Mathématiques MPSI

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Ensembles

1.1 Vocabulaire général

Définition 1.1 On appelle ensemble toute collection d'objets. On appelle élément d'un ensemble E tout objet appartenant à la collection d'objets définissant E.

Pour écrire que x est un élément de E, on note $x \in E$.

On appelle partie de E tout ensemble F d'éléments de E. On dit alors que F est inclus dans E et on note $F \subset E$. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Dans icelui, il y a deux ensembles remarquables : E et $\varnothing$, qui est appelé vide et qui est la partie de E qui ne contient aucun élément de E.

Remarque 1.1 Hors de tout contexte, la signification de $\varnothing$ n'est pas clair. En effet, il peut signifier une partie de E : $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ ou un ensemble de parties de E : $\varnothing \subset \mathcal{P}(E)$, ...

Définition 1.2

- L'ensemble E des objets vérifiant une propriété P est noté

$$E = \{x, x \text{ vérifie } P\}$$

  Dans cette écriture, x est une lettre muette et peut être remplacée par tout autre lettre sans changer l'ensemble. Ainsi $\{y, y \text{ vérifie } P\}$ désigne aussi E. De même, un élément choisi dans E peut porter n'importe quel nom.
  - Lorsque la propriété P est la réunion d'une propriété Q et d'une appartenance à un autre ensemble F, plutôt que note $E = \{x, x \text{ vérifie } Q$ et appartient à $F\}$, on écrit plus brièvement

$$E = \{x \in F, x \text{ vérifie } Q\}$$

– Parfois, vérifier une propriété P consiste à être d'une certaine forme. Cela revient à connaître un ensemble de paramètres A et un application f définie sur A tels que les objets étudiés soient ceux qui s'écrivent $f(a)$ pour au moins un élément a de A. Plutôt que noter $E = \{x$, il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)\}$, on écrit plus brièvement :

$$E = \{f(a), a \in A\}$$

Dans cette écriture, on ne peut pas ajouter d'autre propriété ue la forme des éléments manipulés. En particulier, l'appartenance des éléments à un ensemble particulier ne peut plus être indiquée.

Exemple 1.1

- L'ensemble des solutions réelles de l'équation $x^7 + 2x - 3 = 0$ est $\{x \in \mathbb{R}, x^7 + 2x - 3 = 0\}$
- L'ensemble des solutions rationnelles de l'équation $x^7 + 2x - 3 = 0$ est $\{x \in \mathbb{Q}, x^7 + 2x - 3 = 0\}$
- L'ensemble des rationnels sommes de deux carrés de rationnels s'écrit $\{p^2 + q^2, (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$
- L'ensemble des entiers sommes de deux carrés de rationnels s'écrit $\{x \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in \mathbb{Q}^2, x = p^2 + q^2\}$.

1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 1.3 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On appelle union (resp. intersection) de A et B, et on note $A \cup B$ (resp. $A \cap B$) la partie de E dont les éléments sont ceux de E contenus dans A ou B (resp. A et B).

On appelle complémentaire de A dans E et on note $E \setminus A$ la partie de E contenant tous les éléments de E n'appartenant pas à A.

Définition 1.4 Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, noté $E \times F$ l'ensemble $\{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Remarque 1.2 On peut étendre les notions de produit cartésien, union et intersection à un nombre fini d'ensembles ou de parties de E. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{P}(E)^n$, on a

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E, \exists i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\} \text{ et } \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E, \forall i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\}$$

Proposition 1.1 Soit E un ensemble et A, B, C, D quatre parties de E telles que $A \subset C$ et $B \subset D$. On a alors $A \cup B \subset C \cup D$, $A \cap B \subset C \cap D$ et $E \setminus C \subset E \setminus A$.

Démonstration.
- Soit $x \in A \cup B$. Par définition, $x \in A$ ou $x \in B$. Comme $A \subset C$ et $B \subset D$, on a $x \in C$ ou $x \in D$, donc $x \in C \cup D$.
- Soit $x \in A \cap B$. $x \in A \subset C$ et $x \in B \subset D$ donc $x \in C \cap D$.
- Soit $x \in E \setminus C$. On a $x \in E$ et $x \notin C$. Comme $A \subset C$, si $x \in A$, alors $x \in C$, ce qui est absurde. Donc $x \notin A$ et $x \in E \setminus A$. ∎

Proposition 1.2 Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. On a
1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$
6. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

Démonstration.

1.,2. Évident

3. Soit $x \in E$. On a $x \in (A \cup B) \cap C$ ssi $x \in A \cup B$ et $x \in C$ ssi ($x \in A$ ou $x \in B$) et $x \in C$ ssi ($x \in A$ et $x \in C$) ou ($x \in B$ et $x \in C$) ssi $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Finalement, on a l'égalité recherchée.
4. Analogue
5. Soit $x \in E$. On a $x \in E \setminus (A \cap B)$ ssi $x \in E$ et $x \notin A$ ou $x \notin B$ ssi $x \in E \setminus A$ ou $x \in E \setminus B$ ssi $x \in (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$. D'où le résultat.
6. Analogue ∎

1.3 Relations d'ordre

<u>Définition 1.5</u> On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur E toute assertion logique associant à certains couples (x, y) d'éléments de E la valeur logique « vrai ». Le cas échéant, on note $x\mathcal{R}y$. Par exemple, la relation binaire « être de la même taille » est une relation binaire sur l'ensemble des êtres humains.

<u>Définition 1.6</u> On appelle relation d'ordre sur un ensemble E toute relation binaire sur E vérifiant :
- Pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$ (réflexivité)
- Pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ implique $x = y$ (antisymétrie)
- Pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ implique $x\mathcal{R}z$ (transitivité).

On dit que deux éléments de E sont comparables pour une relation d'ordre $\mathcal{R}$ lorsque $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Si deux éléments quelconques de E sont comparables, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total, Dans le cas contraire, l'ordre est dit partiel.

Remarque 1.3 *Si x et y sont deux éléments d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$, écrire $x \leqslant y$ signifie avant tout que x et y sont comparables, puis que x est plus petit que y. Ceci ne pose pas de problème dans les ensembles totalement ordonnés.*

Exemple 1.2

- Les relations d'ordre bien connues sur les ensembles de nombres sont des relations d'ordre total (deux nombres sont toujours comparables).
- La relation d'inclusion sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. En effet, toute partie de $\mathbb{R}$ est incluse dans elle-même, si deux parties A et B de $\mathbb{R}$ vérifiant $A \subset B$ et $B \subset A$ sont égales et trois parties (A, B, C) de $\mathbb{R}$ qui vérifient $A \subset B$ et $B \subset C$ vérifient aussi $A \subset C$. En revanche, les parties $]0, 2[$ et $[1, 3]$ ne sont pas comparables, ce qui assure que la relation d'inclusion est un ordre partiel.

Définition 1.7 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On appelle plus grand élément (resp. plus petit élément) de E tout élément $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $x \leqslant a$ (resp. $a \leqslant x$).

Exemple 1.3

- L'ensemble des entiers naturels, muni de son ordre naturel, admet 0 comme plus petit élément mais n'admet pas de plus grand élément.
- Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on sait que $\varnothing \subset A \subset \mathbb{R}$. Autrement dit, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ muni de l'ordre de l'inclusion, admet $\varnothing$ comme plus petit élément et $\mathbb{R}$ comme plus grand élément.

Proposition 1.3 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Si E admet un plus grand (resp. plus petit) élément, icelui est unique et on le note $\max(E)$ (resp. $\min(E)$).

Démonstration. Soit a et b deux plus grands éléments de E. On a par définition $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ donc $a = b$. ∎

Définition 1.8 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$. On appelle majorant (resp. minorant) de A tout élément $M \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$ (resp. $M \leqslant x$). Une partie de E admettant un majorant (resp. un minorant) est dire majorée (resp. minorée).

Une partie de E est dite bornée ssi elle est majorée et minorée.

Exemple 1.4

- On munit $\mathbb{R}$ de sont ordre usuel. La partie $\{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^*\}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
- On munit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de la relation d'inclusion. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$ donc $\{A, B\}$ est majorée par $A \cup B$ et minorée par $A \cap B$.

Chapitre 2

Applications

2.1 Vocabulaire général

2.1.1 Fonction et application

Définition 2.1 Soit E et F deux ensembles. On appelle application de E dans F tout triplet (E, F, Γ), où Γ est une partie de $E \times F$ telle que pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ vérifiant $(x, y) \in \Gamma$. Dans ce cadre, Γ est le graphe de l'application considérée.

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Soit E et F deux ensembles et $f = (E, F, \Gamma)$ une application de E dans F. Pour tout $x \in E$, l'unique élément y de F tel que $(x, y) \in \Gamma$ se note $f(x)$. Dans une telle situation, x est appelé antécédent de y et y est appelé image de x par f.

Exemple 2.1 Pour tout ensemble E, on appelle application identité de E et on note Id_E (ou Id quand il n'y a pas de confusion) l'application

$$\begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

Soit E un ensemble et $F \subset E$. L'application

$$\begin{cases} F & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

est appelée injection canonique de F dans E.

Exemple 2.2 Pour tout ensemble E et $A \subset E$, on appelle application indicatrice de A et on note 1_A l'application

$$\begin{cases} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & 1 \text{ si } x \in A \\ x & \mapsto & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a $1_{A\cap B} = 1_A 1_B$, $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$ et $1_{E\setminus A} = 1 - 1_A$.

Remarque 2.1 Deux applications f et g sont égales ssi elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même expression. Ce dernier point signifie que pour tout x de leur ensemble de départ commun, $f(x) = g(x)$.

Par contraposition, deux applications f et g sont distinctes ssi elles n'ont pas même ensemble de départ ou n'ont pas le même ensemble d'arrivée ou s'il existe x dans leur ensemble de départ commun tel que $f(x) \neq g(x)$.

Définition 2.2 Soit I et E deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indicée par I toue application de I dans E. Une telle famille f est aussi notée $(f_i)_{i\in I}$ et l'image par f d'un élément i de I est alors notée f_i.

2.1.2 Restriction et prolongement d'applications

Définition 2.3 Soit E, F et G trois ensembles. Soit f une application de E vers g et g de F vers G. On dit que f et g coïncident sur une partie A de $E \cap F$ ssi pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

On dit que g est un prolongement de f ssi $E \subset F$ et f et g coïncident sur E.

Si A est une partie de E, on appelle restriction de f à A et on note $f|_A$ l'application de A dans G qui coïncide avec f sur A.

Exemple 2.3
- Les applications réelles Id et $|\cdot|$, définies sur $\mathbb{R}$, coïncident sur $\mathbb{R}^+$.
- L'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x + |x|$ est un prolongement de l'application nulle définie sur $\mathbb{R}^-$.
- On appelle f l'application réelle, définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe sa partie entière. La restriction sur $[0,2[$ de $1_{[1,2[}$ et $f|_{[0,2[}$ coïncident. Un prolongement sur $\mathbb{R}$ de la restriction sur $[2, \frac{5}{2}]$ de f est l'application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante égale à 2.

2.1.3 Composition d'applications

Définition 2.4 Soit E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g de F dans G. On appelle application composée de f par g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G qui à tout élément $x \in E$ associe $g(f(x))$.

Proposition 2.1 Soit E, F, G et H quatre ensembles, f une application de E vers F, g de F vers G et h de G vers H.

Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont égales et notées $h \circ g \circ f$.

Démonstration. Ces applications ont même espace de départ et d'arrivée. Soit $x \in E$. Par définition, on a

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$$

Ce qui conclut. ∎

Remarque 2.2 Soit E un ensemble et f, g deux applications de E dans E. On n'a pas en général $f \circ g = g \circ f$. Par exemple, si f et g vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f = x \mapsto x+1$, $g = x \mapsto x^2$, $g \circ f$ et $f \circ g$ vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais $f \circ g = x \mapsto 1 + x^2$ et $g \circ f = x \mapsto (1+x)^2$, qui sont distinctes car elles ne sont pas égales en 1.

Exemple 2.4 Soit E et F deux ensembles des f de E vers F. Alors $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_F \circ f = f$.

2.1.4 Image directe et réciproque de parties par une application

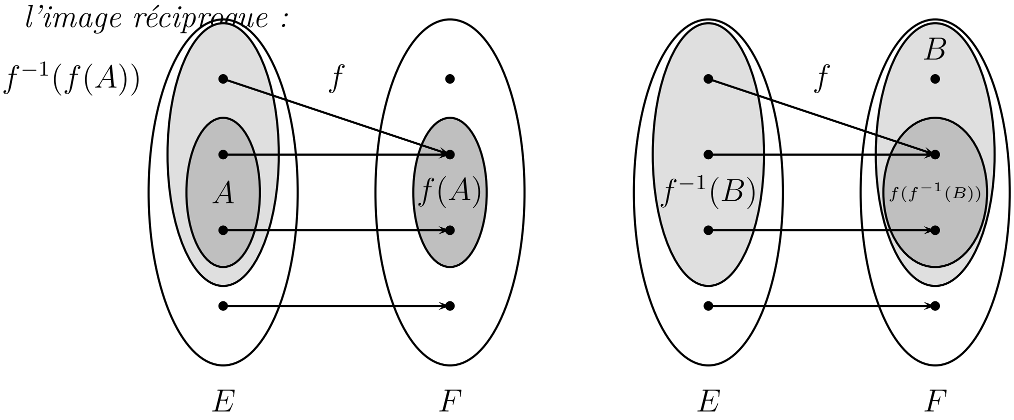
<u>Définition 2.5</u> Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

On appelle image directe d'une partie A de E par f et on note $f(A)$ la partie de F égale à $\{f(x), x \in A\}$. On appelle image réciproque d'une partie B de F par f et on note $f^{-1}(B)$ la partie de E égale à $\{x \in E, f(x) \in B\}$.

Exemple 2.5 Si f est une application définie sur E, l'ensemble des valeurs prises par f est $f(E)$. Par exemple, $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ et $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Si f est une application définie sur E à valeurs dans F et $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$. EN particulier, si f est une application réelle, $f^{-1}(0)$ est l'ensemble des points d'annulation de F. Par exemple, $\sin^{-1}(0) = \pi\mathbb{Z}$.

Remarque 2.3 Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Si on représente graphiquement f en dessinant les deux ensembles et en liant par une flèche chaque élément de E à son image par f, on peut facilement visualiser les notions d'images directes et réciproques de parties : il suffit de descendre ou de remonter les flèches selon ce qu'on recherche. En particulier, on se rend compte que l'image réciproque de l'image directe *d'une partie n'est pas forcément cette partie, de même que l'image directe de l'image réciproque :*



<u>Définition 2.6</u> Soit E un ensemble et f une application de E dans E. Soit $A \subset E$. On dut que A est stable (resp. invariant) par f ssi $f(A) \subset A$ (resp. $f(A) = A$). Lorsque A est stable par f, l'application de A dans A qui coïncide avec f sur A est appelée application induite par f sur A.

2.2 Injections, surjections, bijections

2.2.1 Présentation

<u>Définition 2.7</u> Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est injective (resp. surjective, bijective) ou que f est une injection (resp. surjection, bijection) ssi tout élément de F admet au plus (resp. au moins, exactement) un antécédent par f.

Remarque 2.4

- *Par définition, une application est bijective ssi elle est surjective et injective.*
- *Une application f définie sur E et à valeurs dans F est injective ssi pour tout couple (x, y) de E^2 tel que $f(x) = f(y)$, alors $x = y$.*
- *Soit E et F deux ensembles est f une application de E dans F. Étudier f du point de vue des propriétés précédentes revient à étudier une famille d'équations. En effet, si pour tout $b \in F$, on note (E_b) l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$, on a existence (resp. unicité, existence et unicité) d'une solution à l'équation (E_b) pour tout $b \in F$ ssi f est surjective (resp. injective, bijective).*

Exemple 2.6 Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier le caractère injectif (resp. surjectif, bijectif) de l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (ax+y+1, x-y+a) \end{cases}$$

Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on appelle $(E_{\alpha,\beta})$ l'équation $f(x,y) = (\alpha,\beta)$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que cette équation est équivalente à

$$\begin{cases} ax+y = \alpha - 1 \\ x - y = \beta - a \end{cases}$$

d'inconnue (x,y).

On remarque alors que si $a \neq -1$, il y a une unique solution, ie f est bijective.

Si $a = -1$, $(E_{0,0})$ admet une infinité de solutions donc f n'est pas injective et $(E_{1,1})$ n'admet aucune solution donc f n'est pas surjective.

Proposition 2.2 La composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).

Démonstration. On prend E, F, G trois ensembles, f de E dans F et g de F dans G.

- Si f et g sont injectives, soit $x, y \in E^2$ tels que $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, $f(x) = f(y)$ donc, comme f est injective, $x = y$, donc $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, on prend $z \in G$. Il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $z = g(f(x))$, donc $g \circ f$ est surjective.
- Découle des points précédents. ∎

2.2.2 Étude des bijections

<u>THÉORÈME 2.1</u> *Soit E et F deux ensembles. Une application f de E dans F est bijective ssi il existe g de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Dans ce cas, g est unique. On l'appelle réciproque de f, notée f^{-1}.*

Démonstration. Si f est bijective, l'application qui à $x \in F$ associe son unique antécédent par f convient clairement.

Réciproquement, soit g convenable. Soit alors x, y tel que $f(x) = f(y)$. On a $g(f(x)) = g(f(y))$ donc $x = y$ et f est injective. De plus, soit $y \in F$, $g(y)$ est alors un antécédent de y par f donc f est surjective, donc bijective.

Soit g et h convenables. On a $g \circ f \circ h = \mathrm{Id}_E \circ h$ et $g \circ f \circ h = g \circ \mathrm{Id}_F = g$ donc $g = h$. ∎

Remarque 2.5 *Ne pas confondre f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective) et $f^{-1}(B)$, image réciproque de la partie B par f, qui est toujours définie, que f soit bijective ou non.*

Par exemple, $f^{-1}(y)$ n'a de sens que pour f bijective alors que ce n'est pas le cas pour $f^{-1}(\{f(y)\})$. Si f est bijective, on a en particulier $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

De plus, si f est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective de réciproque f.

Corollaire 2.1 *Soit E, F, G trois ensembles, f une bijection de E vers F, g une bijection de F vers G. $g \circ f$ est une bijection d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration. On remarque que

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$$

Et

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = \mathrm{Id}_E$$

Par unicité de l'inverse, on a le résultat. ■

Chapitre 3

Le principe de récurrence

3.1 Axiomes de Péano

<u>Théorème 3.1</u> Axiomes de Péano *Il existe un ensemble non vide E (totalement) ordonné tel que :*

- *toute partie non vide de E admet un plus petit élément*
- *toute partie non vide et majorée de E admet un plus grand élément*
- *E n'a pas de plus grand élément*

Un tel ensemble est noté $\mathbb{N}$.

Proposition 3.1 Soit A une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant :

- $0 \in A$
- pour tout $n \in A$, $n + 1 \in A$

Alors $A = \mathbb{N}$.

Démonstration. On suppose $A \neq \mathbb{N}$. On pose $B = \mathbb{N} \setminus A$.

Par hypothèse $B \neq \varnothing$. Il admet dont un plus petit élément noté b. Comme $b \in B$ et $0 \notin B$, $b \neq 0$.

Donc $b - 1 \in \mathbb{N}$. On note que $b - 1 < b$ donc $b - 1 \notin B$ donc $b - 1 \in A$.

Donc $b - 1 + 1 \in A$ donc $b \in A$. Donc $b \in B \cap A$, or $B \cap A = \varnothing$.

Par conséquent $A = \mathbb{N}$. ∎

3.2 Principe de récurrence

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'assertions logiques. On suppose que :

- P_0 est vraie
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie, P_{n+1} est vraie.

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Rédaction de récurrence :

1. Introduire la suite de propriétés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à démonter.
2. Vérifier P_0.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie, P_{n+1} est vraie.
4. « Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie. »

Exemple 3.1 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : « $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».
- On a :

$$\sum_{k=0}^{1} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a + b = (a+b)^1$$

  Donc P_1 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie.
  On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

  Donc P_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Proposition 3.2 Soit F un ensemble et f une application de F dans F. Soit $a \in F$.

Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend $F_1, F_2, \cdots, F_n$ des fonctions polynômiales telles que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\deg(F_i) > \deg(F_{i+1})$. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i F_i = 0$.

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

– Première méthode :
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose P_i : « $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_i = 0$ ».
- On suppose $\lambda_1 \neq 0$. $F_1 = -\frac{1}{\lambda_1}\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lambda_k F_k\right)$.

  Donc $\deg\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lambda_k F_k\right) = \deg F_1$.

  Or, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\deg(F_i) < \deg(F_1)$ donc $\deg\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lambda_k F_k\right) < \deg F_1$.

  Il y a contradiction. Donc $\lambda_1 = 0$. Donc P_1 est vraie.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que P_k soit vraie.

  On a $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \lambda_r F_r = 0$ donc $\displaystyle\sum_{r=1}^{k} \lambda_r F_r + \lambda_{k+1} F_{k+1} + \sum_{r=k+2}^{n} \lambda_r F_r = 0$.

  Or, pour tout $r \in [\![1, k]\!]$, $\lambda_r = 0$.

  Donc $\lambda_{k+1} F_{k+1} = -\displaystyle\sum_{r=k+2}^{n} \lambda_r F_r$.

  On suppose $\lambda_{k+1} \neq 0$.

  $$F_{k+1} = -\frac{1}{\lambda_{k+1}} \sum_{r=k+2}^{n} \lambda_r F_r$$

  Donc $\deg\left(\displaystyle\sum_{r=k+2}^{n} \lambda_r F_r\right) = \deg(F_k)$

  Or, pour tout $i \in [\![k+2, n]\!]$, $\deg(F_i) < \deg(F_k)$ donc $\deg\left(\displaystyle\sum_{r=k+2}^{n} \lambda_r F_r\right) < \deg(F_k)$.

  Il y a contradiction. Donc $\lambda_{k+1} = 0$. Or P_k est vraie donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

  Donc P_{k+1} est vraie.
- Le principe de récurrence finie assure alors le résultat.

– Deuxième méthode : On pose $A = \{k \in [\![1,n]\!], \lambda_k \neq 0\}$. On suppose $A \neq \varnothing$.
  Péano assure que A admet un plus petit élément noté k_0.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k = 0 &\text{ ssi } \sum_{k=1}^{k_0-1} \lambda_k F_k + \lambda_{k_0} F_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \lambda_k F_k = 0 \\
&\text{ ssi } \lambda_{k_0} F_{k_0} = -\sum_{k=k_0+1}^{n} \lambda_k F_k \\
&\text{ ssi } F_{k_0} = -\frac{1}{\lambda_{k_0}} \sum_{k=k_0+1}^{n} \lambda_k F_k
\end{aligned}$$

  Donc $\deg\left(\sum_{k=k_0+1}^{n} \lambda_k F_k\right) = \deg(F_{k_0})$
  Or, pour tout $i \in [\![k_0+1, n]\!]$, $\deg(F_i) < \deg(F_{k_0})$ donc $\deg\left(\sum_{k=k_0+1}^{n} \lambda_k F_k\right) < \deg(F_{k_0})$.
  Il y a contradiction. Donc $A = \varnothing$, ce qui permet de conclure.

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'assertions logiques. Pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, il suffit de vérifier :

$$\begin{cases} P_0 \text{ est vraie} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } P_n \text{ soit vraie, } P_{n+1} \text{ est vraie} \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} P_0 \text{ et } P_1 \text{ sont vraies} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ soient vraies, } P_{n+2} \text{ est vraie} \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} P_0 \text{ est vraie} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } k \in [\![0,n]\!], P_k \text{ soit vraie, } P_{n+1} \text{ est vraie} \end{cases}$$

Chapitre 4

Ensembles finis

4.1 Notion d'ensemble fini

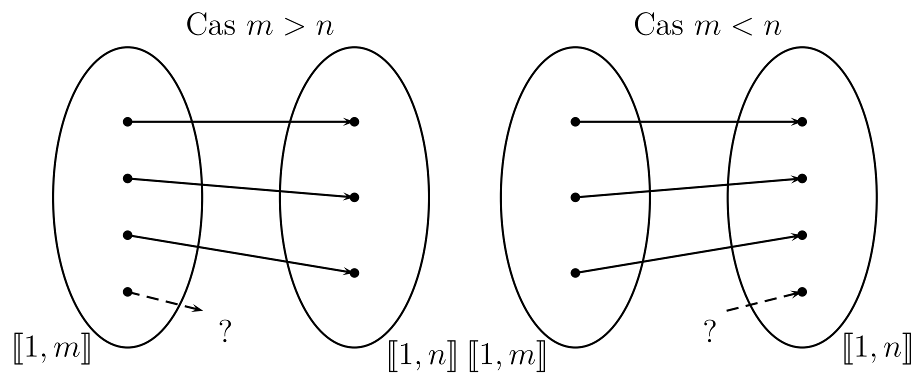
4.1.1 Présentation

Définition 4.1 On dit qu'un ensemble E est fini lorsqu'il est vide ou qu'on peut compter ses éléments, ie établir une bijection entre E et une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1, \cdots, n\}$ pour une valeur de $n \in \mathbb{N}^*$. Cette partie, notée $[\![1, n]\!]$, correspond aux numéros des éléments de E.

Proposition 4.1 Il existe une bijection de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ssi $m = n$.

Démonstration. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}*^2$. Il semble clair sur un schéma que si $m > n$, on ne peut pas construire d'injection de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ puisqu'il manque des images dans l'ensemble d'arrivée, et que si $m < n$, on ne peut pas construire une surjection de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ puisqu'il existe trop d'éléments à atteindre dans l'ensemble d'arrivée.

Réciproquement, si $m = n$, l'identité est une brave bijection. ■



Définition 4.2 Soit E un ensemble fini non vide. Il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que E et $[\![1, n]\!]$ soient en bijection. On l'appelle cardinal de E et on le note $\mathrm{Card}(E)$.

Par convention, $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Démonstration. C'est bien défini puisque si φ et ψ sont des bijections de E dans $[\![1, m]\!]$et $[\![1, n]\!]$, alors $\psi \circ \varphi^{-1}$ est une bijection de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ donc $m = n$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & {[\![1, m]\!]} \arrow[dl, "\psi \circ \varphi^{-1}"] \\ {[\![1, n]\!]} & \end{tikzcd}$$

∎

Proposition 4.2 Si E, F sont deux ensembles en bijection alors E est fini ssi F l'est. De plus, dans ce cas, ils ont même cardinal.

Proposition 4.3 Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est fini et son cardinal est le produit des cardinaux de E et F.

Démonstration. Si E ou F est vide, le résultat est évident. Sinon, on note n et p les cardinaux respectifs de E et F.

On a des bijections f et g de $[\![1, n]\!]$ dans E et de $[\![1, m]\!]$ dans F.

$(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ est une bijection de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ dans $E \times F$.

De plus $(x, y) \mapsto x + n(y - 1)$ de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ dans $[\![1, np]\!]$ est une bijection. ∎

4.1.2 Résultats essentiels sur les ensembles finis

<u>Théorème 4.1</u> *Soit E, F deux ensembles finis de même cardinal.*

Une application de E vers F est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.

<u>Théorème 4.2</u> *Toute partie F d'un ensemble fini E est finie de cardinal inférieur ou égal à $\mathrm{Card}(E)$ avec égalité ssi $F = E$.*

<u>Théorème 4.3</u> *Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ssi elle est majorée. Le cas échéant, il existe une bijection strictement croissante de $[\![1, \mathrm{Card}(P)]\!]$ dans P.*

<u>Théorème 4.4</u> Formule du crible *Soit A et B deux parties finies d'un ensemble E.*

La partie $A \cup B$ de E est finie de cardinal

$$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

Remarque 4.1 *Soit E un ensemble. Une récurrence simple assure que toute union finie de parties finies de E est une partie finie de E.*

Si les parties considérées sont deux à deux disjointes, le cardinal de l'union de ces parties est la somme des cardinaux de chacune des parties. Si les parties ne sont pas deux à deux disjointes il faut appliquer plusieurs fois le théorème précédent pour trouver une formule exacte.

4.2 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est l'étude des problèmes de dénombrement, ie des calculs de cardinaux d'ensembles finis. Une application en est le calcul des probabilités finies.

4.2.1 Résultats généraux

THÉORÈME 4.5 *L'ensemble des applications d'un ensemble fini de cardinal p dans un ensemble fini de cardinal n est fini, de cardinal n^p.*

COROLLAIRE 4.1 *Si E est un ensemble fini, $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal $2^{\mathrm{Card}(E)}$.*

THÉORÈME 4.6 *L'ensemble des bijections entre deux ensembles finis de cardinal n est fini de cardinal $n!$.*

4.2.2 Combinaisons

THÉORÈME 4.7 *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. L'ensemble des parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n est fini de cardinal $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.*

On introduit $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ pour $p \leqslant n$.

Proposition 4.4 Si $n \geqslant p$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Si $n \geqslant p+1$, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

Démonstration. Les deux résultats se vérifient facilement par le calcul. On va plutôt les prouver en utilisant une méthode combinatoire.

- Si $n \geqslant p$, on appelle P l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ à p éléments et Q l'ensemble des parties à $n-p$ éléments.

$$\varphi : \begin{cases} P & \to & Q \\ X & \mapsto & [\![1,n]\!] \setminus X \end{cases}$$

  est bijective, d'où la première formule.

- Si $p+1 \leqslant n$, on note P l'ensemble des parties de $[\![1,n+1]\!]$ contenant $p+1$ éléments, Q celui des parties de $[\![1,n]\!]$ contenant $p+1$ éléments et R celui des parties de $[\![1,n]\!]$ contenant p éléments.
  On considère alors :
  $$\varphi : \begin{cases} Q \cup R & \to & P \\ \quad A & \mapsto & A \text{ si } A \in Q \\ \quad A & \mapsto & A \cup \{n+1\} \end{cases}$$
  est une bijection.
  Comme Q et R sont disjoints,
  $$\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(Q \cup R) = \mathrm{Card}(Q) + \mathrm{Card}(R)$$
  d'où la deuxième formule. ■

Chapitre 5

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

5.1 Structure additive de $\mathbb{Z}$

<u>Théorème 5.1</u> de division euclidienne *Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.*

Démonstration.
- Si $b > 0$, on pose $q = E\left(\frac{b}{a}\right)$ et $r = a - bq$.
- Si $b < 0$, on travaille avec $-b$. On vérifie que $a = bq+r$, $r \geqslant 0$ et $r < |b|$.
- Soient $(q_1, r_1, q_2, r_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $a = bq_1+r_1$, $a = bq_2+r_2$, $0 \leqslant r_1 < |b|$ et $0 \leqslant r_2 < |b|$.
  On note que $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Or $|r_2 - r_1| \leqslant |b|$ donc $|b||q_1 - q_2| \leqslant |b|$.
  Or $b \neq 0$ donc $|q_2 - q_1| < 1$.
  Or $(q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$ donc $q_1 = q_2$ donc $r_1 = r_2$.
  Finalement, on a l'unicité. ∎

<u>Théorème 5.2</u> *Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = \{nx, x \in \mathbb{Z}\}$, noté $n\mathbb{Z}$.*

Démonstration.
- Si $G = \{0\}$, on peut écrire $G = 0\mathbb{Z}$.
- On suppose $G \neq \{0\}$. Il existe $m \in G \setminus \{0\}$.
  Comme G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, $|m| \in G \setminus \{0\}$.
  On pose $E = \{p \in \mathbb{N}^*, p \in G\}$.
  $m \in E$ donc $E \neq \varnothing$. Péano assure que E admet un plus petit élément noté n.
  - On vérifie $n\mathbb{Z} \subset G$. (récurrence + sous-groupe).
  - Soit $x \in G$. Comme $n \neq 0$, il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$.

Comme $(x,q) \in G^2$, et comme G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, $x - nq \in G$ donc $r \in G$.
Si $r \neq 0$, $r \in E$ et $r < n$ donc il y a contradiction et $r = 0$.
Donc $x = nq$ et $x \in n\mathbb{Z}$.

