réglée est intégrable $\Leftrightarrow \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe.
- Le théorème de comparaison des fonctions **positives** intégrables : si $f, g : I \to \mathbb{R}_+$ sont localement réglées avec $f \leqslant g$, alors si g est intégrable, f l'est aussi. Et si f n'est pas intégrable, g ne l'est pas.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c > 0$, $x \in [c; +\infty[\mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \neq c \in \mathbb{R}$, $x \in]a; c] \mapsto \dfrac{1}{|x - a|^\alpha}$ est intégrable $\Leftrightarrow \alpha < 1$.
- Les séries de Riemann : si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- La formule de Stirling : $n! \sim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\dfrac{n}{e} \right)^n$.
- Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est intégrable si $|f|$ est intégrable (pour l'intégrale de Riemann).
- Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : [a; b[\to \mathbb{C}$ est intégrable, alors $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe et vaut $\int_a^b f$.
- On définit des intégrales de fonctions non intégrables comme $\int_a^{\to b} f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$.

Savoir-faire

- Utiliser la caractérisation séquentielle de l'intégrale : $f : [a; b[\to \mathbb{R}_+$ localement réglée est intégrable $\Leftrightarrow$ il existe une suite $(b_n)_{n \geqslant 0}$ tendant vers b telle que $\left(\int_a^{b_n} f \right)_{n \geqslant 0}$ admette une limite finie.
- Utiliser les formes équivalentes du théorème de comparaison des fonctions positives intégrables : lorsque $f \sim_{b^-} g$, f intégrable $\Leftrightarrow g$ intégrable. Et si g est intégrable, $f = O_{b^-}(g) \Rightarrow f$ intégrable.
- Tracer des graphes et réaliser rapidement des comparaisons série-intégrale.
- Savoir calculer des développements asymptotiques en utilisant les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs : si les termes généraux sont équivalents, alors les sommes partielles sont équivalentes en cas de divergence ; sinon, les restes d'ordre n sont équivalents en cas de convergence.
- Bien vérifier la **positivité** des fonctions avant d'appliquer des théorèmes sur les fonctions à valeurs positives (il existe des fonctions non intégrables sur $[a; b[$ pour lesquelles $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe...).
- Ne pas oublier les valeurs absolues dans la majoration $\left| \displaystyle\int_I f \right| \leqslant \displaystyle\int_I |f|$ pour f intégrable.
- Toujours s'assurer de l'existence d'une intégrale avant d'en parler et de la majorer !
- En cas de doute lors d'une intégration par parties, toujours revenir sur des segments puis faire tendre les bornes vers les extrémités de I.
- Une fonction intégrable et uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.
- Pour montrer qu'une fonction à valeurs complexes est intégrable, il est nécessaire et suffisant de prouver que sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Curiosités

- La fonction zêta de Riemann : $\dfrac{1}{\alpha - 1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$, $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim_{N \to +\infty} \frac{1}{(\alpha - 1) N^{\alpha - 1}}$.
- L'intégrale eulérienne de première espèce $B : (x, y) \in (\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R})^2 \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} \, dt$.
- L'intégrale eulérienne de deuxième espèce $\Gamma : z \in \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt$.