Donc $G = n\mathbb{Z}$. ∎

Remarque 5.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

Proposition 5.1 Pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ si et seulement si $|m| = |n|$.

Pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ si et seulement si $m|n$.

Démonstration. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

- On suppose $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$.
  En particulier, $m \in n\mathbb{Z}$ donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $m = nq$. Or $n|q$ donc $n|m$.
- On suppose $n|m$. Il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $m = nq$.
  Donc $m \in n\mathbb{Z}$. Une récurrence assure que $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$. ∎

5.2 PGCD et PPCM de deux entiers

5.2.1 Présentation

<u>Définition 5.1</u> On appelle plus grand diviseur commun de deux entiers a et b et on note $a \wedge b$ l'unique entier naturel vérifiant :

- $a \wedge b|a$
- $a \wedge b|b$
- Pour tout $d' \in \mathbb{Z}$ vérifiant $d'|a$ et $d'|b$, alors $d'|d$.

Démonstration.

- On pose $P = \{ap + bq, (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$. On vérifie que $P \neq \varnothing$, que P est stable par $+$ et $-$.
  P est donc un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$. D'après le théorème précédent, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $P = d\mathbb{Z}$.
  Par construction, $a\mathbb{Z} \subset P$ et $b\mathbb{Z} \subset P$.
  Donc $d|a$ et $d|b$.
  De plus, soit $d' \in \mathbb{Z}$ tel que $d'|a$ et $d'|b$.
  $a\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$.
  Comme $d'\mathbb{Z}$ est un groupe, $P \subset d'\mathbb{Z}$ donc $d\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$ donc $d'|a \wedge b$.
- Soit $\delta \in \mathbb{N}$ tel que $\delta|a$ et $\delta|b$. Pour tout $d' \in \mathbb{Z}$, $d'|a$ et $d'|b$ implique $d'|\delta$.
  Comme $a \wedge b|a$ et $a \wedge b|b$, $a \wedge b|\delta$
  Comme $\delta|a$ et $\delta|b$, $\delta|a \wedge b$.

Donc $|\delta| = |a \wedge b|$.
Donc $\delta = a \wedge b$. ∎

Définition 5.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On appelle plus petit multiple commun à a et b et on note $a \vee b$ l'unique $m \in \mathbb{N}$ tel que $a|m$, $b|m$ et pour tout $m' \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a|m'$ et $b|m'$, on a $m|m'$.

Démonstration.

– Unicité similaire à au-dessus
– On pose $P = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. On vérifie que P est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
  Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $P = m\mathbb{Z}$.
  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ donc $m\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$.
  Donc $a|m$. De même, $b|m$.
– Soit $m' \in \mathbb{Z}$ tel que $a|m'$ et $b|m'$.
  $m'\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$ et $m'\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$ donc $m'\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.
  Donc $m'\mathbb{Z} \subset P$ donc $m'\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ donc $m|m'$. ∎

Remarque 5.2 Pour montrer une égalité, on travaille par double divisibilité.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. $a|b \wedge c$ si et seulement si $a|b$ et $a|c$. $b \vee c|a$ si et seulement si $b|a$ et $c|a$.

Proposition 5.2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.
$a \wedge b = b \wedge a$ et $(ac) \wedge (bc) \mid |c|(a \wedge b)$.

Démonstration.

- $a \wedge b|a$ donc $c(a \wedge b)|ac$.
  $a \wedge b|b$ donc $c(a \wedge b)|bc$.
  Donc $c(a \wedge b)|ac \wedge bc$.
  $c|ac$ et $c|bc$ donc $c|ac \wedge bc$. Donc il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $(ac) \wedge (bc) = rc$.
- On suppose $c \neq 0$. $(ac) \wedge (bc)|ac$ donc $rc|ac$ donc $r|a$. De même, $r|b$ donc $r|a \wedge b$.
  Donc $rc|c(a \wedge b)$.
  C'est-à-dire $(ac) \wedge (bc)|c(a \wedge b)$.
- On en déduit $|c(a \wedge b)| = |(ac) \wedge (bc)|$.
  Enfin, $|c|(a \wedge b) = (ac) \wedge (bc)$.
- Si $c = 0$, $0 \wedge 0 = 0 = 0(a \wedge b)$. ∎

Proposition 5.3 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. $a \vee b = b \vee a$ et $(ac) \vee (bc) = |c|(a \vee b)$.

5.2.2 Entiers premiers entre eux

Définition 5.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a \wedge b = 1$ (à employer à la place de $a \nmid b$).

<u>THÉORÈME 5.3</u> DE BEZOUT *Soit* $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. $a \wedge b = 1$ *si et seulement s'il existe* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $au + bv = 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} a \wedge b = 1 &\text{ ssi } \{ap + bq, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z} \\ &\text{ ssi } 1 \in \{ap + bq, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\} \\ &\text{ ssi il existe } (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } au + bv = 1 \end{aligned}$$ ■

Remarque 5.3 *Soit* $(a, b, d) \in \mathbb{Z}^3$. *Si* $a \wedge b = d$, *alors il existe* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $d = au + bv$ *(la réciproque est fausse).*

Application : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a \wedge b_i = 1$, alors $a \wedge \prod_{i=1}^{n} b_i = 1$.

Démonstration. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $(u_i, v_i) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au_i + b_i v_i = 1$.

Donc $\prod_{i=1}^{n} au_i + b_i v_i = 1$.

Donc il existe $A \in \mathbb{Z}$ tel que $\prod_{i=1}^{n} au_i + b_i v_i = Aa + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} v_i\right)$.

Comme $\left(A, \prod_{i=1}^{n} v_i\right) \in \mathbb{Z}^2$, $a \wedge \prod_{i=1}^{n} b_i = 1$. ■

<u>THÉORÈME 5.4</u> *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ *tel que* $a|bc$ *et* $a \wedge b = 1$. *Alors* $a|c$.

Démonstration. $(ac) \wedge (bc) = |c|(a \wedge b) = |c|$.

Or $a|ac$ et $a|bc$. Donc $a|(ac) \wedge (bc)$ donc $a \mid |c|$, donc $a|c$. ■

Application : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.

Si $b|a$ et $c|a$, et $b \wedge c = 1$, alors $bc|a$ (on peut généraliser à plusieurs facteurs).

Démonstration. Il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $a = db$. Or $c|a$ donc $c|bd$.

Or $c \wedge b = 1$. Donc $c|d$.

Donc il existe $e \in \mathbb{Z}$ tel que $d = ec$. Donc $a = ebc$ donc $bc|a$. ■

Application : Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$ (représentant irréductible de r).

Démonstration.

- Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe $(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{c}{d}$.
  On pose $a = \frac{c}{c \wedge d}$ et $b = \frac{d}{c \wedge d}$.
  Par construction, $r = \frac{a}{b}$. De plus,
  $$\begin{aligned} c \wedge d &= \left(c \wedge d \times \frac{c}{c \wedge d}\right) \wedge \left(c \wedge d \times \frac{d}{c \wedge d}\right) \\ &= (c \wedge d)\left(\left(\frac{c}{c \wedge d}\right) \wedge \left(\frac{d}{c \wedge d}\right)\right) \end{aligned}$$
  Donc $\left(\frac{c}{c \wedge d}\right) \wedge \left(\frac{d}{c \wedge d}\right) = 1$.
  Donc $a \wedge b = 1$.
- Soit $(a, b, a', b') \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^2$ tel que $a \wedge b = 1 = a' \wedge b'$ et $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.
  On note que $a'b = ab'$.
  $b'|a'b$ et $b' \wedge a' = 1$ donc $b'|b$. De même $b|b'$. On a donc $b = b'$.
  De même, $a = a'$. ∎

Application : Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

5.2.3 Algorithme d'Euclide

Lemme 5.4.1
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. $a \wedge b = a \wedge (b + ac)$.

Algorithme : Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a > b$.
Il existe $(q_1, r_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq_1 + r_1$ et $b > r_1 \geqslant 0$.
$a \wedge b = (a - q_1 b) \wedge b = b \wedge r_1$.
Si $r_1 = 0$, $a \wedge b = b$.
Si $r_1 \neq 0$, il existe $(q_2, r_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b = q_2 r_1 + r_2$ et $r_1 > r_2 \geqslant 0$.
On a alors $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$.
Si $r_2 = 0$, $a \wedge b = r_1$, sinon, on recommence.

$a \wedge b$ est donc le dernier reste non nul. De plus, l'algorithme s'arrête toujours car il n'existe pas de suites d'entiers naturels strictement décroissante.

Exemple 5.1

$$\begin{aligned} 1547 &= 2 \times 632 + 283 \\ 632 &= 2 \times 283 + 66 \\ 283 &= 4 \times 66 + 19 \\ 66 &= 3 \times 19 + 9 \\ 19 &= 2 \times 9 + 1 \\ 9 &= 9 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

Donc $1547 \wedge 632 = 1$. On peut alors trouver des coefficients de Bézout :

$$\begin{aligned}
1 &= 19 - 2 \times 9 \\
&= 19 - 2 \times (66 - 3 \times 19) \\
&= -2 \times 66 + 7 \times 19 \\
&= -2 \times 66 + 7 \times (283 - 4 \times 66) \\
&= 7 \times 283 - 30 \times 66 \\
&= 7 \times 283 - 30 \times (632 - 2 \times 283) \\
&= -30 \times 632 + 67 \times 283 \\
&= -30 \times 632 + 67 \times (1547 - 2 \times 632) \\
&= 67 \times 1547 - 164 \times 632
\end{aligned}$$

Donc un couple de Bézout est $(67, -164)$.

Remarque 5.4 *Le lemme permet de remplacer un calcul de PGCD par un calcul plus simple.*

Exemple 5.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
Exprimer $(3a + 7b) \wedge (2a + 5b)$ en fonction de $a \wedge b$.

$$\begin{aligned}
(3a + 7b) \wedge (2a + 5b) &= (3a + 7b - (2a + 5b)) \wedge (2a + 5b) \\
&= (a + 2b) \wedge (2a + 5b) \\
&= (a + 2b) \wedge (2a + 5b - 2 \times (a + 2b)) \\
&= (a + 2b) \wedge b \\
&= a \wedge b
\end{aligned}$$

5.3 Nombres premiers

Définition 5.4 On appelle nombre premier tout entier relatif p distinct de 1 et -1 et dont les seuls diviseurs sont 1, -1, p et $-p$.

Remarque 5.5 *Soit $(a, p) \in \mathbb{Z}^2$ tel que p soit premier. a et p sont premiers entre eux si et seulement si p ne divise pas a.*

Démonstration. On montre $p|a$ ssi $p \wedge a \neq 1$.
Si $p|a$, $p|a \wedge p$ donc $a \wedge p \neq 1$.
Si $p \wedge a \neq 1$, par définition, $a \wedge p|p$ donc $a \wedge p = |p|$ (p premier).
Or $p \wedge a|a$ donc $p|a$. ∎

Application : Soit p un nombre premier, $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $p|a^n$ alors $p|a$.

Démonstration. On suppose que p ne divise pas a.

Alors $a \wedge p = 1$ donc $a^n \wedge p = 1$ donc p ne divise pas a^n. ∎

Exercice : Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On suppose $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Comme $\sqrt{2} > 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}_*^2$ tel que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ et $a \wedge b = 1$.

On note que $a^2 = 2b^2$

$2|2b^2$ donc $2|a^2$. Or 2 est premier donc $2|a$ donc $4|a^2$. Donc $4|2b^2$. Donc $2|b^2$ et $2|b$.

D'où $2|a \wedge b$, c'est-à-dire $2|1$.

Il y a contradiction donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

<u>Théorème 5.5</u> *Tout entier relatif distinct de* 1 *et* -1 *admet un diviseur premier positif.*

Démonstration. Le résultat est trivial pour 0.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

On pose $\mathscr{E} = \{d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, d|n\}$. $n \in \mathscr{E}$ donc $\mathscr{E} \neq \varnothing$.

$\mathscr{E}$ admet donc un plus petit élément noté p.

Par construction, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p|n$. On suppose p non premier.

$p \neq 1$ et $p \neq -1$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p = ab$, $a \neq 1$ et $b \neq 1$.

Comme $a|p$, $a|n$ et $a \in [\![2, p-1]\!]$ donc $a \in \mathscr{E}$. Or $a < p$.

Il y a contradiction donc p est premier. ∎

<u>Théorème 5.6</u> *L'ensemble* $\mathscr{P}^+$ *des nombres premiers positifs est infini.*

Démonstration. On suppose $\mathscr{P}^+$ fini. On sait que $\mathscr{P}^+ \neq \varnothing$.

Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathscr{P}^{+n}$ tel que $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$.

On pose $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. m n'est divisible par aucun élément de $\mathscr{P}^+$.

Donc, comme $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$, m est premier. Or $m \notin \mathscr{P}^+$.

Il y a contradiction donc $\mathscr{P}^+$ est infini. ∎

<u>Théorème 5.7</u> *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}^*$, *il existe un unique* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ *et une unique* $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathscr{P}^+}$ *telle que* $\{p \in \mathbb{P}^+, \alpha(p) \neq 0\}$ *soit fini et* $n = \varepsilon \prod\limits_{p \in \mathscr{P}^+} p^{\alpha(p)}$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose H_n : « il existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathscr{P}^+}$ telle que $\{p \in \mathbb{P}^+, \alpha(p) \neq 0\}$ soit fini et $n = \prod\limits_{p \in \mathscr{P}^+} p^{\alpha(p)}$ ».
  – H_1 est claire.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_1, $H_2, \cdots, H_n$ soient vraies.
  Il existe $p_0 \in \mathscr{P}^+$, diviseur premier positif de $n+1$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = kp_0$.
  Donc $k < n+1$ et H_k est vraie.
  Donc il existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathscr{P}^+}$ telle que $\{p \in \mathbb{P}^+, \alpha(p) \neq 0\}$ soit fini et $k = \displaystyle\prod_{p \in \mathscr{P}^+} p^{\alpha(p)}$.
  Donc $n+1 = p_0 \displaystyle\prod_{p \in \mathscr{P}^+} p^{\alpha(p)}$.
  On définit $\beta \in \mathbb{N}^{\mathscr{P}^+}$ par $\beta|_{\mathscr{P}^+ \setminus \{p_0\}} = \alpha|_{\mathscr{P}^+ \setminus \{p_0\}}$ et $\beta(p_0) = \alpha(p_0) + 1$.
  $\{p \in \mathscr{P}^+, \beta(p) \neq 0\}$ est fini et $n+1 = \displaystyle\prod_{p \in \mathscr{P}^+} p^{\beta(p)}$.
  Donc H_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence assure la partie existence du théorème.

- Soit α et β deux applications de $\mathscr{P}^+$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\{p \in \mathscr{P}^+, \beta(p) \neq 0\}$ et $\{p \in \mathscr{P}^+, \beta(p) \neq 0\}$ soient finis et $\displaystyle\prod_{p \in \mathscr{P}^+} p^{\alpha(p)} = \prod_{p \in \mathscr{P}^+} p^{\beta(p)}$.
  On suppose $\alpha \neq \beta$.
  Il existe $p_0 \in \mathscr{P}^+$ tel que $\alpha(p_0) \neq \beta(p_0)$.
  Sans restreindre la généralité du propos, on suppose $\alpha(p_0) > \beta(p_0)$. On sait que :

$$p_0^{\alpha(p_0)-\beta(p_0)} \times \prod_{p \in \mathscr{P}^+ \setminus \{p_0\}} p^{\alpha(p)} = \prod_{p \in \mathscr{P}^+ \setminus \{p_0\}} p^{\beta(p)}$$

  Donc $p_0 \left| \displaystyle\prod_{p \in \mathscr{P}^+ \setminus \{p_0\}} p^{\beta(p)} \right.$.
  Or, pour tout $p \in \mathscr{P}^+ \setminus \{p_0\}$, $p_0 \wedge p^{\beta(p)} = 1$.
  Donc $p_0 \wedge \displaystyle\prod_{p \in \mathscr{P}^+ \setminus \{p_0\}} p^{\beta(p)} = 1$.
  Or $p_0 > 0$.
  Donc $p_0 = 1$. Il y a donc contradiction (p_0 est premier).
  Donc $\alpha = \beta$. ■

Chapitre 6

Le corps des réels

6.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

6.1.1 Rappels

<u>**Définition 6.1**</u> On admet l'existence d'un corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ tel que :

- pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $x \leqslant y$, on ait $x + z \leqslant y + z$.
- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, on ait $0 \leqslant xy$.

À partir des points admis, on peut démontrer tout ce qu'on sait faire avec $+$, $\times$, $\leqslant$, $-$ et $\div$.

Exemple 6.1 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$ vérifiant $x \leqslant y$. Montrons que $xz \geqslant yz$.

$x \leqslant y$ donc $x + (-x) \leqslant y - x$ donc $0 \leqslant y - x$.

De même, comme $z \leqslant 0$, $-z \geqslant 0$.

Donc $0 \leqslant xz - yz$. Donc $zy + 0 \leqslant xz - zy + zy$.

Donc $yz \leqslant xz$.

Exemple 6.2 Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$. Montrer que $x + z \leqslant y + t$.

$x \leqslant y$ donc $x + z \leqslant y + z$.

$z \leqslant t$ donc $y + z \leqslant y + t$.

Donc $x + z \leqslant y + t$.

<u>**Définition 6.2**</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel $\max\{x, -x\}$.

Proposition 6.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|x| = 0 \text{ ssi } x = 0$$
$$|xy| = |x||y|$$
$$\text{Si } y \neq 0, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$
$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Définition 6.3 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle distance de x à y le réel $|x-y|$.

Montrer que $|x| \leqslant y$ revient à montrer $x \leqslant y$ et $-x \leqslant y$.
Montrer que $|x| \geqslant y$ revient à montrer $x \geqslant y$ ou $-x \geqslant y$.

6.1.2 Bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 6.4 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé borne supérieure de A et se note $\sup(A)$.

Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé borne inférieure de A et se note $\inf(A)$.

Remarque 6.1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On suppose que A admet un plus grand élément. A admet donc une borne supérieure égale à $\max(A)$.

On suppose que A admet une borne supérieure qui appartient à A. Alors $\sup(A) = \max(A)$.

Remarque 6.2 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $a = \sup(A)$*, il faut et il suffit de montrer :*
- *pour tout $x \in A$, $x \leqslant A$.*
- *pour tout $b \in \mathbb{R}$ vérifiant $b < a$, il existe $x \in A$ tel que $x > b$.*

ou :
- *pour tout $x \in A$, $x \leqslant A$.*
- *pour tout $c \in \mathbb{R}$ vérifiant (pour tout $x \in A$ vérifiant $x \leqslant c$), on a $a \leqslant c$.*

Exemple 6.3 Montrons que $1 = \sup([0, 1[)$.
- pour tout $x \in [0, 1[$, $x < 1$.
- pour tout $b \in]-\infty, 1[$, on vérifie que $\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1+b}{2}\right\} \in [0, 1[$ et $\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1+b}{2}\right\} > b$.

Proposition 6.2
- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ admettant a pour borne supérieure et b comme borne inférieure. Alors $a \geqslant b$.

- Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Si A et B admettent une borne supérieure, alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$. De même, si A et B admettent une borne inférieure, alors $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.

Démonstration.
- Il existe $x \in A$ car A est non vide. $\sup(A)$ majore A donc $x \leqslant \sup(A)$. $\inf(A)$ minore A donc $x \geqslant \inf(A)$.
  Finalement, $\inf(A) \leqslant \sup(A)$.
- Soit $x \in A$. Comme $A \subset B$, $x \in B$. Par définition, $x \leqslant \sup(A)$.
  Donc, pour tout $x \in b$, $x \leqslant \sup(A)$. Donc $\sup(A)$ majore B. ■

Remarque 6.3 Soit C une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.
- *Pour montrer que* $\sup(C) \leqslant z$, *il suffit de montrer que pour tout $t \in C$, $t \leqslant z$.*
- *Pour montrer que* $\sup(C) \geqslant z$, *il suffit de montrer qu'il existe $t \in C$ tel que $t \geqslant z$.*
- *Pour montrer que* $\inf(C) \leqslant z$, *il suffit de montrer qu'il existe $t \in C$ tel que $t \leqslant z$.*
- *Pour montrer que* $\inf(C) \geqslant z$, *il suffit de montrer que pour tout $t \in C$, $t \geqslant z$.*

Exercice : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{|x-y|, y \in A\}$ admet une borne inférieure notée $d(x,A)$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x-y|$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $u \in A$. On note que $|x-u| \leqslant |x-y| + |y-u|$.
Or $|x-u| \in \{|x-\theta|, \theta \in A\}$. Donc $|x-u| \geqslant \inf(\{|x-\theta|, \theta \in A\})$.
Donc $d(x,A) \leqslant |x-y| + |y-u|$ donc $d(x,A) - |x-y| \leqslant |y-u|$.
Donc $d(x,A) - |x-y|$ minore $\{|y-\theta|, \theta \in A\}$.
Donc $d(x,A) - |x-y| \leqslant \inf(\{|y-\theta|, \theta \in A\})$.
Donc $d(x,A) - d(y,A) \leqslant |x-y|$.
Finalement, pour tout $(d,y) \in \mathbb{R}$, $d(x,A) - d(y,A) \leqslant |x-y|$.
On déduit le résultat par symétrie.

6.2 Théorème de la borne supérieure

6.2.1 Énoncé

<u>THÉORÈME 6.1</u> *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*

COROLLAIRE 6.1 *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Démonstration. Soit P une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée. On pose $Q = \{-x, x \in P\}$. Q est non vide et majoré. Donc Q admet une borne supérieure. On vérifie que $-\sup(Q) = \inf(P)$. ■

6.2.2 Partie entière d'un réel

Théorème 6.2 *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $q \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [q, q+1[$. q est appelé partie entière de x et noté $E(x)$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

On pose $\mathscr{E} = \{p \in \mathbb{N}, x < p+1\}$.

- – On suppose $\mathscr{E} = \varnothing$, c'est-à-dire pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x \geqslant p+1$, c'est-à-dire que x majore $\mathbb{N}$.
    Or $\mathbb{N} \neq \varnothing$ donc $\mathbb{N}$ est une une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure notée M.
    Soit $p \in \mathbb{N}$. On note que $p+1 \in \mathbb{N}$. Donc $p+1 \leqslant M$ donc $p \leqslant M-1$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M-1$ majore $\mathbb{N}$. Donc il y a contradiction. Donc $\mathscr{E} \neq \varnothing$.
  – Comme $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, $\mathscr{E}$ admet un plus petit élément noté p.
    Par définition, $p \in \mathscr{E}$ et $p-1 \notin \mathscr{E}$. Donc $p \leqslant x < p+1$. Donc $E(x) = p$.
- – Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{Z}^-$, $x \leqslant x < x+1$. Donc $E(x) = x$.
  – Soit $x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$.
    On sait que $-x \in \mathbb{R}^+$ donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $q \leqslant -x < q+1$.
    Comme $x \notin \mathbb{Z}^-$, $x \neq q$ donc $q < -x < q+1$. Donc $(-q-1)+1 > x \geqslant -q-1$ et $-q-1 \in \mathbb{Z}$. Donc $E(x) = -q-1$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(q, q') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $q \leqslant x < q+1$ et $q' \leqslant x < q'+1$.
  On note que $x-1 < q \leqslant x$ et $x-1 < q' \leqslant x$.
  Donc $-x \leqslant -q' < -x+1$. Donc $-1 < q-q' < 1$. Or $q-q' \in \mathbb{Z}$. Donc $q = q'$.
  Il y a donc unicité de la partie entière.

■

Application : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leqslant 10^n a < p+1$. On note que $10^{-n}p \leqslant a < 10^{-n}(p+1)$. Donc a admet une écriture décimale approchée à 10^{-n} près.

Exemple 6.4 Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. Déterminer $E(\sqrt{a^2+5})$.

On note que $a^2 \leqslant a^2+5$ et $a^2+5 < (a+1)^2$.

Comme les nombres sont positifs, $a \leqslant \sqrt{a^2+5} < a+1$.

Or $a \in \mathbb{N}$ donc $E(\sqrt{a^2+5}) = a$.

6.2.3 Notion d'intervalle

<u>Définition 6.5</u> On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in I^2$ vérifiant $x \leqslant y$, $\{z \in \mathbb{R}, x \leqslant z \leqslant y\} \subset I$.

On vérifie qu'un intervalle I est tel que l'une des propositions suivantes est vraie :

- $I = \varnothing$
- $I = \mathbb{R}$
- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I = [a, +\infty[$
- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I =]a, +\infty[$
- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I =]-\infty, a[$
- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I = [-\infty, a]$
- il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a \leqslant b$ tel que $I = [a, b[$
- il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a \leqslant b$ tel que $I = [a, b]$
- il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a \leqslant b$ tel que $I =]a, b]$
- il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a \leqslant b$ tel que $I =]a, b[$

Démonstration pour quelques cas.

- Soit I un intervalle non vide, majoré, non minoré et contenant sa borne supérieure. Montrons que $I =]-\infty, \sup(I)]$.
  Soit $x \in I$. Comme $\sup(I)$ majore I, $x \leqslant \sup(I)$ donc $x \in]-\infty, \sup(I)]$.
  Donc $I \subset]-\infty, \sup(I)]$.
  Soit $x \in]-\infty, \sup(I)]$. $\sup(I) = I$ et $x \leqslant \sup(I)$. Or x ne minore pas I.
  Donc il existe $t \in I$ tel que $t < x$. t et $\sup(I)$ appartiennent à I et $t < x \leqslant \sup(I)$ donc $x \in I$.
  Finalement $I =]-\infty, \sup(I)]$.
- Soit I un intervalle non vide minoré et non majoré ne contenant pas sa borne inférieure. Motrons que $I =]\inf(I), +\infty[$.
  Soit $x \in I$. Comme $\inf(I)$ minore I, $x \geqslant \inf(I)$.
  Comme $\inf(I) \notin I$, $x > \inf(I)$ donc $x \in]-\infty, \sup(I)]$. Donc $I \subset]\inf(I), +\infty[$.
  Soit $x \in]\inf(I), +\infty[$. Comme x ne majore pas I, il existe $t \in I$ tel que $t > x$.
  Comme $x > \inf(I)$, x ne minore pas I donc il existe $z \in I$ tel que $z < x$.
  Comme $(t, z) \in I^2$ et $z < x < t$, $x \in I$.
  Finalement $I =]\inf(I), +\infty[$.

■

Proposition 6.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$.

$$\mathbb{Q} \cap]a, b[\neq \varnothing$$

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]a, b[\neq \varnothing$$

Démonstration. On pose $n = E\left(\frac{3}{b-a}\right)+1$. On note que $n \in \mathbb{N}^*$ et $n(b-a) \geqslant 3$.

On pose $q = \frac{E(nb)-1}{n}$.

- $q \in \mathbb{Q}$
- $E(nb) - 1 < nb$ donc $q < b$
- $E(nb) > nb - 1$ donc $E(nb) - 1 > nb - 2$. Or $nb - 2 > na$ donc $q > a$.

Finalement, $q \in \mathbb{Q} \cap]a, b[$.

En notant que $\{r\sqrt{2}, r \in \mathbb{Q}^*\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on déduit le deuxième résultat du premier. ■

6.3 Droite numérique achevée

Définition 6.6 On appelle droite numérique achevée et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble formé par la réunion de $\mathbb{R}$ et de $\{-\infty, +\infty\}$.

On convient que :

– pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$,

$$\begin{cases} x + (-\infty) = -\infty \\ -\infty + x = -\infty \end{cases}$$

– pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$,

$$\begin{cases} x + (+\infty) = +\infty \\ +\infty + x = +\infty \end{cases}$$

– pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$,

$$\begin{cases} x \times (+\infty) = +\infty \\ +\infty \times x = +\infty \\ x \times (-\infty) = -\infty \\ -\infty \times x = -\infty \end{cases}$$

– pour tout $x \in \mathbb{R}_-^* \cup \{+\infty\}$,

$$\begin{cases} x \times (+\infty) = -\infty \\ +\infty \times x = -\infty \\ x \times (-\infty) = +\infty \\ -\infty \times x = +\infty \end{cases}$$

– pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{cases} x \leqslant +\infty \\ x \geqslant -\infty \end{cases}$$

Chapitre 7

Les complexes

7.1 Présentation

On admet l'existence de l'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérateurs $+$ et $\times$, ainsi que les propriétés de ces opérateurs.

Proposition 7.1 Soit $(a, b, n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}^*$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Cas particuliers usuels :

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Proposition 7.2 On suppose $a \neq 1$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leqslant q$.

$$\sum_{k=p}^{q} a^k = a^p \frac{a^{q-p+1} - 1}{a - 1}$$

<u>Définition 7.1</u> Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$. On définit alors $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$ et on a $a - ib = \overline{z}$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on identifie chaque complexe à un point du plan via la notion d'affixe.

Proposition 7.3 $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$.

Si $z = \overline{z}$, $z \in \mathbb{R}$ et si $z = -\overline{z}$, $z \in i\mathbb{R}$.

7.2 Rappels sur les complexes

7.2.1 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient a, b, a' et b' quatre réels. L'addition et le produit dans $\mathbb{C}$ sont définis par les formules suivantes :

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$$

$$(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(a'b+ab')$$

Ces opérations ont des propriétés analogues à celles dans $\mathbb{R}$. En particulier, chaque complexe admet un opposé et un inverse. On sait de plus :

$$-(a+ib)=(-a)+i(-b)$$

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{(-b)}{a^2+b^2}$$

7.2.2 Conjugaison

<u>Définition 7.2</u> Le conjugué d'un complexe z de partie réelle a et de partie imaginaire b, noté $\overline{z}$, est le complexe $a-ib$.

Proposition 7.4 Soit z et z' deux complexes.

$$\begin{aligned}
&\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}\\
&\overline{-z}=-\overline{z}\\
&\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}\\
&\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}\\
&\overline{\overline{z}}=z\\
&||z|-|z'||\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|
\end{aligned}$$

7.2.3 Module

<u>Définition 7.3</u> Le module d'un complexe z de partie réelle a et de partie imaginaire b, noté $|z|$, est le réel positif $\sqrt{a^2+b^2}$, aussi égal à $\sqrt{z\overline{z}}$. La définition a un sens car pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z\overline{z}=\Re(z)^2+\Im(z)^2$.

Proposition 7.5 Soient z et z' deux complexes.

$$\begin{aligned}
&|z| = 0 \text{ ssi } z = 0\\
&|-z| = |z|\\
&|zz'| = |z||z'|\\
&\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\\
&|\overline{z}| = |z|
\end{aligned}$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 &= |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 - (z + z')(\overline{z} + \overline{z'})\\
&= 2|zz'| + z\overline{z'} + z'\overline{z}\\
&= 2(|z\overline{z'}| - \Re(z\overline{z'}))
\end{aligned}$$

Sachant que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $a \geqslant \Re(a)$, on en déduit que $(|z| + |z'|)^2 \geqslant |z + z'|^2$.

Les nombres étant positifs, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z| + |z'| \geqslant |z + z'|$.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Le point précédent assure que :

$$|(z + z') + (-z')| \leqslant |z + z'| + |-z'|$$

Donc :

$$|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$$

De même,

$$|z'| - |z| \leqslant |z + z'|$$

Donc, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $||z'| - |z|| \leqslant |z + z'|$. ■

7.3 Forme trigonométrique d'un complexe

7.3.1 Écriture trigonométrique

On identifie $\mathbb{C}$ avec le plan usuel via le choix d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note M l'unique point d'affixe z. M est repéré par OM et par une mesure θ de $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$.