C.9 Équations différentielles

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Notions

- Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est continue et $x_0 \in I$, les solutions de l'équation $y' + \varphi y = 0$ sont exactement les fonctions $x \in I \mapsto \lambda e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
- La méthode de la variation de la constante : si Y est une solution non nulle de $y' + \varphi y = 0$, les solutions de $y' + \varphi y = \psi$ (où $\varphi, \psi : I \to \mathbb{C}$ sont continues) sont les fonctions $y(x) = \lambda(x)Y(x)$ où λ est une fonction dérivable vérifiant $\lambda'(x)Y(x) = \psi(x)$.
- Si z est une solution particulière de $y' + \varphi y = \psi$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $Y + z$ où Y est une solution quelconque de l'équation homogène associée.
- Si $\varphi, \psi, \theta : I \to \mathbb{C}$ sont continues, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$, il existe une unique solution y de l'équation $y'' + \varphi y' + \psi y = \theta$ vérifiant $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$.
- La méthode de la variation des constantes : si y et z sont des solutions indépendantes de $y'' + \varphi y' + \psi y = 0$, les solutions de $y'' + \varphi y' + \psi y = \theta$ (où $\varphi, \psi, \theta : I \to \mathbb{C}$ sont continues) sont les fonctions $Y(x) = \lambda(x)y(x) + \mu(x)z(x)$ où λ et μ sont des fonctions dérivables vérifiant $\begin{pmatrix} y & z \\ y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$.
- Si z est une solution particulière de $y'' + \varphi y' + \psi y = \theta$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $Y + z$ où Y est une solution quelconque de l'équation homogène associée.
- Si $a \in \mathbb{C}$, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions $x \in I \mapsto \lambda e^{-ax}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Si $a, b \in \mathbb{C}$ et α, β racines de $X^2 + aX + b$, les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \in I \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ si $\alpha \neq \beta$ et $x \in I \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}$ si $\alpha = \beta$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$ et α, β racines de $X^2 + aX + b$, les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions :
  - $x \in I \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si $\Delta > 0$;
  - $x \in I \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si $\Delta = 0$;
  - $x \in I \mapsto e^{kx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ où $\alpha = k + i\omega$ avec $(k, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si $\Delta < 0$.
- Le lemme de relèvement : si $f : I \to \mathbb{U}$ est $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^k$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$.

Savoir-faire

- Représenter des courbes intégrales avec leurs particularités.
- Résoudre des équations différentielles (par les méthodes classiques, le principe de superposition des solutions particulières, analyse/synthèse avec le théorème de la limite de la dérivée, etc.).
- Chercher des solutions particulières adaptées au second membre (polynomial, exponentiel, etc.).
- Connaître la dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle.
- Caractériser l'indépendance de deux solutions y et z d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 : leur wronskien $W(y, z)(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$ ne s'annule jamais sur I. Sinon, il est nul sur I.
- Avec une solution y_0 $\mathcal{D}^2$, qui ne s'annule pas sur I, d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, on peut se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en posant $y = zy_0$.
- Toujours s'assurer de la non-nullité de y en un point lorsqu'on la manipule (et vérifier a posteriori).

Curiosités

- Le lemme de Gronwall : si $u, v : [a; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ sont continues et s'il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [a; +\infty[,\ u(x) \leqslant C + \int_a^x uv$, alors $\forall x \in [a; +\infty[,\ u(x) \leqslant Ce^{\int_a^x v}$.
- Les équations de Bernoulli, de Riccati, de Lagrange, de Clairaut, homogènes, autonomes, les systèmes d'équations différentielles couplées, les équations différentielles linéaires d'ordre n, etc.
- Les théorèmes subtils de Cauchy-Lipschitz et de Peano.
- Les équations aux dérivées partielles et le théorème subtil de Cauchy-Kovalevskaïa.
- Les méthodes numériques d'Euler, de Runge-Kutta, de Newmark, des différences finies, etc.
- La transformée de Laplace.

Formules de trigonométrie circulaire

Soient $a, b, p, q, x, y \in \mathbb{R}$ (tels que les fonctions soient **bien définies**) et $n \in \mathbb{N}$.
La parfaite connaissance des graphes des fonctions trigonométriques est nécessaire.

Relations fondamentales

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad -\tfrac{d}{dx}\operatorname{cotan}(x) = 1 + \operatorname{cotan}^2(x) = \tfrac{1}{\sin^2(x)} \qquad \tfrac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x) = \tfrac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \tfrac{\pi}{2} \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \operatorname{signe}(x) \times \tfrac{\pi}{2} \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arccotan}(x) = \tfrac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x)$$

x en radians	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\pm\infty$

Il faut savoir linéariser à l'aide des formules d'Euler $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$; de même, développer se réalise à partir des formules de Moivre $e^{inx} = (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a+b) &= \tfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} & \tan(a-b) &= \tfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

Pour retenir $\cos\left(x \pm n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(x \pm n\frac{\pi}{2}\right)$, il suffit de visualiser les axes du cercle trigonométrique : $+\cos$, $+\sin$, $-\cos$ et $-\sin$ (dans le sens trigonométrique). Ajouter $\frac{\pi}{2}$ correspond à avancer dans le sens antitrigonométrique (ou à **dériver**) ; retrancher $\frac{\pi}{2}$ correspond à avancer dans le sens trigonométrique (ou à **intégrer**). Par exemple : $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.