On a alors :

$$z = OM\cos\theta + iOM\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

On note :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On a alors l'écriture trigonométrique de z :

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$$

Définition 7.4 Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ tout réel θ vérifiant $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Remarque 7.1 Soit $(r, r', \theta, \theta') \in \mathbb{R}^4$. On a $r\mathrm{e}^{i\theta} = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$ si et seulement si une des trois assertions suivantes est vraie :

$$\begin{aligned}
&r = r' = 0 \\
&r = r' \text{ et } \theta - \theta' \equiv 0 \mod 2\pi \\
&r = -r' \text{ et } \theta - \theta' \equiv \pi \mod 2\pi
\end{aligned}$$

7.3.2 Calcul numérique d'un argument

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On cherche un argument de $a + ib$. Un tel argument θ vérifie $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple 7.1 On pose $z = 2 - i$. $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\tan\theta$ permet de conclure : $\tan\theta < 0$ donc on peut choisir $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

On choisit alors $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0.463$.

7.4 Exponentielle complexe

7.4.1 Définition

Définition 7.5 Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle exponentielle de z et on note e^z le complexe égal à $\mathrm{e}^{\Re(z)}(\cos(\Im(z)) + i\sin(\Im(z)))$.

Remarque 7.2 L'extension de la définition est correcte. Soit $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\underbrace{\mathrm{e}^x}_{complexe} = \mathrm{e}^x(\cos 0 + i\sin 0) = \underbrace{\mathrm{e}^z}_{réelle}$$

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^0(\cos\theta + i\sin\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}$$

Remarque 7.3 L'exponentielle complexe est non nulle.

Exercice : Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver l'ensemble $\mathscr{S}$ des complexes z vérifiant $\mathrm{e}^z = a(1+i)$.

Si $a = 0$, $\mathscr{S} = \varnothing$

Si $a > 0$, soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} e^z = a(1+i) \text{ ssi } & \mathrm{e}^{\Re(z)}\mathrm{e}^{i\Im(z)} = a\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \\ \text{ssi } & \mathrm{e}^{\Re(z)} = a\sqrt{2} \text{ et } \Im(z) \equiv \frac{\pi}{4} \mod 2\pi \\ \text{ssi } & \Re(z) = \ln(a\sqrt{2}) \text{ et } \Im(z) \equiv \frac{\pi}{4} \mod 2\pi \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{\ln(a\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Si $a < 0$, $\mathscr{S} = \left\{\ln(-a\sqrt{2}) + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7.4.2 Propriétés

Proposition 7.6 Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$, $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = e^{-z}$, $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

Démonstration.

- Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \end{aligned}$$

  Donc, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$.
  Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} &= \mathrm{e}^{\Re(z)}\mathrm{e}^{i\Im(z)}\mathrm{e}^{\Re(z')}\mathrm{e}^{i\Im(z')} \\ &= \mathrm{e}^{\Re(z)+\Re(z')}\mathrm{e}^{i(\Im(z)+\Im(z'))} \\ &= \mathrm{e}^{\Re(z+z')}\mathrm{e}^{i(\Im(z+z'))} \\ &= \mathrm{e}^{z+z'} \end{aligned}$$

  Donc pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.
  Le résultat précédent assure que $\mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z}$ donc $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{e}^z} &= \overline{\mathrm{e}^{\Re(z)}(\cos(\Im(z)) + i\sin(\Im(z)))} \\ &= \mathrm{e}^{\Re(z)}(\cos(\Im(z)) - i\sin(\Im(z))) \\ &= \mathrm{e}^{\Re(z)}(\cos(-\Im(z)) + i\sin(-\Im(z))) \\ &= \mathrm{e}^{\Re(z)-i\Im(z)} \\ &= \mathrm{e}^{\overline{z}} \end{aligned}$$

■

Remarque 7.4

- *Pour tout* $(p, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, $(e^z)^p = e^{pz}$.
- *Les formes trigonométriques sont adaptées à la multiplication, la division et aux puissances. On peut manipuler l'addition et la soustractions seulement dans des cas particuliers :*
  Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

Attention, ce n'est pas une forme trigonométrique en général.
De même, $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta'} = 2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.

7.4.3 Étude de formes trigonométriques

Formule de Moivre : pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $(e^{it})^n = \mathrm{e}^{int}$.

Formule d'Euler : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t = \frac{e^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}$ et $\sin t = \frac{e^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}$.

Exemple 7.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos(4x)$.

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \Re(\mathrm{e}^{4ix}) \\
&= \Re((\mathrm{e}^{ix})^4) \\
&= \Re((\cos(x) + i\sin(x))^4) \\
&= \Re(\cos^4(x) + 4i\sin(x)\cos^3(x) + 6(i\sin(x))^2\cos^2(x) \\
&\qquad + 4(i\sin(x))^3\cos(x) + (i\sin x)^4) \\
&= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)
\end{aligned}$$

Exemple 7.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)$.

$$\begin{aligned}
\sin^3(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= -\left(\frac{e^{3ix} - 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-3ix}}{8i}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{-2ix} + 2}{4}\right) \\
&= -\frac{e^{5ix} - \mathrm{e}^{-5ix} - \mathrm{e}^{3ix} + e^{-3ix} - 2\mathrm{e}^{ix} + 2\mathrm{e}^{-ix}}{32i} \\
&= -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{\sin(t)}{8}
\end{aligned}$$

7.5 Racines n-ièmes d'un complexe

7.5.1 Définition et expression

Définition 7.6 Soit $(z,n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$. On appelle racine n-ième de z tout complexe z' tel que $(z')^n = z$.

Remarque 7.5
- *Les racines unièmes n'ont pas d'intérêt.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 0 a une unique racine n-ième, égale à 0.*

THÉORÈME 7.1 *Soit $(n,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}^*$. Le complexe z admet exactement n racines n-ièmes. On note θ un argument de z. L'ensemble des racines n-ièmes de z est :*

$$\left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

Démonstration.
- Soit $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$. On appelle θ un argument de z et θ' un argument de z'.

$$\begin{aligned}(z')^n = z \text{ ssi } & (|z'|e^{i\theta'})^n = |z|e^{i\theta} \\ \text{ssi } & |z'|^n e^{in\theta'} = |z|^{i\theta} \\ \text{ssi } & |z'|^n = |z| \text{ et } n\theta' \equiv \theta \mod 2\pi \\ \text{ssi } & |z'| = |z|^{\frac{1}{n}} \text{ et } \theta' \equiv \theta \mod \frac{2\pi}{n}\end{aligned}$$

  On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des racines n-ièmes de z.

$$\mathscr{S} \cap \mathbb{C}^* = \left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

  Or 0 n'est pas une racine n-ième de z donc :

$$\mathscr{S} = \left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- On pose $\mathscr{A} = \left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
  Par construction $\mathscr{A} \subset \mathscr{S}$.
  Soit $z' \in \mathbb{C}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z' = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$.
  Il existe $(q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, n-1]\!]$ tel que $k = qn + r$.

$$\begin{aligned}z' &= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2(qn+r)\pi}{n})} \\ &= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2r\pi}{n}+2q\pi)} \\ &= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2r\pi}{n})} \times 1^q\end{aligned}$$

Donc $z' \in \mathscr{A}$. Donc $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$.
Finalement, $\mathscr{S} = \mathscr{A}$.

- Montrons que $\mathscr{S}$ contient exactement n éléments.
Soit $(p, q) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tels que $|z|^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2p\pi}{n}} = |z|^1 n\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2q\pi}{n}}$.
Par construction, $\frac{\theta}{n} + \frac{2p\pi}{n} \equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2q\pi}{n}[2\pi]$ Donc $p - q \equiv 0[n]$.
Or $n-1 \geqslant p \geqslant 0$ et $1-n \leqslant -q \leqslant 0$ donc $1-n \leqslant p-q \leqslant n-1$.
Donc $p = q$. On peut alors conclure. ∎

Remarque 7.6 Ce théorème donne une méthode pratique de calcul des racines n-ièmes d'un complexe.

Remarque 7.7 Notons α une racine n-ième de -1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on a $a^n + b^n = a^n - (\alpha b)^n$.

<u>Définition 7.7</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de de l'unité toute racine n-ième de 1. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Remarque 7.8

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ *et* $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$.
- *j est défini par $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Il est tel que $j^2 = \overline{j}$ et $j^2 + j + 1 = 0$.*
- *Pour calculer toutes les racines n-ièmes d'un nombre, il suffit d'en calculer une et de la multiplier successivement par toutes les racines n-ièmes de l'unité.*

Proposition 7.7 Soit $(A, B, n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$. $A^n = B^n$ ssi il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $A = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} B$.

Démonstration. On suppose $B \neq 0$.

$$A^n = B^n \text{ ssi } \left(\frac{A}{B}\right)^n = 1 \text{ ssi } \frac{A}{B} \in \mathbb{U}_n$$

On suppose $B = 0$. On a $A^n = 0$. Or 0 est la seule racine n-ième de 0 donc $A = 0$. L'équivalence est donc vraie. ∎

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre (E) : $(z+1)^n = (z-1)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E) &\text{ ssi il existe } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z + 1 = (z-1)\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} && (1) \\ &\text{ ssi il existe } k \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } z + 1 = (z-1)\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} && (2) \end{aligned}$$

Si (2) est vraie, (1) est vraie.
Supposons (1) vraie et $k = 0$. On a $z + 1 = z - 1$ et $1 = -1$. Donc $k \neq 0$.
On a donc $k \in [\![1, n-1]\!]$. Donc (2) est vraie.

$$\begin{aligned}(z+1)^n=(z-1)^n &\text{ ssi il existe } k\in[\![1,n-1]\!] \text{ tel que } z+1=(z-1)\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\text{ ssi il existe } k\in[\![1,n-1]\!] \text{ tel que } z=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}\\ &\text{ ssi il existe } k\in[\![1,n-1]\!] \text{ tel que } z=\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)},\quad k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$$

7.5.2 Extraction des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique

Soit $z\in\mathbb{C}$. Il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z=a+ib$. Il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha+i\beta$ soit une racine carrée de z.

Par définition, $(\alpha+i\beta)^2=z$ donc $\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i=a+ib$ donc $a=\alpha^2-\beta^2$ (1) et $2\alpha\beta=b$ (2).

On sait de plus que $|\alpha+i\beta|^2=|z|$ donc $\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a^2+b^2}$ (3).

De (1) et (3), on tire α^2 et β^2.

De (2), on tire la signe de $\alpha\beta$. On en déduit les deux racines de z.

Exemple 7.4 On cherche les racines carrées de $3-4i$. Il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(\alpha+i\beta)^2=3-4i$.

On a alors :

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=3\\ \alpha\beta=-2\\ \alpha^2+\beta^2=5\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases}\alpha^2=4\\ \alpha\beta<0\\ \beta^2=1\end{cases}$$

Donc $2-i$ et $-2+i$ sont les racines carrées de $3-4i$.

7.5.3 Équation du second degré

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^2$.

On considère l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 \text{ ssi } & z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \\ \text{ssi } & \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \\ \text{ssi } & \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

  Le complexe b^2-4ac est appelé discriminant de (E), noté Δ Dans ce chapitre. On appelle δ une racine carrée de Δ. On a alors :

$$az^2+bz+c=0 \text{ ssi } \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$

  Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{-b-\delta}{2a},\frac{-b+\delta}{2a}\right\}$.
  L'équation a une seule racine double si $\delta=0$ ssi $\Delta=0$.
  L'équation au deux racines simples si $\delta\neq 0$ ssi $\Delta\neq 0$.
- On note (z_0,z_1) les solutions de (E). Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(z-z_0)(z-z_1)=z^2-(z_0+z_1)z+z_0z_1$$

  Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2+bz+c=a(z-z_0)(z-z_1)=az^2+a(z_0+z_1)z+az_0z_1$$

  On en déduit les relations :

$$(R):\begin{cases} z_0+z_1=-\dfrac{b}{a} \\ z_0z_1=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

  Les solutions de (E) vérifient les relations (R). Réciproquement, deux complexes z_0 et z_1 vérifiant (R) sont les solutions de (E).

Chapitre 8

Géométrie plane

On travaille dans un plan affine euclidien P. L'ensemble des vecteurs construits à partir de P est noté $\overrightarrow{P}$.

Soit $(a, \overrightarrow{u}) \in P \times \overrightarrow{P}$. On note $a + \overrightarrow{u}$ l'unique point b tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$.

8.1 Repérage d'un point dans le plan

8.1.1 Repère cartésien

Définition 8.1 Un couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de vecteurs de $\overrightarrow{P}$ est appelé base de $\overrightarrow{P}$ si et seulement pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j}$.

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $\overrightarrow{P}$. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$. L'unique couple (λ, μ) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j}$ s'appelle coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit $O \in P$. Le triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est appelé repère cartésien de P.

Soit $m \in P$. Les coordonnées de $\overrightarrow{Om}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont appelées coordonnées de m dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Une équation cartésienne d'une partie Q de P dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une condition nécessaire et suffisante sur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour que le point de coordonnées (x, y) appartienne à Q.

Définition 8.2 Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. On appelle (u_1, u_2) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et (v_1, v_2) celles de $\overrightarrow{v}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\overrightarrow{P}$
ssi $\forall \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{P}, \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$
ssi $\forall (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(w_1, w_2) = x(u_1, u_2) + y(v_1, v_2)$
ssi $\forall (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(S) : \begin{cases} w_1 = xu_1 + y + v_1 \\ w_2 = xu_2 + yv_2 \end{cases}$
ssi $\forall (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \det(S) \neq 0$
ssi $(0,0)$ est la seule solution du sytème homogène associé à (S)
ssi $(0,0)$ est la seule solution de $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
ssi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires

Définition 8.3 On associe à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un réel appelé déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, noté $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, égal à $u_1v_2 - u_2v_1$.

THÉORÈME 8.1 *Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *est une base de* $\overrightarrow{P}$

(ii) $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ne sont pas colinéaires*

(iii) $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$

Exercice : On pose $a = o + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

1. Montrer que $(a, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère de P noté R'.

$$\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Ce déterminant étant non nul, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\overrightarrow{P}$ et $(a, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère de P.

2. Soit Q la partie de P dont une équation cartésienne dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $2x - 3y = 7$. Déterminer une équation cartésienne de Q dans R'.
Soit $m \in P$ de coordonnées (x,y) dans R'.

$$\begin{aligned} m &= a + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} \\ &= o + \overrightarrow{j} + x(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + y(-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \\ &= o + (2x - y)\overrightarrow{i} + (x - y + 1)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \in Q &\text{ ssi } 2(2x-y) - 3(x+y-1) = 7 \\ &\text{ ssi } 4x - 2y - 3x + 3y - 3 = 7 \\ &\text{ ssi } x + y = 10 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de Q dans R' est $x + y = 10$.

8.1.2 Orientation du plan

<u>Théorème 8.2</u> *Soit* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

Démonstration. On note (u_1, u_2) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (v_1, v_2) celles de $\overrightarrow{v}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = -(u_2 v_1 - u_1 v_2) = -\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \qquad \blacksquare$$

Proposition 8.1 Pour orienter le plan, on choisit une base dont ont décide qu'elle est directe. Pour toute base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est directe si et seulement si $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) > 0$ et indirecte si et seulement si $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) < 0$.

On admet toutes les propriétés naturelles de l'orientation.

8.1.3 Repérage polaire du plan

On fixe un repère polaire, c'est-à-dire un couple formé d'un point et d'un vecteur non nul unitaire, appelé $(O, \overrightarrow{i})$. On impose au plan d'être orienté.

<u>**Définition 8.4**</u> On appelle $\overrightarrow{j}$ l'unique vecteur de $\overrightarrow{P}$ tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ soit une base orthonormée directe.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\overrightarrow{u}(\theta)$ l'unique vecteur tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}(\theta)}) \equiv \theta \mod 2\pi$. On remarque que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j}$.

Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Le point m de P dont un système de coordonnées polaires est (r, θ) est le point $m = o + r\overrightarrow{u}(\theta)$.

Proposition 8.2 Si $r = 0$, l'ensemble des représentations polaires de m est $\{(0, \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}\}$.

Si $r \neq 0$, l'ensemble des représentations polaires de m est $\{((-1)^p r, \theta + p\pi), \quad p \in \mathbb{Z}\}$.

Les coordonnées cartésiennes de m dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Un système de coordonnées polaires de m dans $(O, \overrightarrow{i})$ est $(\sqrt{x^2+y^2}, \theta)$, où θ vérifie :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

avec (x,y) les coordonnées de m dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(x,y) \neq (0,0)$.

Définition 8.5 Soit I un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à la partie Q de P formée des points de P dont un système de coordonnées polaires (r,θ) vérifie $\theta \in I$ et $r = f(\theta)$. Q admet pour équation polaire $r = f(\theta)$, $\theta \in I$ (écriture formelle).

Remarque 8.1 *Soit $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle m le point dont un système de coordonnées polaires est (r_0, θ_0) et Q la partie de P dont une équation est $r = f(\theta)$, $\theta \in I$.*

- *si $r_0 = 0$ et si f s'annule, $m \in Q$*
- *si $r_0 = 0$ et si f ne s'annule pas, $m \notin Q$*
- *si $r_0 \neq 0$, et s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_0 + p\pi \in I$ et $(-1)^p r_0 = f(\theta_0 + p\pi)$, alors $m \in Q$.*
- *sinon, $m \notin Q$.*

Exemple 8.1 On considère une partie Q de P dont une équation polaire est $r = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et m un point de P dont un système de coordonnées polaires est $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Est-ce que $m \in Q$?

$\left(-\frac{1}{2}, 2\pi\right)$ est un autre système de coordonnées polaires de m et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Donc $m \in Q$.

Exemple 8.2 On reprend la question avec $Q : r = 2\cos\theta + \sin\theta$ et $m : (0, \pi)$.

$\theta \mapsto 2\cos\theta + \sin\theta$ s'annule donc $m \in Q$.

8.2 Identification de P dans $\mathbb{C}$

8.2.1 Présentation

On suppose que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est orthonormé direct.

À chaque point m de P de coordonnées (x,y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on associe le complexe $x + iy$ appelé affixe de m.

À chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ de P de coordonnées (x,y) dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on associe le complexe $x + iy$ appelé affixe de $\overrightarrow{u}$.

<u>Théorème 8.3</u> *Soit* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\})^2$. *On note* z *l'affixe de* $\overrightarrow{u}$ *et* z' *celle de* $\overrightarrow{v}$.

$$\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z'\overline{z}) \mod 2\pi$$

8.2.2 Représentation analytique complexe d'applications de P dans P

<u>Définition 8.6</u> Soit f une application de P dans P.

On appelle représentation analytique complexe de f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à un complexe z associe l'affixe de l'image par f du point d'affixe z.

Exemple 8.3 Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ d'affixe a. On note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. La représentation analytique complexe de $t_{\overrightarrow{u}}$ est :

$$\widetilde{t_{\overrightarrow{u}}} : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+a \end{cases}$$

Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{C}$,

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+a \end{cases}$$

représente la translation de vecteur d'affixe a.

Exemple 8.4 Soit $(A, \lambda) \in P \times \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. On appelle $h_{A,\lambda}$ l'homothétie de centre A et de rapport λ. Par définition,

$$h_{A,\lambda} : \begin{cases} P & \to & P \\ M & \mapsto & A + \lambda\overrightarrow{AM} \end{cases}$$

On note a l'affixe de A. La représentation analytique complexe de $h_{A,\lambda}$ est :

$$\widetilde{h}_{A,\lambda} : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a + \lambda(z-a) \end{cases}$$

Réciproquement, pour tout $(\lambda, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$, l'application dont la représentation analytique complexe est $z \mapsto \lambda z + c$ est une homothétie de rapport λ et de centre d'affixe $\frac{c}{1-\lambda}$.

Exemple 8.5 Soit $(A, \theta) \in P \times \mathbb{R}$. On appelle $r_{A,\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ.

On note a l'affixe de A. La représentation analytique complexe de $r_{A,\theta}$ est :

$$\widetilde{r}_{A,\lambda} : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a + \mathrm{e}^{i\theta}(z-a) \end{cases}$$

Réciproquement, pour tout $(u, c) \in \mathbb{U} \setminus \{1\} \times \mathbb{C}$, l'application dont la représentation analytique complexe est $z \mapsto uz + c$ est une rotation dont une mesure de l'angle est un argument de u et dont le centre a pour affixe $\frac{c}{1-u}$.

Une similitude directe est une composée de rotations, homothéties et translations. L'ensemble des représentations analytiques complexes de telles applications est :

$$\left\{ f : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az + b \end{cases}, \quad (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \right\}$$

8.3 Outils géométriques

8.3.1 Produit scalaire

Définition 8.7 Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on note $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le réel égal à 0 si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et égal à $\|u\| \, \|v\| \cos(\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}))$ dans le cas contraire.

Théorème 8.4 *Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.*

Démonstration. On suppose $\overrightarrow{u} \neq 0$ et $\overrightarrow{v} \neq 0$.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \text{ ssi } \cos(\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})) = 0 \text{ ssi } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \frac{pi}{2}$$

On suppose $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\overrightarrow{v} = 0$. On a $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Donc $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ ssi $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

On suppose $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\})^2$. On appelle z l'affixe de $\overrightarrow{u}$ et z' celle de $\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= \|u\| \, \|v\| \cos(\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})) \\ &= |z||z'| \cos(\arg(z'\overline{z})) \\ &= |\overline{z}||z'| \cos(\arg(z'\overline{z})) \\ &= \Re(z'\overline{z}) \end{aligned}$$

Finalement, la formule reste valable pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Donc $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \Re(z'\overline{z})$.

On note (u_1, u_2) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et (v_1, v_2) celles de $\overrightarrow{v}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On a alors $z = u_1 + iu_2$ et $z' = v_1 + iv_2$.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \Re(z'\overline{z}) = \Re(u_1v_1 + u_2v_2 + i(u_1v_2 - u_2v_1)) = u_1v_1 + u_2v_2$$ ■

Proposition 8.3

- Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$.
- Pour tout $(\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R} \times \overrightarrow{P}^2$, $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle$.
- Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{P}^2$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$ et $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$.

Application : Soit $(a, \overrightarrow{u}) \in P \times \overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. On pose $D = a + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. Soit $m \in P$. On appelle p la projection orthogonale de m sur D.

$$p = a + \frac{\langle \overrightarrow{am}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|u\|^2} \times \overrightarrow{u}$$

Démonstration. $p \in D$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p = a + \lambda\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{ap}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \text{ ssi } & \langle \overrightarrow{am} + \overrightarrow{mp}, \overrightarrow{u} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \\ & \text{donc } \langle \overrightarrow{am}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{mp}\overrightarrow{u} \rangle = \lambda \|u\|^2 \\ & \text{donc } \lambda = \frac{\langle \overrightarrow{am}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|u\|^2}\end{aligned}$$

Donc $p = a + \frac{\langle \overrightarrow{am}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|u\|^2}\overrightarrow{u}$. ■

8.3.2 Produit mixte

<u>**Définition 8.8**</u> Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. On appelle produit mixte de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ et on note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ le réel égal à 0 si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et égal à $\|u\| \|v\| \sin(\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}))$ dans le cas contraire.

<u>Théorème 8.5</u> *Soit* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$.

Démonstration. On suppose $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\})^2$. On appelle z l'affixe de $\overrightarrow{u}$ et z' celle de $\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] &= \|u\|\,\|v\| \sin(\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})) \\ &= |z||z'| \sin(\arg(z'\overline{z})) \\ &= |\overline{z}||z'| \sin(\arg(z'\overline{z})) \\ &= \Im(z'\overline{z})\end{aligned}$$

Finalement, la formule reste valable pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Donc $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \Im(z'\overline{z})$.

On note (u_1, u_2) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et (v_1, v_2) celles de $\overrightarrow{v}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On a alors $z = u_1 + iu_2$ et $z' = v_1 + iv_2$.

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \Im(z'\overline{z}) = \Im(u_1v_1 + u_2v_2 + i(u_1v_2 - u_2v_1)) = u_1v_2 - u_2v_1 \qquad \blacksquare$$

Proposition 8.4

- Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$.
- Pour tout $(\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R} \times \overrightarrow{P}^2$, $[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}]$.
- Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{P}^2$, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$ et $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

8.3.3 Un exercice corrigé

On suppose $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ unitaire. On note $\theta = \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}})$.

Soit $a \in P$ d'affixe z_0. On pose $D = a + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

Trouver l'expression de l'expression analytique complexe de la réflexion s par rapport à D.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note m le point d'affixe z et $n = s(m)$.

Par construction, $\overrightarrow{mn} \perp \overrightarrow{u}$ et le milieu g de $[mn]$ vérifie $\overrightarrow{ag}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\langle\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{u}\rangle = 0$ et $[\overrightarrow{ag}, \overrightarrow{u}] = 0$.

Donc, en notant z' l'affixe de n,

$$\begin{cases} (\overline{z' - z})\mathrm{e}^{i\theta} + (z' - z)\mathrm{e}^{-i\theta} = 0 \\ \left(\overline{\dfrac{z + z'}{2}} - z_0\right)\mathrm{e}^{i\theta} - \left(\dfrac{z + z'}{2} - z_0\right)\mathrm{e}^{-i\theta} = 0 \end{cases}$$

Donc $z' = z_0 + (\overline{z - z_0})\mathrm{e}^{2i\theta}$.

La représentation analytique complexe de s est donc :

$$\widetilde{s} : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (\overline{z - z_0})\mathrm{e}^{2i\theta} \end{cases}$$

Donc :

$$s : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \mathrm{e}^{2i\theta}(\overline{z - a}) + a \end{cases}$$

8.4 Étude des droites du plan

8.4.1 Description d'une droite dans un repère quelconque

Définition 8.9 On appelle droite du plan toute partie D de P telle qu'il existe $(a, \overrightarrow{u}) \in P \times (\overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\})$ vérifiant $D = \{a + \lambda\overrightarrow{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\overrightarrow{u}$ est appelé un vecteur directeur de D et l'ensemble $\{\lambda\overrightarrow{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$, noté $\overrightarrow{D}$ est appelé direction de D (partie de $\overrightarrow{P}$).

Proposition 8.5 Soit $a \in P$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. On note D la droite $a + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$, (x_0, y_0) les coordonnées de a dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (α, β) celles de $\overrightarrow{u}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit $m \in P$ dont on note (x, y) les coordonnées.

$$\begin{aligned} m \in D &\text{ ssi il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } m = a + t\overrightarrow{u} \\ &\text{ ssi il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 8.10 On dit que

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un système d'équations paramétriques de D.

Proposition 8.6 Soit $m \in P$ dont on note (x, y) les coordonnées.

$$\begin{aligned} m \in D &\text{ ssi il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } m = a + t\overrightarrow{u} \\ &\text{ ssi il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{am} = t\overrightarrow{u} \\ &\text{ ssi } \overrightarrow{am} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\text{ ssi } \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{am}) = 0 \\ &\text{ ssi } \alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0) = 0 \\ &\text{ ssi } \beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0 \end{aligned}$$

Finalement, une équation cartésienne de D est $\beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0$.

Proposition 8.7 On en déduit que pour toute droite D, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $ax + by + c = 0$ soit une équation de cartésienne de D.

Réciproquement, on peut montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, la partie du plan dont une équation cartésienne est $ax+by+c = 0$ est une droite dirigée par $-b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$.

On admet que deux équations cartésiennes de droites représentent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles.

Remarque 8.2 Quand on connaît une équation cartésienne de D, celle de $\overrightarrow{D}$ est obtenue en enlevant les constantes.

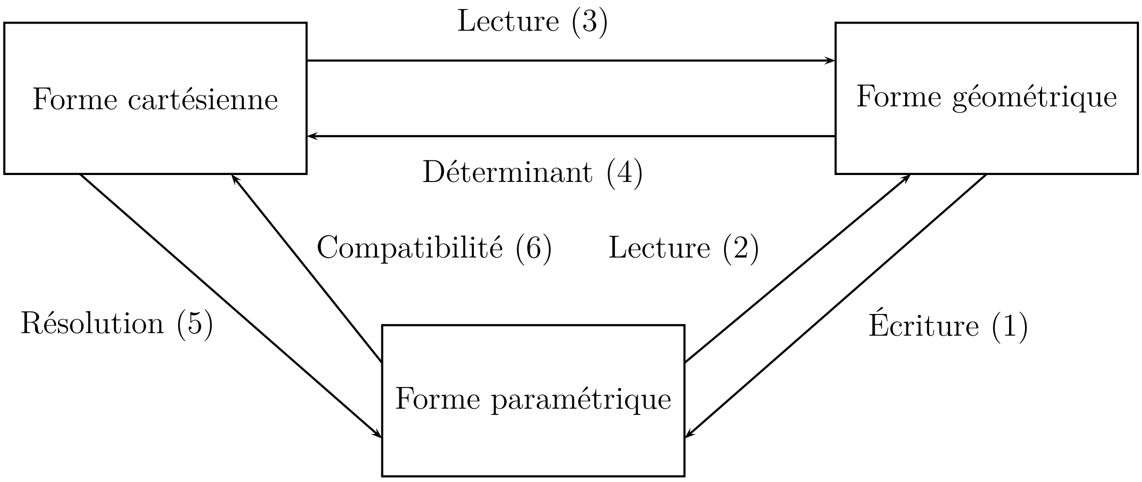


FIGURE 8.1 – Passages entres les formes

$$(1) : \begin{cases} x = x_A + t x_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + t y_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$$

(2) : On lit sur le système précédent (x_A, y_A) et $(x_{\overrightarrow{u}}, y_{\overrightarrow{u}})$.

$$(3) : x_{\overrightarrow{u}} = -b \quad y_{\overrightarrow{u}} = a$$

Si $b \neq 0$, on peut choisir $x_A = 0$ et $y_A = -\frac{c}{b}$.
Sinon, on peut choisir $y_A = 0$ et $x_A = -\frac{c}{a}$
(4) : voir ci-dessus.

$$(5) : ax + by + c = 0 \text{ ssi } (x, y) = \left(-\frac{c + bt}{a}, t\right), t \in \mathbb{R}$$

(6) : recherche de la condition de compatibilité du système d'équations paramétriques.

<u>THÉORÈME 8.6</u> *Soit $a \in P$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. On pose :*

$$\varphi : \begin{cases} P & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \det\limits_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{am}) \end{cases}$$

- *Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\{m \in P, \varphi(m) = k\}$ (ligne de niveau k de φ) est une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$.*
- *Pour toute droite D dirigée par $\overrightarrow{u}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $D = \{m \in P, \varphi(m) = k\}$.*

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{R}$.
  On appelle (x_0, y_0) les coordonnées de a dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (α, β) celles de $\overrightarrow{u}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
  Soit $m \in P$ de coordonnées (x, y).

  $$\varphi(m) = k \text{ ssi } \det\limits_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{am}) \text{ ssi } \beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 - k = 0$$

  Donc $\{m \in P, \varphi(m) = k\}$ est une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$.
- Soit D la droite dirigée par $\overrightarrow{u}$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que une équation cartésienne de D soit $\beta x - \alpha y + c = 0$.
  On pose $k = \alpha y_0 - \beta x_0 - c$. Soit $m \in P$ de coordonnées (x, y).

  $$\varphi(m) = k \text{ ssi } m \in D$$

  D est donc la ligne de niveau $\alpha y_0 - \beta x_0 - c$ de φ. ∎

<u>Définition 8.11</u> Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même direction.

<u>THÉORÈME 8.7</u> *Soit (D_1, D_2) deux droites. Il existe $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ et $D_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$.*

Il existe $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$ et $D_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

$$D_1 \mathbin{/\!/} D_2 \text{ ssi } a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

8.4.2 Étude quand le repère d'étude est orthonormé direct

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et $a \in P$. On note (α, β) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (x_0, y_0) celles de a dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit $m \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\overrightarrow{am} \perp \overrightarrow{u} \text{ ssi } \langle \overrightarrow{am}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \text{ ssi } \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

Donc $\{m \in P, \langle \overrightarrow{am}, \overrightarrow{u} \rangle = 0\}$ est une droite.

<u>THÉORÈME 8.8</u> *On pose :*

$$\psi : \begin{cases} P & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \langle \overrightarrow{am}, \overrightarrow{u} \rangle \end{cases}$$

- *Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\{m \in P, \psi(m) = k\}$ est une droite dont $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal.*
- *Pour toute droite D dont un vecteur normal est $\overrightarrow{u}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que D soit $\{m \in P, \varphi(m) = k\}$.*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. On note D la droite dont une équation cartésienne dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $ax + by + c = 0$.

<u>Définition 8.12</u> Si $a^2+b^2 = 1$, on dit que l'équation manipulée est normale.

On suppose à présent qu'on manipule une équation normale. Le vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, orthogonal à D, est unitaire.

Proposition 8.8 Il existe $(\theta_0, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $r\cos(\theta - \theta_0) + c = 0$ décrive D.

Réciproquement, pour tout $(\theta_0, c) \in \mathbb{R}^2$, l'équation polaire $r\cos(\theta - \theta_0) + c = 0$ décrit une droite dont un vecteur normal est $\overrightarrow{u}(\theta_0)$, qu'on sait trouver.

Démonstration. Il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta_0$ et $b = \sin\theta_0$.

Notons p le projeté orthogonal de O sur D. On note (x_p, y_p) les coordonnées de p dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Comme $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{op}$ sont colinéaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{op} = \lambda\overrightarrow{u}$.

En particulier, $\langle \overrightarrow{op}, \overrightarrow{u} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle$, c'est-à-dire $\lambda = ax_p + by_p$.

Or $p \in D$, donc $\lambda = -c$. Donc $\overrightarrow{op} = -c\overrightarrow{u}$.

On travaille dans un repère polaire $(O, \overrightarrow{i})$. Soit $m \in P$.

$$\begin{aligned} m \in D & \text{ ssi il existe } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ représentant de } m \text{ tel que } ar\cos\theta + br\sin\theta + c = 0 \\ & \text{ ssi il existe } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ représentant de } m \text{ tel que } r\cos\theta\cos\theta_0 + r\sin\theta_0\sin\theta + c = 0 \\ & \text{ ssi il existe } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ représentant de } m \text{ tel que } r\cos(\theta - \theta_0) + c = 0 \end{aligned}$$

Donc une équation polaire de D est $r\cos(\theta - \theta_0) + c = 0$. ∎

8.4.3 Distance d'un point à une droite

Définition 8.13 Soit D une droite, $m \in P$. L'ensemble $\{mn, n \in D\}$ admet un plus petit élément appelé distance de m à D et usuellement noté $d(m, D)$.

Démonstration. On appelle p le projeté orthogonal de m dur D.

Soit $n \in D$. $mn^2 = mp^2 + pn^2$. Comme $pn^2 \geqslant 0$, pour tout $n \in D$, $mn^2 \geqslant mp^2$.

$mp \in \{mn, n \in D\}$ et est plus petit que tous les autres éléments de cet ensemble, donc le plus petit élément de $\{mn, n \in D\}$ existe.

Par définition, de $d(m, D)$, on a $d(m, D) = mp$. ∎

Remarque 8.3 *Pour tout $n \in D$, $d(m, D) = mn$ si et seulement si $n = p$.*

Démonstration. Soit $n \in D$.

$$d(m, D) = mn \text{ ssi } mp = mn \text{ ssi } mp^2 = mn^2 \text{ ssi } pn^2 = 0 \text{ ssi } p = n$$ ∎

<u>Théorème 8.9</u> *On suppose $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthogonal. Soit $m \in P$ de coordonnées (x_0, y_0) dans ce repère. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $D : ax + by + c = 0$.*

$$d(m, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration. On note (x_p, y_p) les coordonnées de p, projeté de m sur D. Soit $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, un vecteur orthogonal à D.

$\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{mp}$ donc $|\langle\overrightarrow{mp}, \overrightarrow{u}\rangle| = \|mp\| \, \|u\|$.

Donc :

$$d(m, D) = \frac{|\langle\overrightarrow{mp}, \overrightarrow{u}\rangle|}{\|u\|}$$

Or :

$$\begin{aligned} |\langle\overrightarrow{mp}, \overrightarrow{u}\rangle| &= |a(x_0 - x_p) + b(y_0 - y_p)| \\ &= |ax_0 - ax_p + by_0 - by_p| \\ &= |ax_0 + by_0 + c| \end{aligned}$$

Donc $d(m, D) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ∎

8.4.4 Angles de droites

Définition 8.14 Soit (D, D') deux droites. Il existe un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D et $\overrightarrow{v}$ de D'. On appelle mesure de l'angle orienté de droites $(\widehat{D, D'})$ et on note mes$(\widehat{D, D'})$ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ calculée modulo π.

Exercice : On suppose $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct.

Soit D_1 une droite dont une équation cartésienne est $2x - y + 1 = 0$ et D_2 une droite dont une équation cartésienne est $x + 3y - 2 = 0$. Déterminer une mesure de $(\widehat{D_1, D_2})$.

$\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ dirige D_1 et $-3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ dirige D_2.

$$\tan(\text{mes}(\widehat{D_1, D_2})) = \frac{[\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}, -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}]}{\langle \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}, -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \rangle} = 7$$

8.5 Étude des cercles

8.5.1 Repérage cartésien d'un cercle

On suppose $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé.

Définition 8.15 Soit $\omega \in P$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre ω et de rayon r $(\{m \in P, \omega m = r\})$.

Proposition 8.9 Pour tout cercle $\mathscr{C}$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ soit, dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + c = 0$$

(a, b) sont les coordonnées du centre de $\mathscr{C}$.

Démonstration. On note (x_0, y_0) les coordonnées de ω dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $m \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$m \in \mathscr{C} \text{ ssi } (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \text{ ssi } x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+x_0^2+y_0^2-r^2 = 0 \quad \blacksquare$$

Réciproquement, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère la partie $\mathscr{E}$ du plan dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Soit $m \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$m \in \mathscr{E} \text{ ssi } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ ssi } (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

Si $a^2 + b^2 - c < 0$, $\mathscr{E} = \varnothing$.

Si $a^2+b^2-c=0$, $\mathscr{E}=\{O+a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}\}$.

Si $a^2+b^2-c>0$, on pose $\omega=O+a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre ω et de rayon $\sqrt{a^2+b^2-c}$. On a alors :

$$m\in\mathscr{E} \text{ ssi } \omega m^2=a^2+b^2-c \text{ ssi } \omega m=\sqrt{a^2+b^2-c} \text{ ssi } m\in\mathscr{C}$$

<u>THÉORÈME 8.10</u> *Soit $(a,b)\in P^2$ tel que $a\neq b$. L'ensemble des points $m\in P$ vérifiant $\langle\overrightarrow{ma},\overrightarrow{mb}\rangle=0$ est le cercle de diamètre $[ab]$.*

Démonstration.

- Il existe un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ tel qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ vérifiant $a=O+\lambda\overrightarrow{i}$ et $b=O-\lambda\overrightarrow{i}$ (On appelle O le milieu de $[ab]$, $\overrightarrow{i}=\frac{1}{\|oa\|}\times\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{j}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{i}$, unitaire).
- Soit $m\in P$ de coordonnées (x,y) dans $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On note $\mathscr{C}$ le cercle centré en O de rayon $|\lambda|$.

$$\langle\overrightarrow{ma},\overrightarrow{mb}\rangle=0 \text{ ssi } (x-\lambda)(x+\lambda)+y^2=0 \text{ ssi } x^2+y^2=\lambda^2 \text{ ssi } m\in\mathscr{C}$$

Donc $\{m\in P,\langle\overrightarrow{ma},\overrightarrow{mb}\rangle=0\}=\mathscr{C}$. ∎

<u>THÉORÈME 8.11</u> *Soit $(a,b)\in P^2$ tel que $a\neq b$. On pose :*

$$\varphi:\begin{cases} P\setminus\{b\} & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \dfrac{ma}{mb}\end{cases}$$

- *L'ensemble $\{m\in P\setminus\{b\},\varphi(m)=1\}$ est la médiatrice de $[ab]$.*
- *Pour tout $k\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, l'ensemble $\{m\in P\setminus\{b\},\varphi(m)=k\}$ est un cercle centré sur (ab).*

Démonstration.

- Soit $m\in P\setminus\{b\}$.

$$\begin{aligned}\varphi(m)=1 &\text{ ssi } ma=mb\\ &\text{ ssi } ma^2-mb^2=0\\ &\text{ ssi } \langle\overrightarrow{ma}-\overrightarrow{mb},\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{mb}\rangle=0\\ &\text{ ssi } \langle\overrightarrow{ba},\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{mb}\rangle=0\end{aligned}$$

On note g le milieu de (ab).

$$\begin{aligned}\varphi(m)=1 &\text{ ssi } \langle\overrightarrow{ba},2\overrightarrow{mg}\rangle=0\\ &\text{ ssi } \langle\overrightarrow{ba},\overrightarrow{mg}\rangle=0\\ &\text{ ssi } \langle\overrightarrow{gm},\overrightarrow{ab}\rangle=0\end{aligned}$$

On en déduit le résultat.

- Soit $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Soit $m \in P \setminus \{b\}$

$$\varphi(m) = k \text{ ssi } ma^2 - k^2 mb^2 = 0 \text{ ssi } \langle \overrightarrow{ma} - k\overrightarrow{mb}, \overrightarrow{ma} + k\overrightarrow{mb} \rangle = 0$$

Comme $1 - k \neq 0$, on peut poser $g_1 = \overline{\{}(a, 1), (b, -k)\}$. De même, on peut poser $g_2 = \overline{\{}(a, 1), (b, k)\}$.
Donc :

$$\varphi(m) = k \text{ ssi } (1 - k^2)\langle \overrightarrow{mg_1}, \overrightarrow{mg_2} \rangle = 0 \text{ ssi } \langle \overrightarrow{mg_1}, \overrightarrow{mg_2} \rangle = 0$$

Finalement $\varphi(m) = k$ si et seulement si m appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[g_1, g_2]$. Comme les coefficients des barycentres sont non nuls, $\{g_1, g_2\} \cap \{a, b\} = \varnothing$. Donc $\{m \in P \setminus \{b\}, \varphi(m) = k\} = \mathscr{C}$. ∎

<u>Théorème 8.12</u> *Soit $(a, b) \in P^2$ tel que $a \neq b$. On pose*

$$\varphi : \begin{cases} P \setminus \{a, b\} & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \text{mes}(\widehat{(ma), (mb)}) \end{cases}$$

- *Pour tout $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \not\equiv 0 \mod \pi$, l'ensemble $\{m \in P\setminus\{a, b\}, \varphi(m) = k\}$ est un cercle passant par a et b, privé de a et b.*
- *Pour tout $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \equiv 0 \mod \pi$, l'ensemble $\{m \in P\setminus\{a, b\}, \varphi(m) = k\}$ est la droite (ab) privée de a et b.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{R}$.
- Si $k \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, on a déjà le résultat.
- On suppose $k \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. Il existe un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $a = O + \lambda\overrightarrow{i}$ et $b = O - \lambda\overrightarrow{i}$. Soit $m \in P \setminus \{a, b\}$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} \varphi(m) = k \text{ ssi } & \tan(\text{mes}(\widehat{(ma), (mb)})) = \tan(k) \\ \text{ssi } & \frac{[\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb}]}{\langle \overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb} \rangle} = \tan(k) \\ \text{ssi } & [\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb}] = \langle \overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb} \rangle \tan(k) \\ \text{ssi } & (x - \lambda)y - (x + \lambda)y = \tan(k)(x^2 + y^2 - \lambda^2) \\ \text{ssi } & -2\lambda y = \tan(k)(x^2 + y^2 - \lambda^2) \end{aligned}$$

Si $k \equiv 0 \mod \pi$,

$$\varphi(m) = k \text{ ssi } y = 0 \text{ ssi } m \in (ab)$$

Donc $\{m \in P \setminus \{a,b\}, \varphi(m)=k\} = (ab) \setminus \{a,b\}$.
Si $k \not\equiv 0 \mod \pi$,

$$\begin{aligned}\varphi(m)=k \text{ ssi } & x^2+y^2-\lambda^2 = -\frac{2\lambda y}{\tan(k)}\\ \text{ssi } & x^2+\left(y+\frac{\lambda}{\tan(k)}\right)^2 = \lambda^2\left(1+\frac{1}{\tan^2(k)}\right)\end{aligned}$$

Finalement, $\{m \in P \setminus \{a,b\}, \varphi(m)=k\}$ est un cercle passant par a et b, privé de a et b. ■

Corollaire 8.1 *Soit $(a,b,c,d) \in P^4$ deux à deux distincts.*

$$\text{mes}(\widehat{(ca),(cb)}) = \text{mes}(\widehat{(ad),(db)}) \text{ ssi } a,b,c,d \textit{ sont cocycliques ou alignés}$$

Si A, B, C, D sont les affixes respectives de a, b, c et d, alors a, b, c et d sont cocycliques si et seulement si $\frac{(C-B)(D-A)}{(C-A)(D-B)} \in \mathbb{R}$.

8.5.2 Autres paramétrages d'un cercle

On suppose $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct.

Soit $\omega \in P$ dont on note (x_0,y_0) les coordonnées dans ce repère et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre ω et de rayon r.

Soit $m \in P$ de coordonnées (x,y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{aligned}m \in \mathscr{C} \text{ ssi } & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2\\ \text{ssi } & \left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1\\ \text{ssi } & \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = x_0 + r\cos(t) \text{ et } y = y_0 + r\sin(t)\end{aligned}$$

On appelle alors système d'équations paramétriques de $\mathscr{C}$ le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos(t)\\ y = y_0 + r\sin(t)\end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Proposition 8.10 Réciproquement, tout système de ce type décrit un cercle de centre (x_0,y_0) et de rayon r.

On travaille en polaires dans un repère $(O, \vec{i})$. Il y a deux cas particuliers :

- $\mathscr{C}$ est centré en O et de rayon $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donné. Un équation polaire de $\mathscr{C}$ est $r = r_0$ ou $r = -r_0$.

- On considère un cercle $\mathscr{C}$ passant par O. (a,b) sont les coordonnées de son centre, supposé différent de O.
  Soit $m \in P$.
  $$\begin{aligned} m \in \mathscr{C} \text{ ssi un représentant } (r,\theta) \text{ de } m \text{ vérifie} \\ [(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 - 2ar\cos\theta - 2br\sin\theta = 0 \\ \text{ssi un représentant } (r,\theta) \text{ de } m \text{ vérifie } r(r - 2a\cos\theta - 2b\sin\theta) = 0 \\ \text{ssi un représentant } (r,\theta) \text{ de } m \text{ vérifie } r - 2a\cos\theta - 2b\sin\theta = 0 \end{aligned}$$
  Finalement, une équation polaire de $\mathscr{C}$ est $r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, toute équation de cette forme décrit un cercle de centre de coordonnées (a,b) passant par O.
  On peut limiter θ à un intervalle d'amplitude π car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k\cos(\theta)$ et $\sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin(\theta)$.

8.5.3 Intersection droite-cercle

<u>THÉORÈME 8.13</u> *Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre ω et de rayon r. Soi D une droite.*

- *Si $d(\omega, D) > r$, $\mathscr{C} \cap D = \varnothing$.*
- *Si $d(\omega, D) = r$, $\mathscr{C} \cap D = \{p\}$ où p est le projeté orthogonal de ω sur D.*
- *Si $d(\omega, D) < r$, $\mathscr{C} \cap D$ contient exactement deux points.*

Démonstration. On se place dans un repère orthogonal $(\omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{i}$ soit orthogonal à D et que l'abscisse λ du point d'intersection p de $\mathscr{C}$ avec $\omega + \mathbb{R}\overrightarrow{i}$ soit positive.

Soit $m \in P$ de coordonnées (x,y) dans ce repère.

$$\begin{aligned} m \in \mathscr{C} \cap D \text{ ssi } & \begin{cases} m \in D \\ m \in \mathscr{C} \end{cases} \\ \text{ssi } & \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x = \lambda \end{cases} \\ \text{ssi } & \begin{cases} y^2 = r^2 - \lambda^2 \\ x = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Si $r^2 - \lambda^2 < 0$ (c'est-à-dire $r < d(\omega, D)$), alors $\mathscr{C} \cap D = \varnothing$.

Si $r^2 - \lambda^2 = 0$ (c'est-à-dire $r = d(\omega, D)$), alors $\mathscr{C} \cap D = \{p\}$ où p est le point de coordonnées $(\lambda, 0)$ (projeté de ω sur D).

Si $r^2 - \lambda^2 > 0$ (c'est-à-dire $r > d(\omega, D)$), alors $\mathscr{C} \cap D = \{p, q\}$ où p est le point de coordonnées $(\lambda, \sqrt{r^2 - \lambda^2})$ et q celui de coordonnées $(\lambda, -\sqrt{r^2 - \lambda^2})$. ∎

<u>THÉORÈME 8.14</u> *Soit $\mathscr{C}_1$ un cercle dont on note ω_1 le centre et r_1 le rayon. Soit $\mathscr{C}_2$ un cercle dont on note ω_2 le centre et r_2 le rayon. $\mathscr{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$ sont tels que $\omega_1 \neq \omega_2$.*

- *Si $|r_1 - r_2| < \omega_1\omega_2 < r_1 + r_2$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ contient exactement deux points.*
- *Si $\omega_1\omega_2 > r_1 + r_2$ ou $\omega_1\omega_2 < |r_2 - r_1|$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \varnothing$.*
- *Si $\omega_1\omega_2 = r_1 + r_2$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ est un singleton et ils sont tangents extérieurement.*
- *Si $\omega_1\omega_2 = r_1 - r_2$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ est un singleton et ils sont tangents intérieurement.*

Démonstration. Par symétrie, on peut supposer $r_1 \geqslant r_2$. On pose $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\|\omega_1\omega_2\|} \times \overrightarrow{\omega_1\omega_2}$. Il existe $\overrightarrow{j} \in \overrightarrow{P}$ unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{i}$.

On travaille dans $(\omega_1, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on appelle $d = \omega_1\omega_2$.

Soit $m \in P$ de coordonnées (x, y) dans le repère choisi.

$$\begin{aligned}
m \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \text{ ssi } & \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x-d)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases} \\
\text{ssi } & \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ x^2 + y^2 - 2dx = r_2^2 - d^2 \end{cases} \\
\text{ssi } & \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ 2dx = r_1^2 - r_2^2 + d^2 \end{cases} \\
\text{ssi } & \begin{cases} 4d^2y^2 = 4d^2r_1^2 - (r_1^2 + d^2 - r_2^2)^2 \\ 2dx = r_1^2 - r_2^2 + d^2 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 4d^2L_1 + L_2^2
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
4d^2r_1^2 - (r_1^2 + d^2 - r_2^2)^2 &= (2dr_1 + r_1^2 + d^2 - r_2^2)(2dr_1 - r_1^2 + r_2^2 - d^2) \\
&= ((r_1 + d)^2 - r_2^2)(r_2^2 - (r_1 - d)^2) \\
&= \underbrace{(r_1 + d + r_2)}_{positif}\underbrace{(r_1 + d - r_2)}_{positif}(r_2 - r_1 + d)(r_1 + r_2 - d)
\end{aligned}$$

On suppose $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$. Dans ce cas, $r_1 + r_2 - d > 0$ et $r_2 - r_1 + d > 0$.

Or $r_1 + r_2 + d < 0$ et $r_1 - r_2 + d < 0$.

Donc $4d^2r_1^2 - (r_1^2 + d^2 - r_2^2)^2 > 0$.

Donc :

$$m \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \text{ ssi } \begin{cases} x = \dfrac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2d} \\ |y| = \dfrac{\sqrt{4d^2r_1^2 - (r_1^2 + d^2 - r_2^2)^2}}{2d} \end{cases}$$

Donc $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ contient exactement deux points.
On traite de même les autres cas. $\blacksquare$

Chapitre 9

Coniques

On travaille dans le plan P orienté.

9.1 Présentation

Définition 9.1 Soit D une droite de P, $F \in P \setminus D$ et $e \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e l'ensemble de points $\{M \in P, MF = e \times d(M, D)\}$.

- Si $e < 1$, la conique est une ellipse.
- Si $e = 1$, la conique est une parabole.
- Si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

Vocabulaire :

- Le réel égal à $e \times d(F, D)$ s'appelle le paramètre de la conique (noté p).
- La droite perpendiculaire à D passant par F s'appelle axe focal de la conique (noté ici Δ).
- On note K le projeté orthogonal de F sur D.
- Si $e = 1$, la conique rencontre Δ en un unique point, milieu de $[FK]$, appelé sommet de la conique.
- Si $e \neq 1$, la conique rencontre Δ en deux points A et A' appelés sommets de la conique. Le milieu de $[AA']$ est noté O, appelé centre de la conique.

Remarque 9.1 L'axe focal est toujours un axe de symétrie de la conique.

Proposition 9.1 Une équation polaire de Γ est donc $r(1 + e\cos\theta) = p$.

Démonstration. On travaille dans le repère polaire $(F, \overrightarrow{i})$, où $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\|FK\|} \times \overrightarrow{FK}$. On note $\overrightarrow{j}$ le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et Γ la conique considérée.

Soit $M \in P$.

$M \in \Gamma$ ssi un représentant (r, θ) de M vérifie $r^2 = e^2 \left(r\cos\theta - \dfrac{p}{e}\right)^2$
ssi un représentant (r, θ) de M vérifie $r = er\cos\theta - p$ ou $r = -er\cos\theta + p$
ssi un représentant (r, θ) de M vérifie $(1 + e\cos\theta)r = p$

La dernière équivalence est vraie car si un représentant (r, θ) de M vérifie $r = er\cos\theta - p$, $(-r, \theta + \pi)$, qui est un autre représentant de M vérifie $r = -er\cos\theta + p$ et vice-versa. De plus, la deuxième implication est claire. ■

Proposition 9.2 Réciproquement, pour tout $(e, p) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'ensemble des points dont une équation polaire dans $(F, \overrightarrow{i})$ est $r(1 + e\cos\theta) = p$ est une conique de foyer F, d'excentricité e, de paramètre p et d'axe focal $F + \mathbb{R}\overrightarrow{i}$.

Dans ce cas, une équation polaire de la directrice est $r\cos\theta = \frac{p}{e}$.

9.2 Ellipse

Soit $F \in P$, D une droite qui ne contient pas F, $e \in]0, 1[$. On appelle Γ l'ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. On réutilise les notations précédentes. On travaille dans $(O, \overrightarrow{i} = \frac{1}{\|OF\|} \times \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{j})$, avec $\overrightarrow{j}$ un vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$.

- Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \text{ ssi } & MF = ed(M, D) \\ \text{ssi } & MF^2 = e^2 d(M, D)^2 \\ \text{ssi } & (x - OF)^2 + y^2 = e^2(x - OK)^2 \\ \text{ssi } & (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2(e^2 OK - OF)x = -OF^2 + e^2 OK^2 \quad (1) \end{aligned}$$

- Par définition, $A = \text{Bar}\{(F, 1), (K, e)\}$ et $A' = \text{Bar}\{(F, 1), (K, -e)\}$. On a donc $(1+e)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK}$ (2) et $(1-e)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK}$ (3). De plus, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{0}$.
(2) et (3) donnent $(e-1)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK}$. En ajoutant et soustrayant (1), on a $e\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OA} = e\overrightarrow{OK}$. Donc $\overrightarrow{OF} = e^2\overrightarrow{OK}$.
Finalement,

$$m \in \Gamma \text{ ssi } (1 - e^2)x^2 + y^2 = \frac{OF^2}{e^2}(1 - e^2)$$

- Soit $M \in O + \mathbb{R}\overrightarrow{j}$. On note y l'ordonnée de M.

$$\begin{aligned} m \in \Gamma \text{ ssi } y^2 &= \frac{OF^2}{e^2}(1-e^2) \\ \text{ssi } y &= \frac{OF}{e}\sqrt{1-e^2} \text{ ou } y = -\frac{OF}{e}\sqrt{1-e^2} \end{aligned}$$

On obtient deux points symétriques par rapport à l'axe focal. Ils sont appelé sommets secondaires de l'ellipse, notés B et B'.

- On pose $a = OA$, $b = OB$, $c = OF$.

Proposition 9.3
- $a^2 = b^2 + c^2$
- $e = \frac{c}{a}$
- $OK = \frac{a^2}{c}$
- $p = \frac{b^2}{a}$

Démonstration.
- Comme a est l'abscisse de A, $\frac{OF}{e} = a$ ssi $e = \frac{c}{a}$.
- Comme b est l'ordonnée de B, $\frac{OF}{e}\sqrt{1-e^2} = b$. Donc :

$$b^2 = \frac{c^2}{e^2}(1-e^2) = a^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2$$

Et $a^2 = b^2 + c^2$.
- $OF = e^2 OK$, donc :

$$OK = \frac{c}{e^2} = \frac{c}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{c}$$

- De plus :

$$p = eFK = \frac{c}{a} \times \left(\frac{a^2}{c} - c\right) = a - \frac{c^2}{a} = \frac{(a^2 - c^2)}{a} = \frac{b^2}{a} \qquad \blacksquare$$

Proposition 9.4 Dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, une équation cartésienne de Γ est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Réciproquement, soit $(u, v) \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle Γ la partie de P dont une équation cartésienne de $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est :

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$$

- Si $u = v$, Γ est le cercle de centre O et de rayon u.
- Si $u > v$, Γ est l'ellipse de centre O, d'axe focal $O + \mathbb{R}\overrightarrow{i}$ telle que $OA = u$ et $OB = v$.
- Si $u < v$, Γ est l'ellipse de centre O, d'axe focal $O + \mathbb{R}\overrightarrow{j}$ telle que $OA = v$ et $OB = u$.

Proposition 9.5 Un système d'équations paramétriques de Γ est :

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration. On conserve toutes les notations. Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \text{ ssi } & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \\ \text{ssi } & \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = a\cos(t) \text{ et } y = b\sin(t) \end{aligned}$$

■

Application : Soit $\mathscr{D}'$ une droite, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et p la projection orthogonale sur D'. On appelle affinité orthogonale d'axe D' et de rapport λ, l'application :

$$f : \begin{cases} P & \to & P \\ m & \mapsto & p(m) + \lambda\overrightarrow{p(m)m} \end{cases}$$

<u>Théorème 9.1</u> *On pose $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon a. Γ est l'image de $\mathscr{C}$ par l'affinité orthogonale d'axe $O + \mathbb{R}\overrightarrow{i}$ et de rapport $\frac{b}{a}$.*

Démonstration. On note $\widetilde{f}$ l'expression analytique de f dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(x, \dfrac{by}{a}\right) \end{cases}$$

Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} M \in f(\mathscr{C}) & \text{ ssi il existe } N \in \mathscr{C} \text{ tel que } M = f(N) \\ & \text{ ssi il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) = \widetilde{f}(a\cos(t), a\sin(t)) \\ & \text{ ssi il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) = (a\cos(t), b\sin(t)) \\ & \text{ ssi } M \in \Gamma \end{aligned}$$

Finalement $f(\mathscr{C}) = \Gamma$. ■

<u>THÉORÈME 9.2</u> *On admet :*

- *On note F' le symétrique de F par rapport à $O+\mathbb{R}\overrightarrow{j}$ et D' le symétrique de D par rapport à $O+\mathbb{R}\overrightarrow{j}$.*
  La conique construite avec F', D' et e est Γ.
- *(Définition bifocale de l'ellipse) : Soit $(F,F')\in P^2$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $a>\frac{FF'}{2}$. L'ensemble*

$$\{M\in P, MF+MF'=2a\}$$

est l'ellipse dont les foyers sont F et F' et dont la distance AA' vaut $2a$.

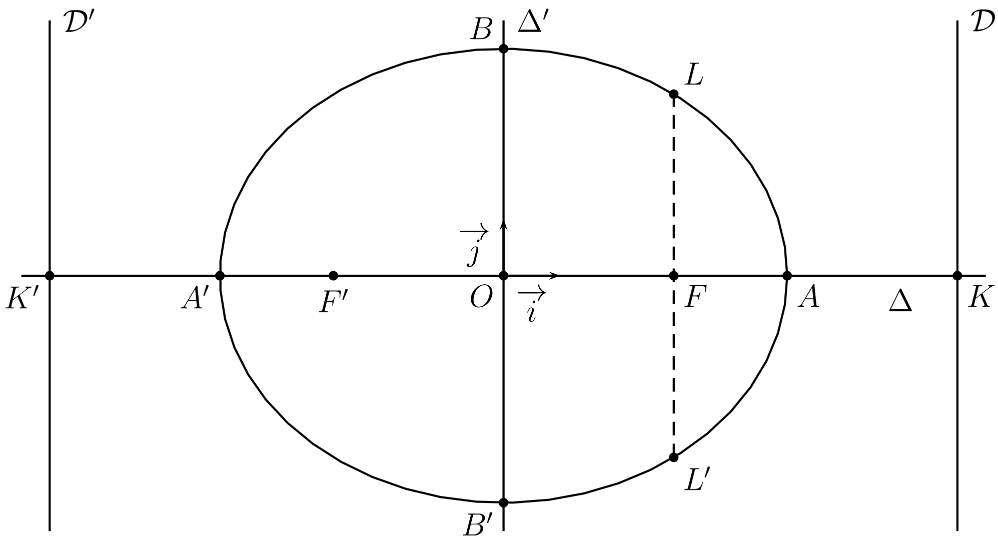


FIGURE 9.1 – Ellipse

9.3 Hyperbole

9.3.1 Paramétrages

Soit $F\in P$, D une droite ne contenant pas F, $e\in]1,+\infty[$. On appelle Γ l'hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. On reprend les notations de la partie sur les ellipses. On pose $\overrightarrow{i}=\frac{1}{\|OF\|}\times\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{i}$. On travaille dans $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

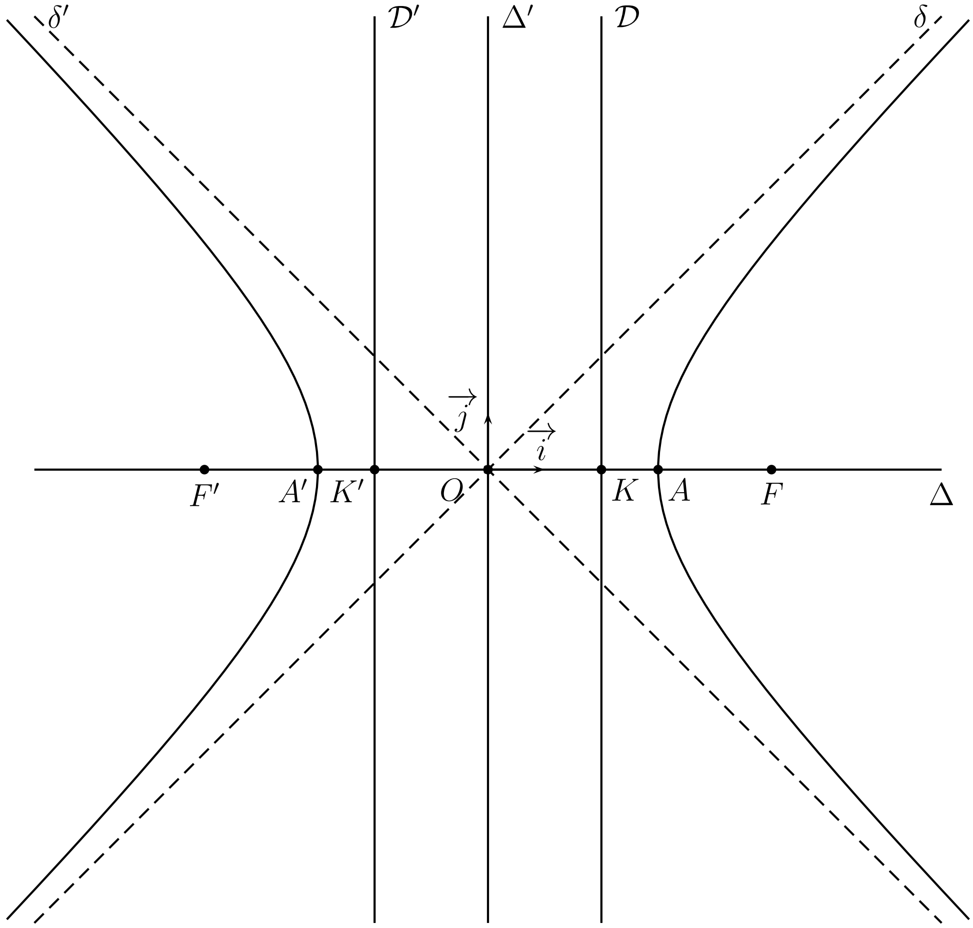


FIGURE 9.2 – Hyperbole

Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \text{ ssi } & (1-e^2)x^2 + y^2 = -\frac{OF^2}{e^2}(e^2-1) \\ \text{ssi } & \frac{x^2}{\left(\frac{OF^2}{e^2}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{OF^2}{e^2}(1-e^2)\right)} = 1 \end{aligned}$$

Donc l'hyperbole ne recoupe par la droite passant par O et orthogonale à Δ. (axe transverse pour l'hyperbole).