Formules d'angle double

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) & \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) & \tan(2x) &= \tfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Formules du demi-angle

$$\cos^2(x) = \tfrac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \tfrac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \tan(x) = \tfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \tfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$, on a : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Somme, différence et produit

$$\begin{aligned} \cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right) & \cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right) & \sin(p)-\sin(q) &= 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right) \\ \tan(p)+\tan(q) &= \tfrac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)} & \tan(p)-\tan(q) &= \tfrac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)} \end{aligned}$$

*Procédé mnémotechnique : retenir « coco-**moins**-sisi-sico-cosi » pour l'ordre des fonctions.*

Les produits $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a)\cos(b)$ s'obtiennent à partir des formules d'addition.

Formules de trigonométrie hyperbolique

Soient $a, b, p, q, x, y \in \mathbb{R}$ (tels que les fonctions soient **bien définies**) et $n \in \mathbb{N}$.
La parfaite connaissance des graphes des fonctions trigonométriques est nécessaire.

Relations fondamentales

$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ $\quad \frac{d}{dx}\coth(x) = 1 - \coth^2(x) = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$ $\quad \frac{d}{dx}\mathrm{th}(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$

$\frac{d}{dx}\mathrm{Argch}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad \frac{d}{dx}\mathrm{Argsh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \frac{d}{dx}\mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$\mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $\quad \mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Il faut savoir linéariser et développer à l'aide des formules $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$
$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad e^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$ $\quad e^{-x} = \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$.

Formules d'addition

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) & \mathrm{ch}(a-b) &= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) \\ \mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) & \mathrm{sh}(a-b) &= \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) \\ \mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)} & \mathrm{th}(a-b) &= \frac{\mathrm{th}(a)-\mathrm{th}(b)}{1-\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)} \end{aligned}$$

Formules d'angle double

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(2x) &= \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) & \mathrm{sh}(2x) &= 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) \\ &= 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2(x) + 1 & \mathrm{th}(2x) &= \frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)} \end{aligned}$$

Formules du demi-angle

$\mathrm{ch}^2(x) = \frac{1+\mathrm{ch}(2x)}{2}$ $\quad \mathrm{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$ $\quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(2x)}{1+\mathrm{ch}(2x)} = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{\mathrm{sh}(2x)}$

En posant $t = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$, on a : $\mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ et $\mathrm{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

Somme, différence et produit

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) &= 2\,\mathrm{ch}\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\tfrac{p-q}{2}\right) & \mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) &= 2\,\mathrm{sh}\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\tfrac{p-q}{2}\right) \\ \mathrm{sh}(p) + \mathrm{sh}(q) &= 2\,\mathrm{sh}\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\tfrac{p-q}{2}\right) & \mathrm{sh}(p) - \mathrm{sh}(q) &= 2\,\mathrm{ch}\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\tfrac{p-q}{2}\right) \\ \mathrm{th}(p) + \mathrm{th}(q) &= \frac{\mathrm{sh}(p+q)}{\mathrm{ch}(p)\,\mathrm{ch}(q)} & \mathrm{th}(p) - \mathrm{th}(q) &= \frac{\mathrm{sh}(p-q)}{\mathrm{ch}(p)\,\mathrm{ch}(q)} \end{aligned}$$

Procédé mnémotechnique : retenir « coco-sisi-sico-cosi » pour l'ordre des fonctions.

Les produits $\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)$, $\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$ et $\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)$ s'obtiennent à partir des formules d'addition.

Quelques autres formules

$$\begin{aligned} \int \mathrm{th}(x)\,dx &= \ln(\mathrm{ch}(x)) & \int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,dx &= 2\,\mathrm{Arctan}(e^x) \\ \int \coth(x)\,dx &= \ln(|\,\mathrm{sh}(x)|) & \int \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\,dx &= \ln\left(\left|\mathrm{th}\left(\tfrac{x}{2}\right)\right|\right) \end{aligned}$$

Au voisinage de 0 :

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o\left(x^8\right).$$