On pose $OA = a$, $OF = c$ et $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Proposition 9.6

- $e = \frac{c}{a}$ (démonstration comme pour l'ellipse)
- $OK = \frac{a^2}{c}$ (démonstration comme pour l'ellipse)
- $a^2 = c^2 - b^2$ (par définition de b)

Proposition 9.7 Dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, une équation cartésienne de Γ est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Réciproquement, toute équation de la forme précédente décrit une hyperbole dont les caractéristiques géométriques sont connues.

Proposition 9.8 Un système d'équations paramétriques de la branche de Γ dans le demi-plan des points d'abscisse positive est :

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}(t) \\ y = b\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration. Soit $M \in P$ d'abscisse $x > 0$ et de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} m \in \Gamma \text{ ssi } & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ & \text{ssi il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = a\,\mathrm{ch}(t) \text{ et } y = b\,\mathrm{sh}(t) \end{aligned}$$

La lecture de l'équation cartésienne assure que Γ est invariante par la symétrie s axiale orthogonale d'axe $O + \mathbb{R}\overrightarrow{j}$, et par celle d'axe $O + \mathbb{R}\overrightarrow{i}$. On peut donc construire F' et D', foyer et directrice associés, symétriques de F et D par s.

Proposition 9.9 Soit $(F, F') \in P^2$ tels que $F \neq F'$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a < \frac{FF'}{2}$. L'ensemble

$$\{M \in P, |MF - MF'| = 2a\}$$

est une hyperbole entièrement déterminée.

9.3.2 Asymptotes

On reprend les notations précédentes et on note Γ^+ la partie de Γ appartenant au quart de plan où abscisses et ordonnées sont strictement positifs.

Γ^+ est le graphe de la fonction :

$$f : \begin{cases} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - \frac{bx}{a} = b\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{x}{a}\right) = b\frac{\frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{bx}{a} = 0$ et la droite d'équation $y = \frac{bx}{a}$ est asymptote à Γ^+ en $+\infty$.

L'hyperbole Γ admet deux droites asymptotes d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ et $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$.

Proposition 9.10 Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de l'asymptote dont une équation cartésienne est $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de l'asymptote dont une équation cartésienne est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel qu'une équation de Γ dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit $xy = k$.

Démonstration. Il existe $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \frac{\lambda}{b}\overrightarrow{i} + \frac{\lambda}{a}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \frac{\mu}{b}\overrightarrow{i} + \frac{\mu}{a}\overrightarrow{j}$.

Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

$$\begin{aligned} M &= O + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} \\ &= O + \frac{\lambda x}{b}\overrightarrow{i} + \frac{\lambda y}{a}\overrightarrow{j} + \frac{\mu x}{b}\overrightarrow{i} - \frac{\mu y}{a}\overrightarrow{j} \\ &= O + \left(\frac{\lambda x + \mu y}{b}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\mu x - \lambda y}{a}\right)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \text{ ssi } & \frac{1}{a^2}\left(\frac{\lambda x}{b} + \frac{\mu y}{b}\right)^2 - \frac{1}{b^2}\left(\frac{\lambda x}{a} - \frac{\mu y}{a}\right)^2 = 1 \\ \text{ssi } & (\lambda x + \mu y)^2 - (\lambda x - \mu y)^2 = a^2 b^2 \\ \text{ssi } & 4\lambda\mu xy = a^2 b^2 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de Γ dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donc $xy = \frac{a^2b^2}{4\lambda\mu}$. ■

Proposition 9.11 Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On travaille dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ quelconque.

La partie de P dont une équation cartésienne dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $xy = k$ est une hyperbole dont les axes de symétries sont les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle de demi-droites formé parles deux axes.

Démonstration. On pose $\overrightarrow{u} = \frac{\|j\|}{\alpha}\overrightarrow{i} + \frac{\|i\|}{\alpha}\overrightarrow{j}$ avec $\alpha = \left\|\|j\|\overrightarrow{i} + \|i\|\overrightarrow{j}\right\|$ et $\overrightarrow{v} = \frac{\|j\|}{\beta}\overrightarrow{i} - \frac{\|i\|}{\beta}\overrightarrow{j}$ avec $\beta = \left\|\|j\|\overrightarrow{i} - \|i\|\overrightarrow{j}\right\|$.

Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

$$\begin{aligned} M &= O + \frac{x}{\alpha}(\|j\|\overrightarrow{i} + \|i\|\overrightarrow{j}) + \frac{y}{\beta}(\|j\|\overrightarrow{i} - \|i\|\overrightarrow{j}) \\ &= O + \left(\frac{x\,\|j\|}{\alpha} + \frac{y\,\|j\|}{\beta}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{x\,\|i\|}{\alpha} - \frac{y\,\|i\|}{\beta}\right)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

On note $a = \frac{x\|j\|}{\alpha} + \frac{y\|j\|}{\beta}$ et $b = \frac{x\|i\|}{\alpha} - \frac{y\|i\|}{\beta}$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \text{ ssi } & ab = k \\ \text{ssi } & \|i\| \, \|j\| \left(\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right) = k \\ \text{ssi } & \frac{x^2 \|i\| \, \|j\|}{k\alpha^2} - \frac{y^2 \|i\| \, \|j\|}{k\beta^2} = 1 \end{aligned}$$

Si $k > 0$, on obtient une hyperbole entièrement déterminée.
On suppose $k < 0$. Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

$$M \in \Gamma \text{ ssi } -\frac{y^2 \|i\| \, \|j\|}{k\alpha^2} + \frac{x^2 \|i\| \, \|j\|}{k\beta^2} = 1$$

Comme $(O, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ est orthonormé, on obtient une hyperbole entièrement déterminée. ■

Remarque 9.2 Le repère porté par les asymptotes est toujours agréable pour les calculs, mais il n'est pas orthonormé en général. Ce repère est vraiment intéressant quand les asymptotes sont perpendiculaires. On parle alors d'hyperboles équilatères ($a = b$ et $e = \sqrt{2}$).

9.4 Parabole

Soit $F \in P$ et D une droite ne contenant pas F. On appelle Γ la parabole de foyer F et de directrice D. On reprend les notations de la partie sur les ellipses.
On pose $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\|OF\|} \times \overrightarrow{OF}$ et on choisit $\overrightarrow{j}$ unitaire orthogonal à $\overrightarrow{i}$.
Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \text{ ssi } & MF = d(M, D) \\ \text{ssi } & \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ \text{ssi } & x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4} \\ \text{ssi } & y^2 = 2px \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de Γ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $y^2 = 2px$.

Réciproquement, toute équation de la forme $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé décrit une parabole entièrement déterminée. On peut noter qu'un système d'équations paramétriques de Γ est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

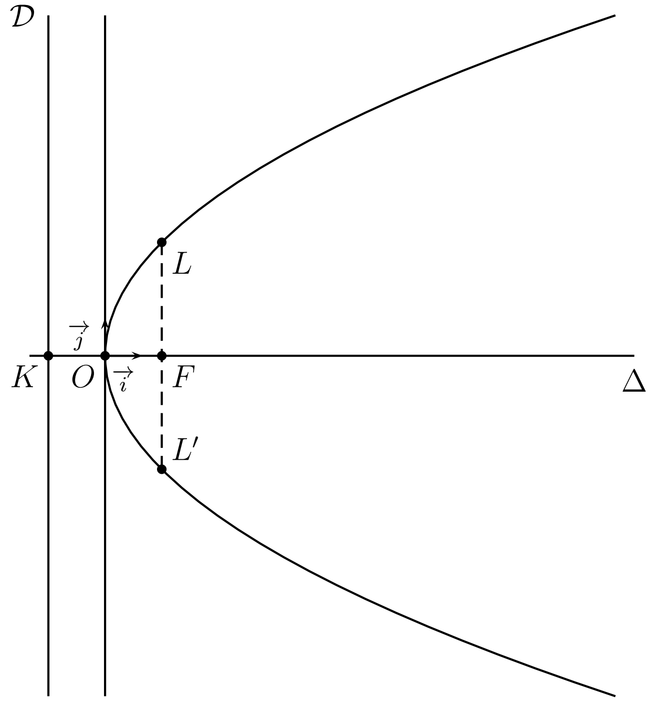


FIGURE 9.3 – Parabole

Chapitre 10

Courbes du second degré

On se place dans un plan P affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ aussi noté $\mathcal{R}$.

Soit $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$. On désigne par $\mathcal{A}$ la partie de P dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est ;

$$(E) \colon ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

On appelle φ l'application $(x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$.

10.1 Changements de repères

10.1.1 Effet d'une translation

Soit m_0 un point du plan, de coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathcal{R}$. Un point m de coordonnées (x, y) dans $(m_0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ a pour coordonnées $(x + x_0, y + y_0)$ dans $\mathcal{R}$. Il appartient à $\mathcal{A}$ ssi

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(ax_0 + by_0 + d)x + 2(bx_0 + cy_0 + e)y + \varphi(x_0, y_0) = 0$$

La forme de l'équation manipulée et la valeur de $b^2 - ac$ ne sont pas modifiées via une translation du repère.

Si de plus il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ax_0+by_0+d = 0$ et $bx_0+cy_0+e = 0$, le point m_0 de coordonnées (x_0, y_0) est un centre de symétrie de $\mathcal{A}$. C'est en particulier le cas lorsque $b^2 - ac \neq 0$.

10.1.2 Effet d'une rotation

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $\overrightarrow{u} = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$, vecteurs obtenus à partir de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ en effectuant la rotation dont une mesure est θ.

Un point m de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ admet $(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$ comme coordonnées dans $\mathcal{R}$. Il appartient donc à $\mathcal{A}$ ssi $\varphi(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) = 0$ ie

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(e\sin(\theta) + d\cos(\theta))x + 2(e\cos(\theta) - d\sin(\theta))y + f = 0$$

où

$$\begin{cases} A = \dfrac{a+c}{2} + \dfrac{a-c}{2}\cos(2\theta) + b\sin(2\theta) \\ B = b\cos(2\theta) - \dfrac{a-c}{2}\sin(2\theta) \\ C = \dfrac{a+c}{2} - \dfrac{a-c}{2}\cos(2\theta) - b\sin(2\theta) \end{cases}$$

On vérifie que $B^2 - AC = b^2 - ac$. La forme de l'équation manipulée et la valeur de $b^2 - ac$ ne sont pas modifiées via une rotation du repère.

10.2 Étude de $\mathcal{A}$

Proposition 10.1

1. Si $b^2 - ac < 0$, $\mathcal{A}$ est une ellipse, un cercle, un point ou le vide.
2. Si $b^2 - ac = 0$, $\mathcal{A}$ est une parabole, deux droites parallèles éventuellement confondues, le vide ou P.
3. Si $b^2 - ac > 0$, $\mathcal{A}$ est une hyperbole ou deux droites sécantes.

Démonstration.

1. Si $b^2 - ac < 0$, il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ax_0 + by_0 + d = 0$ et $bx_0 + cy_0 + e = 0$. On choisit de plus θ tel que $B = 0$.

   Comme $AC = ac - b^2$, on a $AC > 0$. Il existe donc D tel qu'une équation de $\mathcal{A}$ dans le repère centré en m_0 de coordonnées (x_0, y_0) et de base associée $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit $|A|x^2 + |C|y^2 + D = 0$. On a alors :
   - Si $D > 0$, $\mathcal{A} = \varnothing$
   - Si $D = 0$, $\mathcal{A} = \{x_0\}$
   - Si $D < 0$, $\mathcal{A}$ est une ellipse centrée en m_0 quand $|A| \neq |C|$ et un cercle centré en m_0 sinon.
2. Si $b^2 - ac > 0$. En considérant le même repère que précédemment, on note qu'il existe $D \in \mathbb{R}$ tel qu'une équation de $\mathcal{A}$ dans le nouveau repère soit $|A|x^2 - |C|y^2 + D = 0$. On en déduit que :
   - Si $D \neq 0$, $\mathcal{A}$ est une hyperbole centrée en m_0
   - Si $D = 0$, $\mathcal{A}$ est la réunion de deux droites sécantes en m_0.

3. On suppose que $b^2 - ac = 0$. On choisit la même valeur de θ que précédemment. Comme $B = 0$ et $B^2 - AC = 0$, on sait que $A = 0$ ou $C = 0$.

   Quitte à ajouter $\frac{\pi}{2}$ à θ, il est loisible de supposer $A = 0$. Il existe alors D, E, F tel qu'une équation de $\mathcal{A}$ dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. On note alors que :
   - Si $C = 0$, $\mathcal{A}$ est une droite, le vide ou P
   - Si $D = 0$, $\mathcal{A}$ est la réunion de deux droites parallèles, éventuellement confondues, ou le vide
   - Si $CD \neq 0$, $\mathcal{A}$ est une parabole dont l'axe focal est dirigé par $\overrightarrow{u}$. ■

Remarque 10.1
- *On considère le système :*

$$(S) \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$$

  d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  Si (S) *n'a aucune solution alors* $\mathcal{A}$ *est une parabole. Si* (S) *a une infinité de solutions, alors* $\mathcal{A}$ *est le vide ou deux droites parallèles éventuellement confondues. Si* (S) *admet une unique solution, cette solution est le couple de coordonnées de l'unique centre de symétrie de* (S).
- *Pour étudier un ensemble de* $\mathcal{A}$ *de points de* P *admettant une équation cartésienne de la forme* (E) *dans le repère orthonormé* $\mathcal{R}$ *lorsque* $b \neq 0$, *on introduit* θ *tel que* $\operatorname{cotan}(2\theta) = \frac{a-c}{2b}$ *et on calcule une équation de* $\mathcal{A}$ *dans le repère orthonormé direct d'origine* O *et dont le premier vecteur est* $\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$.
  La mise sous forme canonique de deux carrés permet de décrire $\mathcal{A}$ *via l'équation de départ si* $b = 0$ *et l'équation obtenue après la première manipulation dans le cas contraire.*

Proposition 10.2 Soit $m_0 \in \mathcal{A}$ dont on note (x_0, y_0) les coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Si une des deux dérivées partielles de φ au point (x_0, y_0) est non nulle, il existe une tangente à la courbe $\mathcal{A}$ au point m_0 dont une équation cartésienne dans le même repère est :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Chapitre 11

Géométrie dans l'espace usuel

E est un espace usuel de points, $\overrightarrow{E}$ est l'ensemble des vecteurs liant deux points quelconques de E. On réutilise la notation point + vecteur.

11.1 Repérage dans E

11.1.1 Repère cartésien

Définition 11.1 On appelle base de E tout triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs de $\overrightarrow{E}$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, il existe un unique $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j} + \nu \overrightarrow{k}$.

On appelle repère cartésien tout quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ formé d'un point O et d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans ce chapitre, on fixe un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

À chaque vecteur de $\overrightarrow{E}$, on associe ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. De même, à chaque point de E, on associe ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Définition 11.2 Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{E}^3$. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} + \nu \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 11.1 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$.

Définition 11.3 Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{E}^3$ de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3).

On appelle déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on note $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le réel $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$.

<u>THÉORÈME 11.1</u> *Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{E}^3$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une base.*
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *ne sont pas coplanaires.*
- $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$.

11.1.2 Orientation

Orienter l'espace revient à privilégier une base. On choisit une base dont on dit qu'elle est directe. Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base différente de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ privilégiée, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est directe si et seulement si $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$ et indirecte sinon.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2$ non colinéaires. On appelle $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

- On oriente $\overrightarrow{P}$. On mesure $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. On appelle mesure de l'angle non orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ la valeur absolue de l'unique valeur de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ appartenant à $]-\pi, \pi]$.

  Remarque 11.2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, le résultat est indépendant du plan choisi.

- On choisit un vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{P}$. Une base $(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v'})$ de $\overrightarrow{P}$ est directe si et seulement si $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{w})$ est une base directe de $\overrightarrow{E}$.
  L'orientation de $\overrightarrow{P}$ étant choisie, on peut donner une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. La donnée de cette mesure doit être accompagnée de $\overrightarrow{w}$.
- Un point M n'appartenant pas à $O + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ est repéré par $r = \|OM\|$, une mesure de $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}})$ où H est le projeté de M sur P orienté par $\overrightarrow{k}$ et par une mesure de l'angle non orienté $\theta = (\widehat{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM}})$.
- Les points de $O + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ ont pour coordonnées $(r, 0, t)$ avec $r = \|OM\|$ et $t \in \mathbb{R}$.

11.2 Outils géométriques

11.2.1 Produit scalaire

<u>Définition 11.4</u> Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2$. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on note $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ calculé dans un plan contenant ces deux vecteurs.

Remarque 11.3 Le résultat est indépendant du plan et de l'orientation du plan choisi.

Proposition 11.1 Le produit scalaire a les mêmes propriétés que dans le plan.

<u>Théorème 11.2</u> *On suppose* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *orthonormée. Soit* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2$ *de coordonnées* (u_1, u_2, u_3) *et* (v_1, v_2, v_3) *dans* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle &= \langle u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}, v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k} \rangle \\
&= u_1v_1\langle \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} \rangle + u_2v_2\langle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j} \rangle + u_3v_3\langle \overrightarrow{k}, \overrightarrow{k} \rangle \\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3
\end{aligned}$$

■

11.2.2 Produit vectoriel

<u>**Définition 11.5**</u> Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{P}^2$. On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est on note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ le vecteur défini par :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, on introduit un vecteur $\overrightarrow{k}$ unitaire et orthogonal au paln engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On oriente ce plan et on a, en notant $\alpha = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$,

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|u\| \, \|v\| \sin(\alpha) \overrightarrow{k}$$

Remarque 11.4 La définition dépend de l'orientation de l'espace.

Proposition 11.2

- Deux vecteur sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.
- Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2$, $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{u}$ et $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v}$.
- Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2$ non colinéaires. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe de $\overrightarrow{E}$.
- En particulier, si $\|u\| = \|v\| = 1$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée directe.

<u>Théorème 11.3</u>

- *Pour tout* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$.
- *Pour tout* $(\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R} \times \overrightarrow{E}^2$, $\lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \lambda\overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.
- *Pour tout* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{E}^3$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ *et* $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$.

COROLLAIRE 11.1 *On suppose* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *orthonormée directe. Soit* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2$ *de coordonnées* (u_1, u_2, u_3) *et* (v_1, v_2, v_3) *dans* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *a pour coordonnées* $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ *dans* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Démonstration. On a :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}) \wedge (v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k})$$

On développe par bilinéarité et on simplifie les produits vectoriels résiduels. On obtient alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\overrightarrow{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\overrightarrow{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{k}$$ ∎

COROLLAIRE 11.2 *Soit* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{E}^3$.

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{w}$$

Démonstration. Il existe une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ tel que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires et que $\overrightarrow{v}$ appartienne au plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

Il existe alors $(u_1, v_1, v_2, w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\overrightarrow{u} = u_1 \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{w} = w_1 \overrightarrow{i} + w_2 \overrightarrow{j} + w_3 \overrightarrow{k}$.

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{w} &= u_1w_1(v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j}) - u_1v_1(w_1 \overrightarrow{i} + w_2 \overrightarrow{j} + w_3 \overrightarrow{k}) \\ &= (u_1v_2w_1 - u_1v_1w_2)\overrightarrow{j} - u_1v_1w_3 \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) &= u_1 \overrightarrow{i} \wedge (v_2w_3 \overrightarrow{i} - v_1w_3 \overrightarrow{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\overrightarrow{k}) \\ &= -u_1v_1w_3 \overrightarrow{k} - (u_1v_1w_2 - u_1v_2w_1)\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. ∎

11.2.3 Produit mixte

On suppose $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormée directe.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{E}^3$. On appelle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle &= \langle \overrightarrow{w}, (u_2v_3 - u_3v_2)\overrightarrow{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\overrightarrow{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{k} \rangle \\ &= w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= w_1u_2v_3 - w_1u_3v_2 + w_2u_3v_1 - w_2u_1v_3 + w_3u_1v_2 - w_3u_2v_1 \\ &= \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\end{aligned}$$

Donc le réel $\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est indépendant de la base orthonormé choisie. On l'appelle produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

On note que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

<u>Théorème 11.4</u>

- *Pour tout* $(\lambda,\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \mathbb{R} \times \vec{E}^3$,

$$[\lambda\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\lambda\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}] = \lambda[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

- *Pour tout* $(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{z}) \in \mathbb{R} \times \vec{E}^3$,

$$\begin{cases} [\vec{u}+\vec{v},\vec{w},\vec{z}] = [\vec{u},\vec{w},\vec{z}] + [\vec{v},\vec{w},\vec{z}] \\ [\vec{u},\vec{v}+\vec{w},\vec{z}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{z}] + [\vec{u},\vec{w},\vec{z}] \\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{z}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u},\vec{v},\vec{z}] \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration se fait en utilisant la bilinéarité des produits scalaire et mixte. ∎

<u>Théorème 11.5</u> *Le produit mixte de trois vecteurs est changé en son opposé quand on échange deux des trois vecteurs.*

11.3 Plans de l'espace

11.3.1 Représentation dans un repère quelconque

<u>Définition 11.6</u> On appelle plan de E toute partie de E telle qu'il existe $A \in E$ et $(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{E}^2$ non colinéaires vérifiant :

$$P = \{A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = A + \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\}$$

Dans ce cadre, $\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\}$ s'appelle la direction de P et se note $\vec{P}$.

Soit $A \in E$ de coordonnées (x_0,y_0,z_0) dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{E}^2$ non colinéaires de coordonnées (α,β,γ) et (α',β',γ') dans $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note $P = A + \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\}$.

- Système d'équations paramétriques du plan
  Soit $M \in E$ de coordonnées (x,y,z) dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\begin{aligned} M \in P &\text{ ssi il existe } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } M = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \\ &\text{ssi il existe } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} \end{aligned}$$

Le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \ , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

est appelé système d'équations paramétriques de P.

- Équation cartésienne du plan.
  Soit $M \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{aligned} M \in P &\text{ ssi il existe } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } M = A + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \\ &\text{ssi } \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont coplanaires} \quad (\text{car } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ ne sont pas colinéaires}) \\ &\text{ssi } \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ &\text{ssi } (\beta\gamma' - \gamma\beta')(x - x_0) + (\alpha'\gamma - \gamma'\alpha)(y - y_0) + (\alpha\beta' - \beta\alpha')(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

Finalement, pour tout plan P, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ et une équation cartésienne de P dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est $ax+by+cz+d = 0$. La réciproque est vraie.
De plus, une équation cartésienne de $\overrightarrow{P}$ est $ax + by + cz = 0$.
Les passages cartésien/paramétrique/géométrique se font comme pour les droites.

Définition 11.7 Deux plans sont dits parallèles si et seulement s'ils ont même direction.

Théorème 11.6 *Soit P_1 et P_2 deux plans. Il existe $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^8$ tel que $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, que $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$, qu'une équation cartésienne de P_1 soit $a_1x+a_2y+a_3z+a_4 = 0$ et qu'une équation cartésienne de P_2 soit $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$.*

$P_1 \mathbin{/\!/} P_2$ si et seulement si (a_1, a_2, a_3) est proportionnel à (b_1, b_2, b_3).

11.3.2 Dans un repère orthonormé

Proposition 11.3 Soit $A \in E$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ de coordonnées (α, β, γ) dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $M \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
L'ensemble $\{M \in E, \langle\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\rangle = 0\}$ est un plan.

Démonstration.

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u} \text{ ssi } \langle\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\rangle = 0 \text{ ssi } \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \quad \blacksquare$$

Proposition 11.4 Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ et $\delta \in \mathbb{R}$, l'ensemble dont une équation cartésienne dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$.

Définition 11.8 Si on impose $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, l'équation précédente est dite normale.

Définition 11.9 Soit P un plan, $m_0 \in E$. l'ensemble $\{mm_0, m \in P\}$ admet un plus petit élément appelé distance de m_0 à P et noté $d(m_0, P)$. Si on note H la projection orthogonale de m_0 sur P, alors :

$$d(m_0, P) = m_0 H \text{ et } d(m_0, P) = mm_0 \text{ ssi } m = H$$

THÉORÈME 11.7 *Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et qu'une équation cartésienne de P soit $ax+by+cz+d = 0$. On note (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de m_0 dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.*

$$d(m_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration. Démonstration similaire à celle de la distance d'un point à une droite. ∎

11.4 Droites de l'espace

11.4.1 Dans un repère quelconque

Soit $A \in E$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ de coordonnées (α, β, γ) dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note D la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Soit $M \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{aligned} M \in D &\text{ ssi il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = A + \lambda \overrightarrow{u} \\ &\text{ssi il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases} \end{aligned}$$

Le système

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

est appelé système d'équations paramétriques de D.

La recherche d'une condition de compatibilité d'un système de trois équations à une inconnue donne deux équations cartésiennes de D.

Exemple 11.1 Soit $A \in E$ de coordonnées $(1,1,1)$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

On cherche un système d'équations cartésiennes de D.

Soit $M \in E$ de coordonnées (x,y,z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{aligned} M \in D &\text{ ssi il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = A + \lambda\overrightarrow{u} \\ &\text{ ssi il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Or :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x-1 \\ -1 & y-1 \\ \boxed{1} & z-1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|r} 0 & x-2z+1 \\ 0 & y+z-2 \\ \boxed{1} & z-1 \end{array}\right)$$

Donc un système d'équations cartésiennes de D est :

$$\begin{cases} x + 1 = 2z \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Exemple 11.2 Soit D la droite dont un système d'équations cartésiennes est :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Soit $M \in E$ de coordonnées (x,y,z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{aligned} M \in D &\text{ ssi } \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} \\ &\text{ ssi } (x,y,z) \in \{(1-t, -1, t), t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Donc D passe par $(1,-1,0)$ et est dirigée par $(-1,0,1)$.

<u>**Définition 11.10**</u> Une droite D est parallèle à un plan P si et seulement si $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$.

Remarque 11.5 *Soit* $(a,b) \in E^2$ *et* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{E} \setminus \{\overrightarrow{0}\})^2$. *On pose* $D = a + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ *et* $D' = b + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$.

D et D' sont coplanaires si et seulement si $\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Démonstration.
- On suppose $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires. Le résultat est trivial.
- On suppose $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et D et D' coplanaires.
  Comme Det D' ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en c. $\overrightarrow{ac} \in \overrightarrow{D}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{u}$. $\overrightarrow{bc} \in \overrightarrow{D'}$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{bc} = \mu\overrightarrow{v}$.
  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{bc} = \lambda\overrightarrow{u} - \mu\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{P}$ où $\overrightarrow{P} = \text{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$.
  Donc $\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.
- On suppose $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.
  Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
  Donc $b - \mu\overrightarrow{v} = a + \lambda\overrightarrow{u}$.
  Or $b - \mu\overrightarrow{v} \in D'$ et $a - \lambda\overrightarrow{u}_inD$. Donc $D \cap D' \neq \varnothing$ donc D et D' sont coplanaires. ■

Remarque 11.6 *Si* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *est orthonormé, on a un outil (produit vectoriel) permettant de traduire la colinéarité de deux vecteurs, donc donnant des équations cartésiennes de droites sans passes par des représentations paramétriques et sans problème de division.*

11.4.2 Distance d'un point à une droite

Définition 11.11 Soit D une droite et $m_0 \in E$. L'ensemble $\{mm_0, m \in D\}$ admet un plus petit élément appelé distance de m_0 à D et noté $d(m_0, D)$.

Théorème 11.8 *En appelant h le projeté orthogonal de m_0 sur D, on a $d(m_0, D) = m_0h$ et pour tout $m \in D$, $mm_0 = d(m_0, D)$* ssi *$m = h$.*

Théorème 11.9 *On note $a \in D$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{D}$.*

$$d(m_0, D) = \frac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{am_0}\|}{\|u\|}$$

Démonstration. On a $m_0h = \sin(\widehat{ham_0}) \times am_0$. Comme $\widehat{ham_0} =\in [0, \pi]$.

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{am_0}\| = \|u\| \, \|am_0\| \sin(\widehat{ham_0}) = \|u\| \times m_0h$$

On en déduit le résultat. ■

11.4.3 Perpendiculaire commune à deux droites

Soit $(a, b, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2 \times \overrightarrow{E}^2$. On pose $D = a + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $D' = b + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$.

On cherche les droites Δ de E vérifiant $\Delta \perp D$, $\Delta \perp D'$, $\Delta \cap D \neq \varnothing$ et $\Delta \cap D' \neq \varnothing$.

Si $D \mathbin{/\!/} D'$, il y a une infinité de solutions. On considère par la suite que D et D' ne sont pas parallèles.

- Soit $\Delta \in E$ vérifiant les conditions ci-dessus. $\Delta \perp D$ et $\Delta \perp D'$ donc $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dirige Δ.
  Par construction, Δ appartient au plan passant par a et engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
  Or D' n'est pas parallèle à P. Donc $D' \cap P = c$ où c est unique. Donc $c \in \Delta$. Le seul candidat possible est donc la droite dirigée par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et passant par $D' \cap P$.
- On pose $P = a + \text{Vect}\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right\}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Comme $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ne sont pas coplanaires, D' n'est pas parallèle à P. Donc elle coupe P en un unique point c.
  On pose $\Delta = c + \mathbb{R}(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.
  $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$ donc $\Delta \perp D$.
  $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}$ donc $\Delta \perp D'$.
  Par construction, c est unique et $\{c\} = D' \cap \Delta \neq \varnothing$
  $\Delta \subset P$ et $D \subset P$ donc $D \cap \Delta \neq \varnothing$.
  Donc Δ convient.
- Conclusion : pour toutes droites D et D' non parallèles, il existe une unique droite Δ vérifiant $\Delta \perp D$, $\Delta \perp D'$, $\Delta \cap D \neq \varnothing$ et $\Delta \cap D' \neq \varnothing$. Cette droite est appelée perpendiculaire commune à D et D'.

Exemple 11.3 On suppose $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé direct.

On pose $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $a = O + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$, $b = O + \overrightarrow{j}$, $D = a + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $D' = b + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$.

Montrer que D et D' ne sont pas coplanaires, puis trouver la perpendiculaire commune à D et D'.

$$\begin{aligned}
\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= [\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \\
&= \langle \overrightarrow{ab} \wedge \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle (-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) \wedge (2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}), \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k} \rangle \\
&= \langle -3\overrightarrow{k} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k} \rangle \\
&= -8
\end{aligned}$$

Donc $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$. Donc D et D' ne sont pas coplanaires.

On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. On appelle P le plan $a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\}$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$. Donc $\overrightarrow{v} \notin \overrightarrow{P}$. Donc il existe un unique point d'intersection de D' avec P, noté c. On note (x, y, z) les coordonnées de c.

$c \in D$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t$, $y = 1$ et $z = 3t$.

$c \in P$ donc $\overrightarrow{ac}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires donc $\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})}(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = 0$. On en déduit $t = \frac{3}{11}$.

Donc $c = O + \frac{3}{11}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \frac{9}{11}\overrightarrow{k}$.

La perpendiculaire commune est $c + \mathbb{R}\overrightarrow{w}$, c'est-à-dire $O + \frac{3}{11}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \frac{9}{11}\overrightarrow{k} + \mathbb{R}(3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$.

11.5 Étude des sphères

On travaille dans un repère orthonormé direct.

Proposition 11.5 Pour toute sphère $\mathscr{S}$ de E, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel qu'une équation cartésienne de $\mathscr{S}$ soit :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Réciproquement, soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On appelle A l'ensemble des points de E dont une équation cartésienne est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Si $d > a^2 + b^2 + c^2$, $A = \varnothing$

Si $d = a^2 + b^2 + c^2$, $A = \{O + a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}\}$

Si $d < a^2 + b^2 + c^2$, A est une sphère de centre $O + a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

<u>Théorème 11.10</u> *Soit $\mathscr{S}$ une sphère de E dont on note ω le centre et R le rayon.*

Soit P un plan. on note p la projection de ω sur P.

- *Si $d(\omega, P) > R$, $\mathscr{S} \cap P = \varnothing$.*
- *Si $d(\omega, P) = R$, $\mathscr{S} \cap P = \{p\}$.*
- *Si $d(\omega, P) < R$, $\mathscr{S} \cap P$ est un cercle inclus dans P, centré en p et de rayon $\sqrt{R^2 - d(\omega, P)^2}$.*

<u>Théorème 11.11</u> *Soit $\mathscr{S}_1$ une sphère dont on note ω_1 le centre et r_1 le rayon. Soit $\mathscr{S}_2$ une sphère dont on note ω_2 le centre et r_2 le rayon. $\mathscr{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$ sont tels que $\omega_1 \neq \omega_2$.*

- *Si* $|r_1 - r_2| < \omega_1\omega_2 < r_1 + r_2$*,* $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ *est un cercle centré sur* $(\omega_1\omega_2)$*.*
- *Si* $\omega_1\omega_2 > r_1 + r_2$ *ou* $\omega_1\omega_2 < |r_2 - r_1|$*,* $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \varnothing$*.*
- *Si* $\omega_1\omega_2 = r_1 + r_2$*,* $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ *est un singleton et elles sont tangentes extérieurement.*
- *Si* $\omega_1\omega_2 = r_1 - r_2$*,* $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ *est un singleton et elles sont tangentes intérieurement.*

Démonstration. La démonstration est similaire à celle des cercles dans le plan. ■

Exercice : On travaille dans un repère orthonormé direct. On considère $\mathscr{S}_1$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 4$ et $\mathscr{S}_2$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 + z = 5$.

$\mathscr{S}_1$ a pour centre $(1, 0, 0)$ et pour rayon $\sqrt{5}$.

$\mathscr{S}_2$ a pour centre $(0, 0, -\frac{1}{2})$ et pour rayon $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

– Première méthode :
  La distance entre les deux centres est $\frac{\sqrt{5}}{2}$. On a :

$$\left|\sqrt{5} - \frac{\sqrt{21}}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} \leqslant \sqrt{5} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

  donc $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ est un cercle noté $\mathscr{C}$.
  Le centre du cercle est le projeté orthogonal de ω_1 sur le plan contenant $\mathscr{C}$.
  Soit P le plan dont une équation cartésienne est $2x + z = 1$. On sait que $\mathscr{C}$ est un cercle de P ,dont le centre est l'intersection de $(\omega_1\omega_2)$ avec P, passant par $O + \sqrt{3}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ $(0^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2 \times 0 = 4)$.
  On calcule l'intersection de P avec la droite dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} 1 + t = x \\ \quad y = 0 \ z \ = \dfrac{t}{2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

  On trouve $O + \frac{3}{5}\overrightarrow{i} - \frac{1}{5}\overrightarrow{k}$.
  $\mathscr{C}$ est donc centré en $O + \frac{3}{5}\overrightarrow{i} - \frac{1}{5}\overrightarrow{k}$ et de rayon $\sqrt{\frac{9}{25} + 3 + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{17}{5}}$, inclus dans P.

– Deuxième méthode : Soit $M \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$$M \in \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 \text{ ssi } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 4 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

  On effectue un changement de repère de telle sorte qu'une équation cartésienne de P dans le nouveau repère soit $z = 0$.

On pose $\overrightarrow{i}' = \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{j}' = \overrightarrow{k}' \wedge \overrightarrow{i}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k})$ et $O' = O + \overrightarrow{k}$.
Soit $M \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$.

$$\begin{aligned} M &= O' + x\overrightarrow{i}' + y\overrightarrow{j}' + z\overrightarrow{k}' \\ &= O + \overrightarrow{k} + x\overrightarrow{j} - \frac{y}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \frac{2y}{\sqrt{5}}\overrightarrow{k} + \frac{2z}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \frac{z}{\sqrt{5}}\overrightarrow{k} \\ &= O + \frac{2z-y}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + \frac{2y+z+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 \text{ ssi } & \begin{cases} \dfrac{(2z-y)^2}{5} + x^2 + \dfrac{(2y+z+\sqrt{5})^2}{5} + \dfrac{2y-4z}{\sqrt{5}} = 4 \\ -\dfrac{2y}{\sqrt{5}} + \dfrac{4z}{\sqrt{5}} + \dfrac{2y}{\sqrt{5}} + \dfrac{z}{\sqrt{5}} + 1 = 1 \end{cases} \\ \text{ssi } & \begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{6}{\sqrt{5}}y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ a donc pour centre $O' - \frac{3}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}' = O + \frac{3}{5}\overrightarrow{i} - \frac{1}{5}\overrightarrow{k}$ et pour rayon $\sqrt{\frac{17}{5}}$.

Chapitre 12

Groupes, anneaux, corps

12.1 Lois de composition

12.1.1 Définitions

Définition 12.1 On appelle loi de composition interne sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans E.

Remarque 12.1 Si E est muni d'une loi de composition interne $\perp$, on note $x \perp y$ l'image de $(x, y) \in E^2$ par $\perp$ (au lieu de $\perp (x, y)$).

Définition 12.2 Soit E et F deux ensembles. On appelle loi de composition externe sur E à domaine d'opérateurs F toute application de $F \times E$ dans E.

Remarque 12.2 On note de même $x \top y$ au lieu de $\top(x, y)$.

Exemple 12.1

- Les lois additives et multiplicatives usuelles sir les ensembles de nombres sont des lois de compositions internes pour ces ensembles
- Soit E un ensemble. Les lois $(A, B) \mapsto A \cup B$ et $(A, B) \mapsto A \cap B$ sont des lois de composition internes sur $\mathcal{P}(E)$.
- Soit E un ensemble. $(f, g) \mapsto f \circ g$ est une loi de composition interne sur E^E.
- L'application $(\lambda, (x, y)) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^2$ à domaine d'opérateurs $\mathbb{R}$.

12.1.2 Propriétés des lois de composition internes

Définition 12.3 Soit $\perp$ une loi de composition interne sur un ensemble E.

On dit que $\perp$ est associative ssi pour tout $(x, y, z) \in E^3$n $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$. Dans ce cas, on note $x \perp y \perp z$ l'élément $(x \perp y) \perp z$.

On dit que $\perp$ est commutative ssi pour tout $x, y \in E^2$, $x \perp y = y \perp x$.

Définition 12.4 Soit E une ensemble muni de deux lois de composition internes $\perp$ et $\star$. On dit que $\perp$ est distributive par rapport à $\star$ ssi, pour tout $x, y, z \in E^3$, $x \perp (y \star z) = (x \perp y) \star (x \perp z)$ et $(y \star z) \perp x = (y \perp x) \star (z \perp x)$.

Remarque 12.3 Si $\perp$ est une loi de composition interne commutative sur un ensemble E, il faut et il suffit de vérifier une seule des deux égalités précédentes pour obtenir la distributivité de $\perp$ par $\star$.

Exemple 12.2

- Les lois additives et multiplicatives usuelles sur les ensembles de nombres sont associatives et commutatives, les lois multiplicatives étant distributives sur les additives.
- Soit E un ensemble. Les lois $\cup$ et $\cap$ sur $\mathcal{P}(E)$ sont associatives, commutatives et distributives l'une par rapport à l'autre.
- La loi $\circ$ de composition usuelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est associative mais pas commutative.
- L'application $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ de $(\mathbb{Q}_+^*)^2$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ est une loi de composition interne non associative.

12.1.3 Élements remarquables d'un ensemble

Définition 12.5 Soit $\perp$ une loi de composition interne sur un ensemble E. On appelle élément neutre pour $\perp$ tout élément $e \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $e \perp x = x \perp e = x$.

Proposition 12.1 Soit $\perp$ une loi de composition interne sur un ensemble E. Si E possède un élément neutre pour $\perp$ alors icelui est unique.

Démonstration. Soit e et e' deux neutres. Par définition, $e = e \perp e' = e'$. ∎

Définition 12.6 Soit $\perp$ une loi de composition interne sur un ensemble E possédant un élément neutre e. On dit qu'un élément $a \in E$ est symétrisable ssi il existe $a' \in E$ tel que $a \perp a' = a' \perp a = e$.

Remarque 12.4 Quand les lois sont commutatives, les définitions précédentes se simplifient.

Exemple 12.3

- L'élément neutre pour E muni de $\perp$ est, s'il existe, symétrisable.
- Dans $(\mathbb{R}^+, \times)$, 1 est neutre et tout élément différent de 0 est symétrisable.
- Soit E un ensemble. Si on munit $\mathcal{P}(E)$ de la loi $\cap$ (resp. $\cup$), E (resp. $\varnothing$) est le neutre de $\mathcal{P}(E)$ et le seul élément symétrisable de cet ensemble.
- Soit E un ensemble. Id_E est le neutre de E^E pour la loi $\circ$ usuelle. Les éléments symétrisables sont les les bijections.

12.1.4 Propriétés des lois associatives

Dans ce paragraphe, E désigne un ensemble muni d'une loi de composition interne associative possédant un neutre e.

Proposition 12.2 Soit a un élément de E symétrisable. Il existe un unique a' de E tel que $a \perp a' = a' \perp a = e$. Cet élément est appelé symétrique de a.

Démonstration. Soit a' et a'' deux éléments de E vérifiant $a \perp a' = a' \perp a = a \perp a'' = a'' \perp a = e$.

On a $(a' \perp a) \perp a'' = a''$ et $a' \perp (a \perp a'') = a'$ donc par associativité $a' = a''$. ∎

Proposition 12.3 Soit a et b deux éléments symétrisables de E, de symétriques respectifs a' et b'. Alors $a \perp b$ est symétrisable de symétrique égal à $b' \perp a'$.

Démonstration. Comme $\perp$ est associative,

$$(a \perp b) \perp (b' \perp a') = a \perp (b \perp b') \perp a' = a \perp a' = e$$

De même $(b' \perp a') \perp (a \perp b) = e$, ce qui assure le résultat par unicité du symétrique. ∎

Remarque 12.5 Ceci prouve en particulier la proposition analogue pour $\circ$ (corollaire 2.1), en lui ajoutant la partie existence qui avait été montrée à part.

Proposition 12.4 Soit a un élément symétrisable de E. Soit $x, y \in E^2$ tel que $a \perp x = a \perp y$ (resp. $x \perp a = y \perp a$) alors $x = y$.

Démonstration. Notons a' le symétrique de a. On a alors par associativité $x \perp (a \perp a') = y \perp (a \perp a')$ ie $x = y$. ∎

12.1.5 Notations multiplicatives

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un neutre. On note multiplicativement la loi de E, autrement dit, l'image de $(x, y) \in E^2$ est notée xy.

On note alors usuellement 1 le neutre e de E. Pour tout $x, n \in E \times \mathbb{N}$, on note x^n le produit de x avec lui-même n fois si $n \neq 0$, avec la convention $x^0 = e$.

Pour tout $x, n \in E \times \mathbb{Z}^-$ avec x symétrisable, on note x^n le produit du symétrique de x n fois. En particulier, x^{-1} est le symétrique de x. Avec ces notations, $x^{m+n} = x^m x^n$ et $(x^m)^n = x^{mn}$.

Remarque 12.6 *Soit* $(x, y) \in E^2$. *On a* $(xy)^2 = xyxy$ *et* $x^2y^2 = xxyy$ *qui sont a priori différents si la loi n'est pas commutative.*

12.1.6 Notations additives

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, commutative et possédant un neutre. On note additivement la loi de E, autrement dit, l'image de $(x, y) \in E^2$ est notée $x + y$. (Par convention, la loi doit être commutative)

On note alors 0 le neutre de E et comme précédemment, nx la somme de x avec lui-même n fois si $n \neq 0$, et 0 sinon. De plus si x est symétrisable et $n < 0$, on note nx la somme du symétrique de x avec lui-même n fois. En particulier, $-x$ désigne le symétrique de x.

Avec ces notations, $(n + m)x = nx + mx$ et $(mn)x = m(nx)$.

12.2 Groupes et morphismes de groupes

Définition 12.7 Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, possédant un neutre et pour laquelle tout élément est symétrisable. On dit qu'il est abélien ssi sa loi est commutative.

Exemple 12.4 On a déjà utilisé de nombreux groupes. On peut penser à tous les groupes additifs de nombres comme $(\mathbb{Z}, +)$ ou $(\mathbb{R}, +)$, à tous les groupes multiplicatifs de nombres comme $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ ou $(\mathbb{U}, \times)$. On pensera aussi à tous les groupes liés aux espaces fonctionnels comme $(C^2(\mathbb{R}), +)$, $(C^\infty(]0, 1[), +)$.

Tous les groupes précédents sont abéliens. En revanche, si E est un ensemble contenant au moins trois éléments, l'ensemble des bijections de E dans E muni de la loi de composition usuelle est un groupe non abélien.

Définition 12.8 Soit $(G, *)$ et $(G', \bullet)$ deux groupes et f une application de G dans G'. On dit que f est un morphisme de groupes ssi, pour tout $(x, y) \in G^2$, $f(x * y) = f(x) \bullet f(y)$. On dit que f est un isomorphisme de groupes ssi f est un morphisme de groupes bijectifs.

Exemple 12.5 ln est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Exemple 12.6 Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application

$$\begin{cases} (C^{n+1}(\mathbb{R}), +) & \rightarrow & (C^n(\mathbb{R}), +) \\ f & \mapsto & f' \end{cases}$$

est un morphisme de groupes surjectif et non injectif.

Exemple 12.7 Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien et $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{P}$. On note $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de $\overrightarrow{P}$. L'application

$$\begin{cases} (\overrightarrow{P}, +) & \to & (\mathbb{R}, +) \\ \overrightarrow{y} & \mapsto & \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle \end{cases}$$

est un morphisme de groupes non injectif et surjectif ssi $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.

Exemple 12.8 L'application

$$\begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathbb{U}, \times) \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{it} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes surjectif et non injectif.

Dans toute la suite, la loi de toute groupe G sera notée additivement si G est abélien et multiplicativement si G n'est pas a priori abélien.

Proposition 12.5 Soit G et G' deux groupes, f un morphisme de groupes de G dans G'. Pour tout élément $(x, n) \in G \times \mathbb{Z}$, $f(x^n) = f(x)^n$.

En particulier, l'image du neutre de G est le neutre de G' (cas $n = 0$) et l'image du symétrique de $x \in G$ est le symétrique de $f(x)$ (cas $n = -1$).

Démonstration. Il suffit de traiter les cas $n = 0$ et $n = -1$ (le reste étant alors vrai par récurrence). On remarque que $1 \cdot f(1) = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$ donc $f(1) = 1$ puisque $f(1)$ est symétrisable.

Soit $x \in G$. On a $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = 1$ et $f(x^{-1}) \cdot f(x) = 1$ de même. Donc $f(x^{-1})$ est symétrisable de symétrique $f(x)^{-1}$. ∎

Remarque 12.7 Les propriétés générales des structures abstraites s'appliquent dans tous les cas particuliers, évitant ainsi de faire trop de preuves identiques. La proposition précédente, appliquée dans le cadre de l'exemple 12.5, assure que $\ln(1) = 0$*, et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$*. Dans le cadre de l'exemple 12.8, assure que* $\mathrm{e}^{0i} = 1$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-it} = \frac{1}{\mathrm{e}^{it}}$.

Proposition 12.6 La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes. La réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

Démonstration.

- Soit G, G', G'' trois groupes, f un morphisme de $G \to G'$ et g un morphisme de $G' \to G''$. Soit $x, y \in G^2$.

  $$(g \circ f)(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = (g \circ f)(x)(g \circ f)(y)$$

  Donc $g \circ f$ est un morphisme de groupes de $G \to G''$.

- On suppose que f est bijective. Soit $(x, y) \in G'^2$.

$$f(f^{-1}(x)f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x))f(f^{-1}(y)) = xy$$

donc en composant par f^{-1} à gauche, $f^{-1}(x)f^{-1}(y) = f^{-1}(xy)$. f^{-1} est donc un morphisme de groupes de G' dans G, et le caractère bijectif résulte des propriétés des bijections. ∎

12.3 Sous-groupes

Définition 12.9 Soit G un groupe. On appelle sous-groupe de G toute partie H de G non vide et telle que pour tout $(x, y) \in H^2$, $xy \in H$ et $x^{-1} \in H$.

Exemple 12.9 Soit f une fonction réelle périodique définie sur $\mathbb{R}$. L'union de $\{0\}$ et de l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Remarque 12.8 Le neutre d'un groupe appartient nécessairement à tous ses sous-groupes.

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On remarque que H muni de la loi de composition interne qui à x, y dans H associe le produit xy calculé dans G est un groupe. Ce point est souvent utile pour prouver qu'un ensemble est un groupe : on montre que c'est un sous-groupe d'un groupe connu.

Proposition 12.7 Soit G un groupe. L'intersection de deux sous-groupes de G est un sous-groupe de G. En revanche, l'union de deux sous-groupes n'est est pas toujours un, et le complémentaire d'un sous-groupe n'est jamais un sous-groupe de G (ne contient pas l'élément neutre).

Proposition 12.8 Soit G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. L'image directe par f d'un sous-groupe H de G est un sous-groupe de G'. L'image réciproque d'une sous-groupe H' de G' est une sous-groupe de G.

Démonstration.

- Par définition, $1 \in H$. On en déduit $f(1) \in f(H)$. Or $f(1) = 1$ donc $1 \in f(H)$ qui est donc non vide.
  Soit $x', y' \in f(H)^2$. On a par définition $x, y \in H$ tel que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$.
  On a $x'y'^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) \in f(H)$. Donc $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
- Comme $1 \in H'$ et $f(1) = 1$, $1 \in f^{-1}(H')$. De plus, soit $(x, y) \in f^{-1}(H)^2$. On a $f(x) \in H'$ et $f(y) \in H'$ donc $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H'$.

Donc $xy^{-1} \in f^{-1}(H')$. Donc $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. ■

Définition 12.10 Soit G et G' deux groupes, f un morphisme de groupes de G dans G'. Le sous-groupe $f(G)$ de G' est appelé image de f et noté $\mathrm{Im}(f)$. Le sous-groupe $f^{-1}(\{1\})$ de G est appelé noyau de f et noté $\mathrm{Ker}(f)$.

Proposition 12.9 Soit G et G' deux groupes. Un morphisme de groupes f de G dans G' est surjectif ssi $\mathrm{Im}(f) = G'$ et injectif ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit au neutre de G.

Démonstration.

- Le premier point découle de la définition. Supposons f injective. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f)^2$. On a $f(x) = 1$ et $f(y) = 1$ donc $f(x) = f(y)$ et $x = y$. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ a un seul élément et contient 1 car c'est un sous-groupe. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$.
- Si $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$, soit $x, y \in G^2$ tel que $f(x) = f(y)$. On a $f(x)f(y)^{-1} = 1$ donc $f(xy^{-1}) = 1$ donc $xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(f) = \{1\}$ donc $x = y$ et f est injective. ■

Exemple 12.10 Le noyau du morphisme dans l'exemple 12.8 est $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 12.9 Soit G et G' deux groupes abéliens, f un morphisme de groupes de G dans G' et $b \in G'$. L'ensemble des solutions de l'équation (E) : $f(x) = b$ d'inconnue $x \in G$ est $\{a + y, y \in \mathrm{Ker}(f)\}$ où a est une solution particulière de (E). En effet, $x \in G$ est solution de (E) ssi $f(x) = b$ ssi $f(x) = f(a)$ ssi $f(x - a) = 0$ ssi $x - a \in \mathrm{Ker}(f)$.

Résoudre (E) revient donc à résoudre $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in G$, puis chercher une solution particulière de (E).

12.4 Structure d'anneau et de corps

12.4.1 Définitions et exemples

Définition 12.11 On appelle anneau tout triplet $(A, +, \times)$ où A est un ensemble muni de deux lois de composition interne usuellement dénommées addition et multiplication, vérifiant :

- $(A, +)$ est un groupe abélien de neutre 0 appelé élément nul.
- $\times$ est associative et possède un neutre noté 1 et appelé élément unité.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

On dit que A est un anneau commutatif ssi $\times$ est commutative. On appelle anneau nul tout anneau contenant un seul élément (seul type d'anneau où $0 = 1$).

Dans tous les anneaux, on note additivement la première loi et multiplicativement la deuxième, sauf s'il existe déjà un nom officiel aux lois considérées.

Définition 12.12 On appelle corps tout anneau non nul où tout élément distinct de 0 est inversible.

Exemple 12.11
- $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.
- $(C^3(\mathbb{R}), +, \times)$, $(C^\infty(]1, 2[), +, \times)$ sont des anneaux commutatifs mais pas des corps.
- $(\{x \mapsto ax, a \in \mathbb{R}\}, +, \circ)$ est un corps.

Définition 12.13 On appelle sous-anneau d'un anneau A toute partie de A qui est un sous-groupe additif de $(A, +)$, stable par $\times$ et contient 1.

On appelle sous-corps d'un corps K tout sous-anneau de A qui est un corps.

Remarque 12.10 Comme pour les groupes, prouver que B est un sous-anneau de A permet de prouver que B est un anneau. On montre alors que c'est un sous-anneau d'un anneau connu.

12.4.2 Règles de calculs dans un anneau

Dans un anneau $(A, +, \times)$, on dispose des règles valables dans tout groupe abélien et de celles liées au caractère associatif de la multiplication. On a de plus les résultats suivants.

Proposition 12.10 Pour tout $(x, y, n) \in A^2 \times \mathbb{Z}$, $x(ny) = (nx)y = n(xy)$.

Démonstration.
- Montrons le résultat pour $n = 0$. On a $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$ donc $x0 = 0$. De même $0x = 0$.
- Montrons le résultat pour $n = -1$. On a $0 = x0 = x(y-y) = xy+x(-y)$ donc $x(-y) = -(xy)$. On montre de même que $(-x)y = -(xy)$.
- Le résultat annoncé découle de la distributivité de $\times$ sur $+$ et du deuxième point. ■

Remarque 12.11 Si A n'est pas l'anneau nul, $(A, \times)$ n'est pas un groupe, puisque pour tout $x \in A$, $0x = x0 = 0$.

De plus, si $(x, y) \in A^2$, $(-x)(-y) = -(x(-y)) = --(xy) = xy$. On peut donc appliquer les règles de signe classique.

Proposition 12.11 Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux éléments de A qui commutent (ie $ab = ba$).

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-1-p} = (a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^{p-1} b^{n-p}$$

Démonstration. Comme dans $\mathbb{C}$. ■

Remarque 12.12 La première formule est la formule de Newton. La seconde permet de trouve la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison a telle que $1-a$ soit inversible.

Définition 12.14 On dit que $x \in A$ est un diviseur de 0 ssi il existe $y \neq 0$ tel que $xy = 0$ ou $yx = 0$.

On dit que A est intègre ssi il n'a pas de diviseur de 0.

Proposition 12.12 Dans la définition de diviseur de 0, y n'est pas inversible. De même, un diviseur de 0 est clairement non inversible.

Proposition 12.13 Un corps est nécessairement intègre.

Démonstration. Contraposée de la proposition précédente. ■

Exemple 12.12 $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est un anneau non intègre car le produit des deux applications non nulles $x \mapsto \max\{x, 0\}$ et $x \mapsto \min\{x, 0\}$ est nul.

Chapitre 13

Résolution de systèmes linéaires

13.1 Présentation

Définition 13.1 Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une équation linéaire à p inconnues est une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

d'inconnues $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{C}^p$ où $(a_1, \cdots, a_p, b) \in \mathbb{C}^{p+1}$.

Pour donner un système linéaire de n équations à p inconnues, on doit donner $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des familles de complexes de telle sorte que le système soit :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnues $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{C}^p$.

Définition 13.2 Le système homogène à (S) est obtenu en remplaçant $(b_1, \cdots, b_n)$ par $(0, 0, \cdots, 0)$.

Un système est dit compatible si et seulement s'il admet au moins une solution.

13.2 Pivot de Gauss

13.2.1 Opération de Gauss

On considère le système (S) :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$.

On transforme (S) en (S') en remplaçant L_2 par $L_2 - 2L_1$.

$$(S') : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

On a $(S) \Leftrightarrow (S')$.

On présente la résolution de (S) sous la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{22} & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{2}{11} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{11} \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions de (S) est donc :

$$\left\{\left(\frac{14}{11},\frac{4}{11},-\frac{2}{11},-\frac{7}{11}\right)\right\}$$

13.2.2 Quelques exemples

Exemple 13.1 Résoudre

$$(S):\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-x_4=1\\ x_1+x_2+x_3-x_4=0\\ x_1-2x_2-x_3+x_4=1\\ 4x_1-2x_2+x_3-x_4=2\end{cases}$$

d'inconnues $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&1&-1&1\\1&1&1&-1&0\\1&-2&-1&1&1\\4&-2&1&-1&2\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}0&-3&-1&1&1\\\boxed{1}&1&1&-1&0\\0&-3&-2&2&1\\0&-6&-3&3&2\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}0&-3&-1&\boxed{1}&1\\\boxed{1}&-2&0&0&1\\0&3&0&0&-1\\0&3&0&0&-1\end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&-1&\boxed{1}&0\\\boxed{1}&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\\0&\boxed{3}&0&0&-1\end{array}\right)$$

Il y a une colonne sans pivot, ce qui correspond à une colonne de paramètre. Donc l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est :

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},t,t\right),t\in\mathbb{R}\right\}$$

Exemple 13.2 Soit $a\in\mathbb{C}$. Résoudre :

$$(S):\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=a\\2x_1+5x_2+3x_3=a+1\\x_1+x_2+4x_3=2a\\x_1+4x_2-x_3=0\end{cases}$$

d'inconnues $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 5 & 3 & a+1 \\ 1 & 1 & 4 & 2a \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 3a - \frac{7}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{4} - a \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

On a alors une condition de compatibilité.
Si $a = 1$, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$.
Si $a \neq 1$, $\mathscr{S} = \varnothing$.

Conclusion :

- On effectue des opérations de Gauss sur la matrice représentant le système manipulé jusqu'à ce qu'il n'existe plus de pivots possibles (c'est-à-dire qu'il n'y ait plus de coefficients non nuls appartenant à une ligne et à une colonne sans pivot).
- Les lignes de zéros donnent des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité.
- Lorsque le système est compatible, on peut écrire l'ensemble des solutions en le paramétrant à l'aide des colonnes sans pivot.

13.3 Compléments pour limiter les calculs

Sachant que multiplier une équation par un nombre non nul ne modifie pas l'ensemble des solutions de cette équation, on peut utiliser les opérations $L \leftarrow aL + bL'$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on code les opérations.

Exemple 13.3 Résoudre le système

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

d'inconnues $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 1 \\ 4 & \boxed{3} & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -1 \\ 4 & \boxed{3} & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - 4L_2$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{5} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{15} & 9 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow 5L_2 - 4L_1$$

Le couple $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ est donc l'unique solution du système.

Si on cherche une condition de compatibilité d'un système, on peut se contenter d'un pivot partiel.

Exemple 13.4 Soit $a \in \mathbb{C}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (S) soit compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & a \\ 2 & 5 & 3 & a+1 \\ 1 & 1 & 4 & 2a \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 2 & -2 & -a \end{array}\right)$$

On s'intéresse alors au sous-système (S') constitué de (S) privé des colonnes et des lignes où il y a un pivot. (S') a la (ou les) même(s) condition(s) de compatibilité que (S).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 2 & -2 & -a \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & a-2 \end{array}\right)$$

De même, le système (S'') constitué de (S) privé des lignes et des colonnes contentant un pivot a la (ou les) même(s) condition(s) de compatibilité que (S).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & a-2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

On trouve alors la condition de compatibilité : $a - 1 = 0$.

13.4 Compatibilité d'un système linéaire

Définition 13.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On associe à chaque système (S) de n équations à n inconnues un nombre appelé déterminant de (S), noté $\det(S)$ et ayant les propriétés suivantes :

- Si $\det(S) \neq 0$, (S) admet une unique solution.

- Si $\det(S) = 0$, (S) admet zéro ou une infinité de solutions.
- Si $\det(S) \neq 0$ et (S) homogène, (S) admet $(0, 0, \cdots, 0)$ pour unique solution.
- Si $\det(S) \neq 0$ et (S) homogène, (S) admet une infinité de solutions.

On suppose $n = 2$. Soit $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{C}^6$. On considère :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

On a $\det(S) = ab' - ba'$.

On suppose $n = 3$. Soit $(a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'') \in \mathbb{C}^{12}$. On considère :

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$\det(S) = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b$.

Exemple 13.5 Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le système

$$(S) : \begin{cases} x_1 - ax_2 + (a+1)x_3 = 1 \\ ax_1 - x_2 + 2ax_3 = a + 2 \\ x_1 - x_2 + (1-a)x_3 = 0 \end{cases}$$

d'inconnues $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ soit compatible.

$\det(S) = a(1-a)(3+a)$ donc si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -3\}$, (S) est compatible.

Si $a = 0$ ou $a = 1$, un pivot partiel assure que (S) est incompatible.

Si $a = -3$, (S) est compatible.

Finalement (S) est compatible si et seulement si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

Chapitre 14

Structure d'espace vectoriel

Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \times)$ désigne un corps.

14.1 Présentation

Définition 14.1 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ noté $\perp$. On dit que $(E, +, \perp)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si et seulement si :

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- pour tout $(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E$, $\lambda \perp (\mu \perp x) = (\lambda\mu) \perp x$.
- pour tout $x \in E$, $1 \perp x = x$.
- pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$, $\lambda \perp (x + y) = \lambda \perp x + \lambda \perp y$.
- pour tout $(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E$, $(\lambda + \mu) \perp x = \lambda \perp x + \mu \perp x$.

Dans ce cas, les éléments de E s'appellent des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

$\perp$ se note $\cdot$ (et s'oublie). On retient que $\cdot$ est prioritaire sur $+$.

En particulier le deuxième point se réécrit : pour tout $(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E$, $\overbrace{(\underbrace{\lambda\mu}_{interne})x}^{externe} = \underbrace{\lambda(\overbrace{\mu x}^{externe})}_{externe}$.

Exemple 14.1 On pose :

$$+ : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{cases}$$

$$\perp \; : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{cases}$$

On note que $(\mathbb{K}, + \perp)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cette structure est dite canonique sur $\mathbb{K}$.

Exemple 14.2 Soient $(E, +, \cdot)$ et $(E', +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On pose :

$$+ : \begin{cases} (E \times E') \times (E \times E') & \to & E \times E' \\ ((x, x'), (y, y')) & \mapsto & (x + y, x' + y') \end{cases}$$

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times (E \times E') & \to & E \times E' \\ (\lambda, (x, x')) & \mapsto & (\lambda x, \lambda x') \end{cases}$$

$(E \times E', +, \cdot)$ est un espace vectoriel. On dit qu'on a muni $E \times E'$ de sa structure vectorielle canonique.

Remarque 14.1 Soit $(x, y) \in E \times E'$.

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) = (0, 0) + (x, y)$$

Donc $(0, 0)$ *est le neutre pour* $+$. *On le note* 0.

Remarque 14.2 On peut généraliser la construction à plus de 2 $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. En particulier, pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, *on a une structure vectorielle canonique sur* $\mathbb{K}^n$.

Exemple 14.3 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble non vide. On considère :

$$+ : \begin{cases} E^X \times E^X & \to & E^X \\ (f, g) & \mapsto & f + g : \begin{cases} X & \to & E \\ t & \mapsto & f(t) + g(t) \end{cases} \end{cases}$$

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} & \to & E^X \\ (\lambda, f) & \mapsto & \lambda f : \begin{cases} X & \to & E \\ t & \mapsto & \lambda f(t) \end{cases} \end{cases}$$

$(E^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'on a muni E^X de sa structure vectorielle canonique.

Application : Soit I un intervalle. $\mathbb{R}^I$ a une structure vectorielle canonique couramment utilisée.

$\mathbb{C}^I$ a une structure vectorielle canonique couramment utilisée.

Remarque 14.3 Soit $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $\lambda x = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *ou* $\lambda = 0$.

Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x) = -\lambda x$.

Démonstration. Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$.

- $\lambda \times 0 + \lambda \times 0 = \lambda(0+0) = \lambda \times 0 = \lambda \times 0 + 0$ donc $\lambda \times 0 = 0$.
  De même, $0x + 0x = (0+0)x = 0x = 0x + 0$ donc $0x = 0$.
- Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. On suppose $\lambda x = 0$ et $\lambda \neq 0$.
  $\mathbb{K}$ est un corps et $\lambda \neq 0$ donc λ est inversible.
  $\lambda^{-1}(\lambda x) = (\lambda^{-1} \times \lambda)x = 1x = x$
  Or $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0$.
  Donc $x = 0$
- Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. On a $\lambda x + (-\lambda)x = (\lambda + (-\lambda))x = 0x = 0$.
  Or $+$ commute dans E donc $-(\lambda x) = (-\lambda)x$.
  De même, $\lambda x + \lambda(-x) = \lambda(x + (-x)) = \lambda 0 = 0$.
  Or $+$ commute dans E donc $-(\lambda x) = \lambda(-x)$.
  On en déduit le résultat. ∎

Remarque 14.4 *Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$. $\lambda x = \lambda y$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = y$;*

14.2 Sous-espaces vectoriels

14.2.1 Définition

Définition 14.2 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée sous-espace vectoriel de$E$ si et seulement si :
- $F \neq \varnothing$
- pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$
- pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F$, $\lambda x \in F$

Remarque 14.5
- *Avec les notations de l'énoncé de la définition, F est un sous-groupe de $(E, +)$. En particulier $0 \in F$.*
- *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \varnothing$ et pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$, $\lambda x + y \in F$.*
- *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On considère :*

$$\oplus : \begin{cases} F \times F & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{cases}$$

$$\odot : \begin{cases} \mathbb{K} \times F & \to & F \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{cases}$$

  On note que $(F, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En pratique $\oplus$ est notée $+$ et $\odot$ est notée $\cdot$.
  Donc, pour montrer que $(T, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on peut montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Exemple 14.4 L'ensemble $\mathscr{L}$ des fonctions lipschitziennes muni des opérations usuelles est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, donc est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble des suites complexes convergentes muni des opérations usuelles est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.

14.2.2 Stabilité de la notion de sous-espace vectoriel

<u>Théorème 14.1</u> *Soit I un ensemble non vide et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

$$\bigcap_{i\in I} F_i$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, $0 \in F_i$ donc $0 \in \bigcap_{i\in I} F_i$. En particulier, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^2$ et $i \in I$.

$(\lambda, x, y) \in \mathbb{K}\times F_i$ et F_i est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\lambda x+y \in F_i$.

Donc $\lambda x + y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

Donc $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Remarque 14.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A. $\mathcal{F} \neq \varnothing$ car $E \in \mathcal{F}$.

On pose :

$$F = \bigcap_{G\in\mathcal{F}} G$$

F est un sous-espace vectoriel de E. A est une partie de F.

F est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E ayant les deux propriétés précédentes, c'est-à-dire, pour tout sous-espace vectoriel F' de E contenant A, $F \subset F'$.

L'espace F est appelé sous-espace vectoriel de E et engendré par A, noté $\operatorname{Vect}\{A\}$.

<u>Définition 14.3</u> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que A est une partie génératrice de A si et seulement si $E = \operatorname{Vect}\{A\}$.

Exemple 14.5 $\operatorname{Vect}\{\varnothing\} = \{0\}$, $\operatorname{Vect}\{E\} = E$ et pour tout $x_0 \in E \setminus \{0\}$, $\operatorname{Vect}\{x_0\} = \{\lambda x_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Proposition 14.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$.

$$\mathrm{Vect}\,\{x_1, \cdots, x_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

Démonstration. On pose $F = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$.

- Comme $\mathrm{Vect}\,\{x_1, \cdots, x_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \cdots x_n$, $F \subset \mathrm{Vect}\,\{x_1, \cdots, x_n\}$.
- – Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

  $$x_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} x_k$$

  Donc $x_i \in F$ donc $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset F$. En particulier $F \neq \varnothing$.

  – Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times F^2$.

  Il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i$.

  Il existe $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \mu_i x_i$.

  $$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\lambda_i + \mu_i) x_i$$

  Or $(\lambda\lambda_1 + \mu_1, \lambda\lambda_2 + \mu_2, \cdots, \lambda\lambda_n + \mu_n) \in \mathbb{K}^n$.

  – Finalement, F est un sous-espace vectoriel de E contenant $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ donc $\mathrm{Vect}\,\{x_1, \cdots, x_n\} \subset F$. ∎

Exemple 14.6 On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $y'' + 3y' - 4y = 0$. On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ usuel.

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-4x}\right\}$$

En particulier $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Remarque 14.7 La propriété précédente permet de trouver des sous-espaces vectoriels sans utiliser la définition.

Exemple 14.7 On pose $A = \{(\lambda n + (3\mu + \lambda)e^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. On veut montrer que A est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- On peut utiliser la définition (si le colleur est cinglé).
- On peut montrer à l'aide de la définition que A est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.
- On écrit A sous la forme $\mathrm{Vect}\,\{(n + e^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3e^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ donc A est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;

Remarque 14.8 *Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (considérer* 0*). L'union de deux sous-espaces vectoriels n'en est pas forcément un.*

Exercice : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F \subset G)$ ou $(G \subset F)$.

Si $F \subset G$ ou $G \subset F$, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et $F \not\subset G$.

Il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$. $x \in F \cup G$.

Soit $y \in G$. $y \in F \cup G$ et $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel donc $x + y \in F \cup G$.

On suppose $x + y \in G$. G est un espace vectoriel donc $x + y - y \in G$, donc $x \in G$.

Il y a donc contradiction. Donc $x + y \notin G$. Or $x + y \in F \cup G$ donc $x + y \in F$.

F est un espace vectoriel donc $y + x - x \in F$ donc $y \in F$.

On a donc $G \subset F$.

14.2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 14.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G et on note $F + G$ la partie de F égale à $\{x + y, (x, y) \in F \times G\}$.

THÉORÈME 14.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.

- $(0, 0) \in F \times G$ donc $0 \in F + G$ donc $F + G \neq \varnothing$.
- Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times (F + G)^2$.
  Il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$. Il existe $(c, d) \in F \times G$ tel que $y = c + d$.

  $$\lambda x + y = \lambda a + \lambda b + c + d = (\lambda a + c) + (\lambda b + d)$$

  Or $\lambda a + c \in F$ et $\lambda b + d \in G$ donc $\lambda x + y \in F + G$.
  Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel.

■

Remarque 14.9

- $F + G = \text{Vect}\{F \cup G\}$.

- *Si F est un sous-espace vectoriel de E distinct de E,* $\text{Vect}\{E \setminus F\} = E$.

<u>THÉORÈME 14.3</u> *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La décomposition de tout vecteur de $F+G$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.*

Démonstration.
- On suppose $F \cap G = \{0\}$.
  Soit $(x, y, x', y') \in (F \times G)^2$ tel que $x + y = x' + y'$.
  On a $x - x' = y' - y$. Or $x - x' \in F$ et $y' - y \in G$ donc $(x - x', y' - y) \in (F \cap G)^2$.
  Donc $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$. Donc $x = x'$ et $y = y'$.
- On suppose que tout élément se décompose de manière unique.
  Soit $x \in F \cap G$.
  $$x + (-x) = 0 = 0 + 0$$
  Or $(x, -x) \in F \times G$ donc $0 = x$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$. L'autre inclusion est claire. ■

<u>Définition 14.5</u> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

On dit que F et G sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique sur $F \times G$. Dans ce cas, on note $E = F \oplus G$.

Exemple 14.8
- $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\{(1, 2)\} \oplus \text{Vect}\{(3, 7)\}$.
- $(\mathbb{C}, +, \underbrace{\times}_{\text{réelle}})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C} = \text{Vect}\{1\} \oplus \text{Vect}\{i\}$.
- On appelle $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $\mathscr{Z}$ l'ensemble des suites convergant vers 0 et $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites constantes.
  $\mathscr{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{Z}$ et $\mathscr{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}$. De plus, $\mathscr{C} = \mathscr{Z} \oplus \mathscr{A}$.

Démonstration.
- Une suite constante qui converge vers 0 est nulle donc $\mathscr{Z} \cap \mathscr{A} \subset \{0\}$.
- Il est clair que $\{0\} \subset \mathscr{Z} \cap \mathscr{A}$.
- Soit $u \in \mathscr{C}$. On note l la limite de u.
  On note que $u = (u - l) + l$, $u - l \in \mathscr{Z}$ et $l \in \mathscr{A}$. Donc $u \in \mathscr{Z} + \mathscr{A}$.
  Donc $\mathscr{C} \subset \mathscr{Z} + \mathscr{A}$.
- Il est clair que $\mathscr{Z} + \mathscr{A} \subset \mathscr{C}$.

Finalement, $\mathscr{Z} \oplus \mathscr{A} = \mathscr{C}$. ■

Exemple 14.9 On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires et $\mathscr{I}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Démonstration.

- Soit $f \in \mathscr{P} \cap \mathscr{I}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -f(-x) = -f(x)$$

  Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
  Donc $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} \subset \{0\}$.
- Il est clair que $\{0\} \subset \mathscr{P} \cap \mathscr{I}$.
- Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

  On vérifie que $g \in \mathscr{P}$, $h \in \mathscr{I}$ et $g + h = f$.
  Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset \mathscr{P} + \mathscr{I}$.
- Il est clair que $\mathscr{P} + \mathscr{I} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Finalement, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$. ■

14.3 Applications linéaires

14.3.1 Vocabulaire

Définition 14.6 Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in E'^E$. On dit que u est une application linéaire si et seulement si :

- pour tout $(x, y) \in E^2$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$.
- pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

Remarque 14.10 u est une application linéaire si et seulement si pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$, $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.

Si u est une application linéaire, u est un morphisme de groupes de $(E, +)$ *dans* $(E', +)$. *En particulier,* $u(0) = 0$ *et pour tout* $x \in E$, $u(-x) = -u(x)$.

Définition 14.7

- L'ensemble des applications linéaires de E dan E' se note $L(E, E')$.
- On appelle isomorphisme de E dans E' toute application linéaire bijective de E dans E'.

- On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de $(E, +, \cdot)$ dans $(E, +, \cdot)$. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $L(E)$.
- On appelle automorphisme de E toute application linéaire bijective de $(E, +, \cdot)$ dans lui-même. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.
- On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de $(E, +, \cdot)$ dans $\mathbb{K}$ muni de sa structure vectorielle canonique. L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le dual de E.

Exemple 14.10

- On pose :
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x - y, 2x + y) \end{cases}$$
Soit $((x, y), (x', y'), \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R}$.
$$f(\lambda(x, y) + (x', y')) = (3(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + \lambda y + y')$$
$$\begin{aligned} \lambda f(x, y) + f(x', y') &= \lambda(3x - y, 2x + y) + (3x' - y', 2x' + y') \\ &= (3\lambda x - \lambda y + 3x' - y', 2\lambda x + \lambda y + 2x' + y') \\ &= (3(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + \lambda y + y') \end{aligned}$$
Donc $f(\lambda(x, y) + (x', y')) = \lambda f(x, y) + f(x', y')$.
Donc $f \in L(\mathbb{R}^2)$.
- $$f : \begin{cases} C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt \end{cases} \in L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$
- On pose :
$$f : \begin{cases} D^2([0, 1]) & \to & \mathbb{R}^{[0,1]} \\ g & \mapsto & g'' + 3 \operatorname{Id} g' - g \end{cases}$$
Soit $(\lambda, g_1, g_2) \in \mathbb{R} \times (D^2([0, 1]))^2$.
$$\begin{aligned} f(\lambda g_1 + g_2) &= \lambda g_1'' + g_2'' + 3 \operatorname{Id} g_1' + 3 \operatorname{Id} g_2' - \lambda g_1 - g_2 \\ &= \lambda(g_1'' + 3 \operatorname{Id} g_1' - g_1) + (g_2'' + 3 \operatorname{Id} g_2' - g_2) \\ &= \lambda f(g_1) + f(g_2) \end{aligned}$$
Donc f est linéaire.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. On pose :
$$f : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{cases}$$
On vérifie que $f \in GL(E)$. f est appelée homothétie de rapport λ.

14.3.2 Image directe et réciproque de sous-espaces vectoriels

THÉORÈME 14.4 *Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in L(E, E')$.*
- *Soit F un sous-espace vectoriel de E, $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E'.*
- *Soit F' un sous-espace vectoriel de E', $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.
- Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times (u(F))^2$.
  Il existe $x' \in F$ tel que $x = u(x')$ et $y' \in F$ tel que $y = u(y')$.
  On a $\lambda x + y = u(\lambda x' + y')$. Or $\lambda x' + y' \in F$. Donc $\lambda x + y \in u(F)$.
  De plus, $0 \in F$ et $u(0) = 0$ donc $0 \in u(F)$ donc $u(F) \neq \varnothing$.
  Donc $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E'.
- Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times u^{-1}(F')$.
  $u(x) \in F'$ et $u(y) \in F'$ donc $\lambda u(x) + u(y) \in F'$ donc $u(\lambda x + y) \in F'$.
  Donc $\lambda x + y \in u^{-1}(F')$.
  De plus, $u(0) = 0$ et $0 \in F'$ donc $0 \in u^{-1}(F')$. Donc $u^{-1}(F') \neq \varnothing$.
  Donc $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

■

Remarque 14.11 *En particulier* $\mathrm{Ker}(u)$ *est un sous-espace vectoriel de E et* $\mathrm{Im}(u)$ *un sous-espace vectoriel de E'.*

14.3.3 Équations linéaires

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in L(E, E')$ et $y \in E'$.

On considère l'équation $(E) : u(x) = y$, d'inconnue $x \in E$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de E.

Soit $\mathscr{S} = \varnothing$, soit il existe $x_0 \in \mathscr{S}$. Dans ce cas, $\mathscr{S} = \{x_0 + y, y \in \mathrm{Ker}(u)\}$.

De plus, le principe de superposition s'applique.

Exemple 14.11 Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $(E) : y'' + 3y' - y = a$, d'inconnue $y \in D^2(\mathbb{R})$.

Pour étudier (E), on introduit :

$$u : \begin{cases} D^2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ g & \mapsto & g'' + 3g' - g \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et (E) est l'équation $u(g) = a$ d'inconnue $g \in D^2(\mathbb{R})$.

On note que u est linéaire. On peut donc appliquer le principe de superposition des solutions. De plus, si on trouve une solution g_0 de (E), l'ensemble des solutions de (E) est $\{g_0 + g, g \in \mathrm{Ker}(u)\}$.

14.3.4 Structure de $L(E, E')$

<u>THÉORÈME 14.5</u> *Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $L(E, E')$ muni des lois usuelles de E'^E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. $L(E, E')$ est une partie de E'^E. $L(E, E') \neq \varnothing$ car $x \to 0 \in L(E, E')$;

Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times (L(E, E'))^2$.

Soit $(\mu, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$.

$$\begin{aligned}(\lambda u + v)(\mu x + y) &= \lambda u(\mu x + y) + v(\mu x + y) \\ &= \lambda \mu u(x) + \lambda u(y) + \mu v(x) + v(y) \\ &= \mu(\lambda u(x) + v(x)) + \lambda u(y) + v(y) \\ &= \mu(\lambda u + v)(x) + (\lambda u + v)(y)\end{aligned}$$

Donc $\lambda u + v \in L(E, E')$.

Donc $L(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de E'^E, donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ∎

<u>THÉORÈME 14.6</u> *Soient E, E' et E'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in L(E, E')$ et $v \in L(E', E'')$.*

$v \circ u \in L(E, E'')$ et, si u est bijective, $u^{-1} \in L(E', E)$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$.

$$\begin{aligned}(v \circ u)(\lambda x + y) &= v(u(\lambda x + y)) \\ &= v(\lambda u(x) + u(y)) \\ &= \lambda v(u(x)) + v(u(y)) \\ &= \lambda(v \circ u)(x) + (v \circ u)(y)\end{aligned}$$

  Donc $v \circ u$ est linéaire.
- On suppose u bijective.
  Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E'^2$.

$$u(\lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y)) = \lambda u(u^{-1}(x)) + u(u^{-1}(y)) = \lambda x + y = u(u^{-1}(\lambda x + y))$$

  Donc, comme u est bijective, $u^{-1}(\lambda x + y) = \lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y)$.
  Donc u^{-1} est linéaire. ∎

On tire des résultats précédents les résultats suivants :

- $(L(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $(L(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif et non intègre en général) (il reste à vérifier que $\mathrm{Id} \in L(E)$ et que $\circ$ est distributive par rapport à $+$).
- Les éléments de $(L(E), +, \circ)$ symétrisables pour $\circ$ sont les éléments de $GL(E)$. $(GL(E), \circ)$ est un groupe appelé groupe linéaire de E.
- Pour tout $(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times (L(E))^2$, $(\lambda u) \circ v = \lambda(u \circ v) = u \circ (\lambda v)$.

Attention : $(L(E), +, \circ)$ est un anneau donc $\circ$ peut être notée multiplicativement s'il n'y a pas de confusion possible avec une autre loi notée multiplicativement.

14.4 Liens entre applications linéaires et sommes directes

14.4.1 Construction d'une application linéaire

Théorème 14.7 *Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Soit $u \in L(F, E')$ et $v \in L(G, E')$.

Il existe une unique $w \in L(E, E')$ telle que :

$$\begin{cases} w|_F = u \\ w|_G = v \end{cases}$$

Démonstration.

- Soit $w \in L(E, E')$ vérifiant les conditions de l'énoncé.
  Soit $x \in E$. Il existe un unique $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
  $$w(x) = w(y) + w(z) = u(y) + v(y)$$
  Donc on a une seule manière de calculer $w(x)$. Ceci montre la partie unicité du théorème ;
- On définit w un application de E dans E' de la manière suivante : pour tout $x \in E$, $w(x)$ est le vecteur $u(y) + v(z)$ où (y, z) est l'unique décomposition de x sur $F + G$.
  - Soit $x \in F$. $x = x + 0$ et $(x, 0) \in F \times G$. Par définition $w(x) = u(x) + v(0) = u(x)$.
    Donc $w|_F = u$.
  - De même, $w|_G = w$.
  - Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2$.
    Il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$ et $(c, d) \in F \times G$ tel que $y = c + d$.

$$\begin{aligned}\lambda w(x) + w(y) &= \lambda u(a) + \lambda v(b) + u(c) + v(d) \\ &= u(\lambda a + c) + v(\lambda b + d) \\ &= w(\lambda a + c) + x(\lambda b + d) \\ &= w(\lambda a + \lambda b + c + d) \\ &= w(\lambda x + y)\end{aligned}$$

Donc w est linéaire. ■

Remarque 14.12 L'unicité est souvent utile pour prouver la nullité d'une application (nulle sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires).

Application : Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$. Si $f(0,1) = (0,0)$ et $f(1,0) = (0,0)$, alors $f = 0$.

Exercice : Soit (f, g) deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ ayant le même noyau $\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = \lambda g$.

- $(0,0,1) \notin \text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ donc $f(0,0,1) \neq 0$ et $g(0,0,1) \neq 0$. On pose donc $\lambda = \frac{f(0,0,1)}{g(0,0,1)}$. $\lambda \in \mathbb{R}^*$;
- $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\} \oplus \text{Vect}\{(0,0,1)\}$.
- Comme $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\} = \text{Ker}(g)$, $f|_{\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}} = \lambda g|_{\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}}$.
- De plus, $f(0,0,1) = \frac{f(0,0,1)}{g(0,0,1)} g(0,0,1) = \lambda g(0,0,1)$. Donc $f|_{\text{Vect}\{(0,0,1)\}} = \lambda g|_{\text{Vect}\{(0,0,1)\}}$.
- Le théorème précédent assure que $f = \lambda g$.

14.4.2 Projecteurs d'un espace vectoriel

Définition 14.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'unique application linéaire de E dans E dont la restriction sur G est nulle et la restriction sur F est l'injection canonique de F dans E (Id).

Théorème 14.8 *Soit $x \in E$. Il existe un unique $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$. Par définition, $p(x) = a$.*

Exemple 14.12 On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathbb{C} = \text{Vect}\{1\} \oplus \text{Vect}\{i\}$.

La projection sur $\text{Vect}\{1\}$ parallèlement à $\text{Vect}\{i\}$ est appelée partie réelle. La projection sur $\text{Vect}\{i\}$ parallèlement à $\text{Vect}\{1\}$ est appelée partie imaginaire.

Exemple 14.13 On a montré que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$. On note p le projecteur sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$. On a $p(\exp) = \mathrm{ch}$.

Remarque 14.13 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G.*

- $\mathrm{Ker}(p) = G$.
- $\mathrm{Im}(p) = F = \{x \in E, p(x) = x\}$.

Démonstration.

- Par définition, $G \subset \mathrm{Ker}(p)$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$.
  $$0 = p(x) = p(a + b) = p(a) + p(b) = a + 0 = a$$
  Donc $x = b$ donc $x \in G$. Donc $\mathrm{Ker}(p) \subset G$.
  Finalement, $G = \mathrm{Ker}(p)$.
- Par définition, $\mathrm{Im}(p) \subset F$.
  Soit $x \in F$. $p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(p)$ donc $F \subset \mathrm{Im}(p)$.
  Finalement $F = \mathrm{Im}(p)$. ■

Remarque 14.14

- *Le dernier point permet de ramener la recherche de* $\mathrm{Im}(p)$ *à une résolution d'équation.*
- *On note q le projecteur sur G parallèlement à F. $p + q = \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$.*

<u>Théorème 14.9</u> *Soit $u \in L(E)$. u est un projecteur si et seulement si $u \circ u = u$.*

Démonstration.

- On suppose $u \circ u = u$. On montre $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$.
  - Soit $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$.
    Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et $u(x) = 0$.
    $$0 = u(x) = u(u(y)) = u(y) = x$$
    Donc $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \subset \{0\}$.
  - Il est clair que $\{0\} \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$.
  - Soit $x \in E$.
    On remarque que $x = x - u(x) + u(x)$.
    Or $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $x - u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
    En effet, $u(x - u(x)) = u(x) - u(u(x)) = 0$.
    Donc $E \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u)$.

  - Il est clair que $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u) \subset E$.
- On appelle p le projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.
  - Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Par définition, $u(x) = 0$ et, par construction, $p(x) = 0$. Donc p et u coincident sur $\mathrm{Ker}(u)$.
  - Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Par définition, $u(x) = x$ et, par construction, $p(x) = x$. Donc p et u coincident sur $\mathrm{Im}(u)$.
  - Finalement, p et u coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires donc sont égales. En particulier, u est un projecteur. ■

14.4.3 Symétries d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 14.9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'unique application linéaire s telle que :

$$s|_F : \begin{cases} F & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

$$s|_G : \begin{cases} G & \to & E \\ x & \mapsto & -x \end{cases}$$

Remarque 14.15 Soit $x \in E$. Il existe un unique $(z, y) \in G \times F$ tel que $x = y + z$. Par définition, $s(x) = y - z$.

Si on note p la projection sur F parallèlement à G, $s = 2p - \mathrm{Id}$.

THÉORÈME 14.10 *Soit $u \in L(E)$. u est une symétrie si et seulement si $u^2 = \mathrm{Id}$.*

Démonstration.
- On suppose que u est une symétrie. On appelle p le projecteur $\frac{1}{2}(u+\mathrm{Id})$. Comme Id et p commutent,

$$u^2 = (2p - \mathrm{Id})^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}^2 = \mathrm{Id}$$

- On suppose $u^2 = \mathrm{Id}$. On pose $p = \frac{1}{2}(u + \mathrm{Id})$.

$$p^2 = \frac{1}{4}(u + \mathrm{Id})^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u + \mathrm{Id}^2) = \frac{1}{2}(u + \mathrm{Id}) = p$$

  Donc p est un projecteur donc u est une symétrie. ■

COROLLAIRE 14.1 *Les symétries sont bijectives et sont leur propre réciproque.*

Remarque 14.16 *Pour tout $u \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$,*

$$\mathrm{Ker}(\lambda u) = \mathrm{Ker}(u)$$

$$\mathrm{Im}(\lambda u) = \mathrm{Im}(\lambda u)$$

Exercice : Soit $u \in L(E)$ tel que $u \circ u = \mathrm{Id}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.

$$x = u(x) = -x$$

  Donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) \subset \{0\}$.
- Il est clair que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.
- u est une symétrie donc $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - u)$ est un projecteur. Soit $x \in E$.
  On remarque que $x = x - p(x) + p(x)$.
  Par construction, $u(p(x)) = -p(x)$ donc $p(x) \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$
  Et, $u(x-p(x)) = u(x)-u(p(x)) = u(x)+p(x) = \frac{1}{2}(x+u(x)) = x-p(x)$
  donc $u(x) - p(x) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
  Donc $E \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
- Il est clair que $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \subset E$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$.

Chapitre 15

Familles de vecteurs

15.1 Décomposition d'un vecteur

15.1.1 Notations

Définition 15.1 Soit I un ensemble non vide. Une famille de vecteurs de E indicée par I est une application de $I \to E$.

L'ensemble de ces familles est noté E^I.

Remarque 15.1 Si I est fini, pour toute famille $x \in E^I$, $x(I)$ est fini. La somme des vecteurs manipulés se note $\sum_{i \in I} x_i$. De plus, le nombre d'éléments de $x(I)$ est $\mathrm{Card}(I)$.

Définition 15.2 Soit I un ensemble non vide et $x \in E^I$.

On appelle sous-famille de x toute restriction de x et sur-famille de x tout prolongement de x.

Remarque 15.2 En pratique on travaille avec des familles finies. Dans ce cas, on confond, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E^{[\![1,n]\!]}$ et E^n.

Définition 15.3 Soit I un ensemble non vide et $x \in E^I$.

On appelle combinaison linéaire de x tout vecteur $y \in E$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^I$ tel que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

On dit qu'on a une relation linéaire dans la famille x ssi il existe une combinaison linéaire de x nulle à cœfficients non tous nuls.

15.1.2 Familles génératrices

Définition 15.4 Soit I un ensemble, $x \in E^I$.

x est dite génératrice ssi $\mathrm{Vect}\{x_i, i \in I\} = E$.

Remarque 15.3

- *Si I est finie,* $\text{Vect}\{x_i, i \in I\}$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille x.*
- *Il existe des espaces vectoriels n'ayant pas de famille génératrice finie, par exemple $\mathbb{K}[X]$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une famille $(P_1, \cdots, P_n)$ génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Comme $\{\deg(P_i), i \in [\![1, n]\!]\}$ est finie, elle admet un plus grand élément noté p.

Si $P \in \text{Vect}\{P_1, \cdots, P_n\}$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$

Donc $\deg(P) \leqslant p$ et $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}_p[X]$. Contradiction. ∎

<u>Définition 15.5</u> On dit que E est de dimension finie ssi il admet une famille génératrice finie.

Remarque 15.4 *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_p) \in E^{n+p}$.*

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est génératrice et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est une combinaison linéaire de $(y_1, \cdots, y_p)$ alors $(y_1, \cdots, y_p)$ est génératrice.

Démonstration. $\text{Vect}\{y_1, \cdots, y_p\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les x_i donc $E = \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \text{Vect}\{y_1, \cdots, y_p\}$.

Donc $E = \text{Vect}\{y_1, \cdots, y_p\}$. ∎

Exemple 15.1 On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$ et $P_3 = X(X-1)(X-2)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu, \tau) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = \lambda P_0 + \mu P_1 + \nu P_2 + \tau P_3$.

$(1, X, X^2, X^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ et on a :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ P_2 = X(X-1) \\ P_3 = X(X-1)(X-2) \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} 1 = P_0 \\ X = P_1 \\ X^2 = P_1 + P_2 \\ X^3 = P_1 + 3P_2 + P_3 \end{cases}$$

Donc (P_0, P_1, P_2, P_3) est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$, d'où le résultat.

15.1.3 Familles libres

<u>THÉORÈME 15.1</u> *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ supposée génératrice.*

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *il n'y a pas de relation linéaire dans $(x_1, \cdots, x_n)$*

2. *pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.*

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$ Soit $x \in E$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$ et par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$.

$2 \Rightarrow 1$ S'il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.

On note que $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, donc on a deux décompositions distinctes de 0, et la deuxième assertion est fausse. ∎

<u>Définition 15.6</u> Une famille de vecteurs est dite libre ssi il n'y a pas de relation linéaire dans la famille.

Une famille de vecteurs est dite liée ssi elle n'est pas libre.

Remarque 15.5

- *Une famille contenant le vecteur nul est liée*
- *Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée*
- *Soit $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre et $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ liée, alors x_{n+1} est une combinaison linéaire de $(x_1, \cdots, x_n)$.*

Exemple 15.2 Si $(P_1, \cdots, P_n)$ sont des polynômes non nuls tels que $\deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$ alors $(P_1, \cdots, P_n)$ est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0$.

On pose $\mathcal{E} = \{i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0\}$ et on le suppose non vide. Il admet alors un plus grand élément noté k.

$$\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i P_i + \lambda_k P_k = 0$$

Or $\deg(-\lambda_k P_k) = \deg(P_k)$ et $\deg\left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i P_i\right) \leqslant \deg(P_{k-1})$, donc $\deg(P_{k-1}) \geqslant \deg(P_k)$. Contradiction.

Donc $\mathcal{E} = \varnothing$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$ et $(P_1, \cdots, P_n)$ est libre. ∎

15.2 Bases d'un espace vectoriel

15.2.1 Définition et exemples

Définition 15.7 On dit qu'une famille de vecteurs est une base ssi elle est libre et génératrice.

Ainsi, si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E, pour tout $x \in E$, il existe une unique $\lambda \in E^I$ tel que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

La famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ s'appelle coordonnées de y dans x.

Exemple 15.3

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de base 1
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de base $(1, i)$. Dans ce cas, les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires.
- $\mathbb{K}^n$ admet comme base $((\delta_{k,p})_{p\in[\![1,n]\!]})_{k\in[\![1,n]\!]}$ appelée base canonique.
- $\mathbb{K}_n[X]$ admet $(1, X, \cdots, X^n)$ comme base canonique, et pour tout $a \in \mathbb{K}$, $(1, X-a, \cdots, (X-a)^n)$ en est une base.

Remarque 15.6 Dans $\mathbb{K}^2$ *muni de la base canonique* $((1,0),(0,1))$, $(1,2)$ *a pour coordonnées* $(1,2)$.

Si on le munit de la base $((1,0),(1,2))$, $(1,2)$ *a pour coordonnées* $(0,1)$. *Ne pas confondre coordonnées et composantes.*

Attention aussi à $\mathbb{K}_n[X]$ *: les coordonnées sur lisent à l'envers, celle des* $3X^2 - X + 1$ *sont* $(1,-1,3)$.

15.2.2 Existence de base

THÉORÈME 15.2 *Soit* I *un ensemble fini non vide,* $J \subset I$ *et* $x \in E^I$ *génératrice et telle que* $x|_J$ *soit libre.*

Alors il existe $K \subset I$ *tel que* $J \subset K$ *et* $x|_K$ *soit une base de* E.

Démonstration. On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des sur-familles libres de J et $\mathcal{N} = \{\text{Card}(L), L \in \mathcal{E}\}$.

Comme $J \in \mathcal{E}$, $\mathcal{N} \neq \varnothing$ et $\mathcal{N}$ est majoré par $\text{Card}(I)$ donc $\mathcal{N}$ admet un plus grand élément $\text{Card}(K)$ avec $K \in \mathcal{E}$.

Montrons que $x|_K$ est une base. $K \in \mathcal{E}$ donc $x|_K$ est libre.

Pour tout $i \in K$, x_i est clairement une combinaison linéaire de $x|_K$. Soit $i_0 \in I \setminus K$.

$K \cup \{i_0\} \subset I$, $J \subset K \cup \{i_0\}$ et $\text{Card}(K \cup \{i_0\}) > \text{Card}(K)$, donc $x|_{K\cup\{i_0\}}$ est liée.

Or $x|_K$ est libre donc $x_{i_0} \in \text{Vect}\{x|_K\}$ et pour tout i, $x_i \in \text{Vect}\{x|_K\}$.

Or x est génératrice donc $x|_K$ aussi. ■

Exemple 15.4 Si E est de dimension finie et non réduit à $\{0\}$, alors
- E admet une base
- De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base (Théorème de la base extraite)
- Toute famille libre de E peut être complétée en une base (Théorème de la base incomplète)

15.2.3 Notion de dimension

Proposition 15.1 Si E admet une famille génératrice de n vecteurs alors toute famille de E de plus de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

H_n : Pour tout $\mathbb{K}$-ev E admettant une famille génératrice de n vecteurs, toute famille de E de plus de $n+1$ vecteurs est liée.

- Soit E un ev admettant une famille génératrice à un vecteur noté e. Soit $x, y \in E^2$.
  Par définition, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^2$ tel que $x = \lambda e$ et $y = \mu e$. Si $\lambda = \mu = 0$ alors x et y sont nuls et (x, y) est liée. Sinon, $\lambda y - \mu x$ est une combinaison linéaire nulle à cœfficients non tous nuls de (x, y) qui est aussi liée. D'où H_1.
- Soit n tel que H_n doit vraie, E un $\mathbb{K}$-ev admettant une famille génératrice de $n+1$ vecteurs $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ et $(x_1, \cdots, x_{n+2}) \in E^{n+2}$.
  Par définition, pour tout $k \in [\![1, n+2]\!]$, il existe $(\lambda_{i,k})_i \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$x_k = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,k} e_i$$

- Si pour tout $k \in [\![1, n+2]\!]$, $\lambda_{n+1,k} = 0$, $x_1, \cdots, x_{n+2}$ appartiennent alors en fait à $\operatorname{Vect}\{e_1, \cdots, e_n\}$ qui admet une famille génératrice de n vecteurs. Cette famille est donc liée par H_n.
- Sinon, il existe $k \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $\lambda_{n+1,k} \neq 0$. Sans perte de généralité, il est loisible de supposer $\lambda_{n+1,n+2} \neq 0$. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on pose alors

$$y_k = x_k - \frac{\lambda_{n+1,k}}{\lambda_{n+1,n+2}} x_{n+2}$$

  On remarque que $y_1, \cdots, y_{n+1}$ appartiennent à $\operatorname{Vect}\{e_1, \cdots, e_n\}$.
  Par H_n, $y_1, \cdots, y_n$ est liée. Il existe donc $\mu_1, \cdots, \mu_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k y_k = 0 \text{ ie } \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k x_k - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mu_k \lambda_{n+1,k}}{\lambda_{n+1,n+2}} \right) x_{n+2} = 0$$

Les scalaires apparaissant dans la dernière combinaison linéaire n'étant pas tous nuls, la famille $(x_1, \cdots, x_{n+2})$ est liée.
Finalement, toute famille de $n+2$ vecteurs de E est liée, il en est donc de même de toute famille de plus de $n+2$ vecteurs de E. D'où H_{n+1}.

- Le principe de récurrence conclut. ■

<u>Théorème 15.3</u> *Si E est de dimension finie non réduit à $\{0\}$ alors toutes les bases de E contiennent le même nombre d'éléments.*

Démonstration. Soit b et b' deux bases de E contenant n et n' vecteurs.

b est génératrice et b' est libre, donc $n' \leqslant n$. De même $n \leqslant n'$ donc $n = n'$. ■

<u>Définition 15.8</u> On suppose E de dimension finie.

Si $E = \{0\}$, on appelle dimension de E le nombre 0.

Sinon, on appelle dimension de E le cardinal commun à toutes ses bases.

Dans les deux cas, elle se note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple 15.5

- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Remarque 15.7 Pour connaître la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit d'en trouver une base.

Exemple 15.6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in C^0(I)$.

L'ensemble des solutions de $y' = ay$ est un sev de $D^1(I)$ de dimension 1 car engendré par $x \mapsto \mathrm{e}^{A(x)}$ avec A une primitive de a.

Proposition 15.2 Si E et E' sont de dimension finie, alors $E \times E'$ est de dimension finie et $\dim(E \times E') = \dim(E) + \dim(E')$.

Démonstration. C'est clair si E ou E' est réduit à $\{0\}$.

Sinon, on note $n = \dim E$ et $p = \dim E'$. Il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E et $(f_1, \cdots, f_p)$ de E'.

Montrons que $((e_1, 0), \cdots, (e_n, 0), (0, f_1), \cdots, (0, f_p))$ est une base de $E \times E'$.

- Soit $(x, y) \in E \times E'$. On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{k=1}^{p} \mu_j f_j$.

  Alors
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (0, f_j)$$

Donc la famille est génératrice.

- S'il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_p$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j(0, f_j) = 0$ alots
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0$$
Donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

D'où $\dim(E \times E') = n + p$. ■

Définition 15.9 On appelle droite tout ev de dimension 1, plan tout ev de dimension 2.

15.2.4 Théorème fondamental

THÉORÈME 15.4 *On suppose que E est de dimension finie n. Soit $(e_1, \cdots, e_n) \in E^n$.*

1. *$(e_1, \cdots, e_n)$ est libre*
2. *$(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice*
3. *$(e_1, \cdots, e_n)$ est une base*

sont trois assertions équivalentes.

Démonstration. Si on prouve $1 \Leftrightarrow 2$ alors on a le résultat.

$1 \Rightarrow 2$ On suppose que $(e_1, \cdots, e_n)$ n'est pas génératrice. Le théorème de la base incomplète assure qu'il existe une sur-famille stricte de $(e_1, \cdots, e_n)$ qui est une base. Or icelle contient au moins $n + 1$ vecteurs. Contradiction.

$2 \Rightarrow 1$ On suppose $(e_1, \cdots, e_n)$ non libre. On peut alors en extraire une base qui contient au plus $n - 1$ vecteurs, ce qui est absurde. ■

Exemple 15.7

- Soit $(P_0, \cdots, P_n) \in \mathbb{K}_n[X]^{n+1}$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_i) = i$. Alors $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base.
- Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose
$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$
C'est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. En effet, si $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
$$0 = \widetilde{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i}(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{L_i}(a_j) = \lambda_j$$

Donc $(L_1, \cdots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui est de dimension n. C'en est donc une base.

15.3 Étude pratique d'une famille de vecteurs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$. On construit $(g_1, \cdots, g_n) \in E^n$ en choisissant $i_0 \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, et en posant, pour tout $i \neq i_0$, $g_i = f_i$ et $g_{i_0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$.

On note que pour tout $i \neq i_0$, $f_i = g_i$ et $f_{i_0} = \frac{1}{\lambda_{i_0}} g_{i_0} - \sum_{i \neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} g_i$.

<u>Théorème 15.5</u> $\mathrm{Vect}\{f_1, \cdots, f_n\} = \mathrm{Vect}\{g_1, \cdots, g_n\}$. *En particulier, f est génératrice ssi g l'est.*

De plus f est libre ssi g l'est.

Démonstration. L'égalité des Vect est déjà montrée.

On suppose f libre. Soit $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i = 0$.

On a $\mu_{i_0} g_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \mu_i g_i = 0$.

Donc

$$\mu_{i_0} \lambda_{i_0} f_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} (\lambda_i \mu_{i_0} + \mu_i) f_i = 0$$

Or f est libre donc $\lambda_{i_0} \mu_{i_0} = 0$ et pour tout $i \neq i_0$, $\lambda_i \mu_{i_0} + \mu_i = 0$.

Ainsi $\mu = 0$ et g est libre. De même, si g est libre f aussi. ∎

<u>Définition 15.10</u> provisoire On appelle rang d'une famille le nombre de vecteurs utiles de cette famille.

On appelle rang d'une matrice le rang de la famille formée par ses colonnes.

Remarque 15.8 Le théorème précédent assure que le rang est invariant par pivot de Gauss.

Exemple 15.8 On pose :

$$\begin{cases} A = 1 - 2X + 3X^2 + X^3 \\ B = 1 + X + X^2 - X^3 \\ C + 1 + 2X + 2X^2 + 2X^3 \\ D = 2 - 2X + 3X^2 - 3X^3 \end{cases}$$

Extraire de (A, B, C, D) une base de $\mathrm{Vect}\{A, B, C, D\}$ et donner les coordonnées de chaque polynôme dans cette base.

Un pivot de Gauss en colonnes assure :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A, B, C, D) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \\ -2 & 3 & 4 & 2 & \\ 3 & -2 & -1 & -3 & \\ & 1 & -2 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & 4 & 22 \\ 3 & \boxed{-4} & -1 & -8 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & 4 & 0 \\ 3 & \boxed{-4} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = 3\end{aligned}$$

On en déduit que (A, B, C) est libre et que (A, B, C, D) est liée.

En particulier, (A, B, C) est une base de $\mathrm{Vect}\{A, B, C, D\}$.

Les coordonnées de A, B et C sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

En remontant les étapes du pivot, on trouve $D = 2B + A - C$, donc les coordonnées de D sont $(1, 2, -1)$.

On a donné un algorithme pour extraire une base d'une famille génératrice. Il reste à donner une méthode pour compléter une famille libre en une base.

Exemple 15.9 On pose $f : x \mapsto \cos(3x) + 1$ et $g : x \mapsto \cos(2x) + 3\cos(x)$.

Montrer que (f, g) est libre dans $\mathrm{Vect}\{1, \cos, \cos^2, \cos^3\} = E$ et compléter (f, g) en une base de E.

- Montrons que $(1, \cos, \cos^2, \cos^3)$ est libre. Soit λ, μ, ν, τ tel que $\lambda\cos^3 + \mu\cos^2 + \nu\cos + \tau = 0$.
  En $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\tau = 0$. En 0 et π, on a les relations $\lambda + \mu + \nu = 0 = \lambda - \mu + \nu$.
  Donc $\lambda + \nu = 0$ et $\mu = 0$. En $\frac{pi}{3}$, $\frac{\lambda}{8} + \frac{\nu}{2} = 0$ donc $\lambda = \nu = 0$.
  D'où la liberté.
- $f = x \mapsto 4\cos^3(x) - 3\cos(x) + 1$ et $g = x \mapsto 2\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1$ par factorisation.
  f a pour coordonnées $(4, 0, -3, 1)$ et g $(0, 2, 3, -1)$.
  Donc (f, g) est libre.
- On étudie $\mathrm{rg}(f, g, \cos^3, \cos^2, \cos, 1)$ en prenant les pivots d'abord dans les colonnes de f et g.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f,g,\cos^3,\cos^2,\cos,1) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $(f,g,\cos^3,\cos)$ est une base de E.

15.4 Systèmes linéaires

On suppose E de dimension finie $n \neq 0$. On munit E d'une base $(e_1,\cdots,e_n)$.

Soit $p \neq 0$, $(x_1,\cdots,x_p,y) \in E^{p+1}$ et $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on note $(\alpha_{1,j},\cdots,\alpha_{n,j})$ les coordonnées de x_j dans $(e_1,\cdots,e_n)$.

On note $(y_1,\cdots,y_n)$ les coordonnées de y dans la même base.

$$y = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j \text{ ssi } \forall i \in [\![1,n]\!], y_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j}\lambda_j$$

On note ce système d'équations (S).

On note que :

- $(x_1,\cdots,x_p)$ est libre ssi l'unique solution homogène du système (S) d'inconnue $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ est 0.
- $(x_1,\cdots,x_p)$ est libre ssi (S) admet au plus une solution pour tout second membre.
- $(x_1,\cdots,x_p)$ est génératrice ssi (S) admet au moins une solution pour tout second membre.

- Tout système linéaire de n équations à p inconnues peut être interprété comme une équation vectorielle à p inconnues dans un espace vectoriel de dimension n muni d'une base.

Théorème 15.6 *Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(S) admet 0 comme seule solution homogène*
- *(S) admet au plus une solution pour tout second membre*
- *(S) admet au moins une solution pour tout second membre*

Un tel système est dit de Cramer.

Chapitre 16

Applications linéaires en dimension finie

16.1 Image d'une famille de vecteurs

16.1.1 Deux propositions

Proposition 16.1 Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_q) \in E^q$ libre et $u \in L(E, E')$.
$(u(x_1), \cdots, u(x_q))$ est libre ssi $\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_q\} \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $x \in \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_q\} \cap \text{Ker}(u)$.

Il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ tel que $x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i$ et $u(x) = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i u(x_i) = 0$ et par liberté, $\lambda = 0$ et $x = 0$. L'autre inclusion étant claire, on a le résultat.

$\Leftarrow$ Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ tel que $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i u(x_i) = 0$.

Donc $u\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i\right) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \text{Ker}(u)$.

Or $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i \in \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_q\}$ donc $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i = 0$.

Donc $\lambda = 0$ et on a la liberté. ■

Proposition 16.2 Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_q) \in E^q$ et $u \in L(E, E')$.

$$u(\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_q\}) = \text{Vect}\{u(x_1), \cdots, u(x_q)\}$$

Démonstration.

$\subset$ Soit $x \in u(\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_q\})$. Il existe $y = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i$ tel que $x = u(y)$.

On a $x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i u(x_i)$ donc $x \in \text{Vect}\{u(x_1), \cdots, u(x_q)\}$.

$\supset$ Soit $x \in \text{Vect}\{u(x_1), \cdots, u(x_q)\}$. Il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i u(x_i)$.

Donc $x = u\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i\right) \in u(\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_q\})$. ■

Remarque 16.1

- *Une application linéaire injective transforme une famille libre en une famille libre*
- *Une application linéaire surjective transforme une famille génératrice en une famille génératrice*
- *Une application linéaire transforme une famille génératrice en une famille génératrice de son image*
- *Une application linéaire bijective transforme une base en une base*

16.1.2 Image d'une base

THÉORÈME 16.1 *On munit E d'une base $(e_1, \cdots, e_p)$. Soit $(f_1, \cdots, f_p) \in (E')^p$.*

1. *Il existe une unique application linéaire $u : E \to E'$ telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) = f_i$*
2. *u est injective ssi $(f_1, \cdots, f_p)$ est libre*
3. *u est surjective ssi $(f_1, \cdots, f_p)$ est génératrice*
4. *u est bijective ssi $(f_1, \cdots, f_p)$ est une base*

Démonstration.

1. Soit u convenable et $x \in E$ qui s'écrit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$$

Donc u envoie x (de coordonnées $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ dans $(e_1, \cdots, e_p)$) sur $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$.

Réciproquement l'application

$$u : \begin{cases} E & \to & E' \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \end{cases}$$

est linéaire et envoie bien les e_i sur les f_i.

2.

$$\begin{aligned} u \text{ est injective } & \text{ ssi } \operatorname{Ker}(u) = \{0\} \\ & \text{ ssi } \operatorname{Ker}(u) \cap E = \{0\} \\ & \text{ ssi } \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\} = \{0\} \\ & \text{ ssi } (u(e_1), \cdots, u(e_p)) \text{ est libre} \\ & \text{ ssi } (f_1, \cdots, f_p) \text{ est libre} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u \text{ est surjective } & \text{ ssi } \operatorname{Im}(u) = E \\ & \text{ ssi } \operatorname{Vect}\{u(e_1), \cdots, u(e_p)\} = E' \\ & \text{ ssi } \operatorname{Vect}\{f_1, \cdots, f_p\} = E' \\ & \text{ ssi } (f_1, \cdots, f_p) \text{ est génératrice} \end{aligned}$$

4. conséquence des points précédents. ∎

Remarque 16.2 Si deux applications linéaires coïncident sur une base de E, alors elles sont égales.

Exemple 16.1 Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{P}(t)\,dt = \frac{\widetilde{P}(0)}{6} + \frac{2}{3}\widetilde{P}(\frac{1}{2}) + \frac{\widetilde{P}(1)}{6}$.

Les applications linéaires $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 \widetilde{P}(t)\,dt$ et $P \mapsto \frac{\widetilde{P}(0)}{6} + \frac{2}{3}\widetilde{P}(\frac{1}{2}) + \frac{\widetilde{P}(1)}{6}$ coïncident sur $(1, X, X^2, X^3)$ donc sont égales.

16.1.3 Théorème fondamental

<u>THÉORÈME 16.2</u> *Si* $\dim(E) = \dim(E')$, *pour tout* $u \in L(E, E')$, u *est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.*

Démonstration. Il existe $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E.

u est injective ssi $(u(e_1), \cdots, u(e_p))$ est libre ssi icelle est génératrice ssi u est surjective. ∎

Remarque 16.3 *On suppose* $\dim(E) = \dim(E')$. *Soit* $u \in L(E, E')$.

Si on trouve $v \in L(E', E)$ *tel que* $u \circ v = \mathrm{Id}$ *alors* u *est bijective et* $v \circ u = \mathrm{Id}$ *(et réciproquement).*

16.2 Calcul de dimensions

16.2.1 Résultats généraux et applications directes

<u>THÉORÈME 16.3</u> *Deux espaces vectoriels de dimension finie ont même dimension ssi ils sont isomorphes.*

Démonstration.

$\Leftarrow$ Il existe $u \in L(E, E')$ bijective, $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E.
La famille $(u(e_1), \cdots, u(e_p))$ est une base donc est formée de n vecteurs.
Donc $n = p$.

$\Rightarrow$ Si $n = p$, on prend une base $(e_1, \cdots, e_p)$ de E et $(f_1, \cdots, f_p)$ de E'.
Il existe $u \in L(E, E')$ qui envoie chaque e_i sur f_i. Or $(f_1, \cdots, f_p)$ est une base donc u est bijective. ■

Remarque 16.4

- *Un espace vectoriel isomorphe à un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.*
- *Soit* F *un sev de* E. *Tous les supplémentaires de* F *sont isomorphes.*

Proposition 16.3 $L(E, E')$ est de dimension finie égale à $\dim(E)\dim(E')$.

Démonstration. Notons $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E. On pose

$$\varphi : \begin{cases} L(E, E') & \to & (E')^p \\ u & \mapsto & (u(e_1), \cdots, u(e_p)) \end{cases}$$

φ est linéaire et bijective par le théorème 16.1
De plus $(E')^p$ est de dimension finie égale à np.
Par conséquent, $L(E, E')$ est de dimension finie égale à np. ■

16.2.2 Étude des suites récurrentes linéaires

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On pose

$$\mathscr{F} = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

- $\mathscr{F}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- L'application
$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{F} & \to & \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$$
est linéaire est bijective. Donc $\mathscr{F}$ est de dimension finie égale à 2.
- On suppose $b \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$
$(\alpha^n)_n \in \mathscr{F}$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{n+2} = a\alpha^{n+1} + b\alpha^n$
Dans le cas $n = 0$, $\alpha^2 = a\alpha + b$. Réciproquement, si $\alpha^2 = a\alpha + b$, on multiplie par α^n et $(\alpha^n)_n \in \mathscr{F}$.
On introduit alors $P = X^2 - aX - b$.
  - ▶ Si P admet deux racines distinctes α et β, on sait que $(u = (\alpha^n)_n, v = (\beta^n)_n) \in \mathscr{F}^2$. Montrons que cette famille est libre.
  Si $\lambda u + \mu v = 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda\alpha^n + \mu\beta^n = 0$.
  Pour $n \in \{0, 1\}$, on trouve $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$. Comme $\alpha \neq \beta$, $\lambda = \mu = 0$.
  On aurait pu aussi dire que $\varphi(u) = (1, \alpha)$ n'est pas colinéaire à $(1, \beta) = \varphi(v)$, donc $(\varphi(u), \varphi(v))$ est libre, donc (u, v) aussi.
  On en déduit que (u, v) est libre et a deux vecteurs dans un espace de dimension 2. C'est donc une base de $\mathscr{F}$.
  $$\mathscr{F} = \{(\lambda\alpha^n + \mu\beta^n)_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$$
  - ▶ Si P a une racine double α, on pose $u = (\alpha^n)_n$ et $v = (n\alpha^n)_n$.
  $$\begin{aligned} v_{n+2} - av_{n+1} - bv_n &= n\alpha^n(\alpha^2 - a\alpha - b) + \alpha^{n+1}(2\alpha - a) \\ &= n\alpha^n \widetilde{P}(\alpha) + \alpha^{n+1}\widetilde{P'}(\alpha) \end{aligned}$$
  Donc $v \in \mathscr{F}$.
  On vérifie comme précédemment que (u, v) est libre, c'est donc une base de $\mathscr{F}$. D'où
  $$\mathscr{F} = \{((\lambda + \mu n)\alpha^n)_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$$
  - ▶ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et P à racines non réelles, icelles s'écrivent $r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $r\mathrm{e}^{-i\theta}$.
  On a vu que $u = (r^n\mathrm{e}^{in\theta})_n$ et $v = (r^n\mathrm{e}^{-in\theta})_n$ appartiennent à $\mathscr{F}$, donc $\frac{u+v}{2}$ et $\frac{u-v}{2i}$ aussi.
  Or ces suites sont réelles et valent $(r^n\cos(n\theta))_n$ et $(r^n\sin(n\theta))_n$. Cette famille est aussi libre et
  $$\mathscr{F} = \{(r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))_n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$$
- On suppose $b = 0$.
  - ▶ Si $a \neq 0$, $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}\{(a^n)_n, (\delta_{0,n})_n\}$
  - ▶ Si $a = 0$, $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}\{(\delta_{0,n})_n, (\delta_{1,n})_n\}$

16.3 Rang d'une application linéaire

16.3.1 Définition

Définition 16.1 Soit $u \in L(E, E')$. On appelle rang de u et on note $\mathrm{rg}(u)$ le nombre $\dim(\mathrm{Im}(u))$.

Remarque 16.5 *Soit E'' un espace vectoriel, $u \in L(E, E')$, $v \in L(E', E'')$.*
Si u est bijective, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$ et si v est bijective, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

16.3.2 Théorème du rang

THÉORÈME 16.4 *Soit $r \in [\![0, p]\!]$. On note $I = [\![1, r]\!]$ et $J = [\![r+1, p]\!]$. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E. On suppose*

1. *pour tout $i \in J$, $u(e_i) = 0$*
2. *$(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ est libre*

Alors $(e_{r+1}, \cdots, e_p)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Démonstration.

- Par (1), $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in J\} \subset \mathrm{Ker}(u)$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Il existe $(a, b) \in \mathrm{Vect}\{e_i, i \in I\} \times \mathrm{Vect}\{e_i, i \in J\}$ tel que $x = a + b$.
  $0 = u(x) = u(a) + u(b) = u(a)$, donc $a \in \mathrm{Ker}(u)$.
  Ainsi, $a \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Vect}\{e_i, i \in I\}$, donc par la proposition 16.1, comme $(e_i)_{i \in I}$ est libre, $a = 0$ et $x \in \mathrm{Vect}\{e_i, i \in J\}$.
  D'où $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\{e_i, i \in J\}$ et $(e_i)_{i \in J}$ en est une base (puisqu'elle est libre).
- $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ est libre. De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u) &= u(\mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\}) \\ &= \mathrm{Vect}\{u(e_1), \cdots, u(e_p)\} \\ &= \mathrm{Vect}\{u(e_1), \cdots, u(e_r)\} \end{aligned}$$

  Donc $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ est génératrice, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

■

THÉORÈME 16.5 *Soit $u \in L(E, E')$ et F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$. L'application*

$$v : \begin{cases} F & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Démonstration.
- v est linéaire
- Soit $x \in \text{Ker}(v)$. On a clairement $x \in \text{Ker}(u)$ et de plus, $x \in F$.
  Donc $x \in F \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$ et $x = 0$. Donc v est injective.
- Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
  On écrit $x = a+b$ avec $(a, b) \in F \times \text{Ker}(u)$. On a $y = u(a)+u(b) = u(a)$, donc, comme $a \in F$, $y = v(a)$.
  Donc $\text{Im}(v) = \text{Im}(u)$ et v est surjective. ∎

Corollaire 16.1 Théorème du rang *Soit $u \in L(E, E')$.*

$$\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E)$$

Démonstration. Il existe F supplémentaire de $\text{Ker}(u)$.

On pose v comme précédemment. C'est un isomorphisme donc $\dim(F) = \text{rg}(u)$.

Or $\dim(F) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E)$. D'où le résultat. ∎

16.3.3 Équations d'hyperplans

Proposition 16.4 Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Réciproquement tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Démonstration.
- Soit f une forme linéaire non nulle.
  On sait que $\{0\} \neq \text{Im}(f) \subset \mathbb{K}$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{K}$. Ainsi, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - 1$. et $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.
- Soit H un hyperplan. Il existe $x_0 \in E$ tel que $H \oplus \text{Vect}\{x_0\} = E$.
  L'unique $f \in L(E, \mathbb{K})$ telle que $f|_H = 0$ et $f(x_0) = 1$ est une forme linéaire non nulle de noyau H. ∎

Proposition 16.5 Soit f et g deux formes linéaires non nulles.

Si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $f = \lambda g$.

Démonstration. On reprend les notations du théorème.

Il existe $x_0 \in E$ tel que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}\{x_0\} = E$.

On note que $f(x_0) \neq 0$ (sinon $f = 0$) et $g(x_0) = 0$.

$f - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g$ est une forme linéaire nulle sur $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ et sur $\text{Vect}\{x_0\}$ donc $f = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g$. ∎

Proposition 16.6 Soit f une forme linéaire non nulle. Une équation cartésienne de Ker(f) dans la base $(e_1, \cdots, e_p)$ est $\sum_{i=1}^{p} f(e_i)x_i = 0$.

Démonstration. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_p)$ dans $(e_1, \cdots, e_p)$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) & \text{ ssi } f(x) = 0 \\ & \text{ ssi } f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = 0 \\ & \text{ ssi } \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) = 0 \end{aligned}$$

De plus, on note que $(f(e_1), \cdots, f(e_p)) \neq (0, \cdots, 0)$ car $f \neq 0$. ■

Remarque 16.6 Récapitulatif

- *Soit H un hyperplan. Il existe $(a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ non tous nuls tels que $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$ soit une équation cartésienne de H dans $(e_1, \cdots, e_p)$.*
- *Soit $(a_1, \cdots, a_p)$ non tous nuls. La partie de E dont une équation cartésienne est $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$ dans $(e_1, \cdots, e_p)$ est un hyperplan.*
- *Soit H un hyperplan, $(a_1, \cdots, a_p)$ et $(b_1, \cdots, b_p)$ non tous nuls tels que $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$ et $b_1x_1 + \cdots + b_px_p = 0$ soient deux équations de H dans $(e_1, \cdots, e_p)$.*
  Alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $a = \lambda b$.

16.4 Description analytique d'une application linéaire

16.4.1 Introduction

On munit E d'une base $(e_1, \cdots, e_p)$ et E' de $(f_1, \cdots, f_n)$. On pose

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \to & E \\ (x_1, \cdots, x_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \end{cases} \text{ et } \psi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to & E' \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \end{cases}$$

φ et ψ sont clairement linéaires et bijectives.

<u>**Définition 16.2**</u> Soit $u \in L(E, E')$. L'application $\widetilde{u} = \psi^{-1} \circ u \circ \varphi$ est une application linéaire appelée représentation analytique de u entre les bases $(e_1, \cdots, e_p)$ et $(f_1, \cdots, f_n)$.

Exemple 16.2 Soit E un espace vectoriel de dimension 4, A et B deux plans supplémentaires de E.

Soit (e_1, e_2) une base de A et (e_3, e_4) une base de B.

(e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E notée e.

Soit s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B et $\widetilde{s}$ se représentation analytique par rapport à e.

$$\begin{tikzcd}
x,y,z,t \arrow[r, "\widetilde{s}"] \arrow[d] & x,y,-z,-t \\
xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \arrow[r, "s"] & xe_1+ye_2-ze_3-te_4 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Donc : $\widetilde{s} = (x, y, z, t) \mapsto (x, y, -z, -t)$.

Connaître u revient à connaître $u(e_1), \cdots, u(e_p)$ et la connaissance d'iceux revient à celle de leurs coordonnées dans $(f_1, \cdots, f_n)$, notées $(\alpha_{1,i}, \cdots, \alpha_{n,i})$.

D'où u est entièrement déterminée par les np scalaires :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,p} \end{pmatrix}$$

Ce tableau s'appelle matrice représentative de u entre les bases e et f et se note $\mathcal{M}_{e,f}(u)$. Si $e = f$, on note $\mathcal{M}_e(u)$.

Exemple 16.3 On travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^4$ muni de leurs bases canoniques (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2, f_3, f_4).

On considère $u \in L(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^4)$ donc la représentation analytique entre e et f est

$$\widetilde{u} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + z, x + y + z, x - y + 2z, x + z) \end{cases}$$

On a alors :

$$\mathcal{M}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.4.2 Usage d'une représentation analytique

On reprend les notations précédentes.

Soit $(x, y) \in E \times E'$. On note $(x_1, \cdots, x_p)$ est coordonnées de x dans E et $(y_1, \cdots, y_n)$ celles de y dans E'.

$y = u(x)$ ssi $u(\varphi(x_1, \cdots, x_p)) = \psi(y_1, \cdots, y_n)$ ssi $\widetilde{u}(x_1, \cdots, x_p) = (y_1, \cdots, y_n)$

Exemple 16.4 On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique c et on pose

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X-1)P' - 2P \end{cases}$$

φ est linéaire. On cherche une base de sont noyau et de son image, ainsi qu'une équation cartésienne d'icelle.

- On a $\varphi(1) = -2$, $\varphi(X) = -1 - X$ et $\varphi(X^2) = -2X$ donc

$$\mathcal{M}_c(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de coordonnées (x, y, z) dans c.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\text{ ssi } \varphi(P) = 0 \\ &\text{ ssi } (-2x - y, -y - 2z, 0) = (0, 0, 0) \\ &\text{ ssi } y = -2x = -2z \\ &\text{ ssi } (x, y, z) \in \mathrm{Vect}\left\{(1, -2, 1)\right\} \\ &\text{ ssi } P \in \mathrm{Vect}\left\{1 - 2X + X^2\right\} \end{aligned}$$

  Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{1 - 2X + X^2\right\}$.
- Le théorème du rang assure que $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$. Or $\varphi(1) = -2$ et $\varphi(X) = -1 - X$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(\varphi)$, c'en est donc une base.
- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de coordonnées (x, y, z) dans c.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Im}(u) &\text{ ssi } \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(Q) = P \\ &\text{ ssi } \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, (-2x' - y', -y' - 2z', 0) = (x, y, z) \\ &\text{ ssi } z = 0 \end{aligned}$$

  Donc une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(\varphi)$ dans c est $z = 0$.

16.4.3 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 16.6 *Soit E'' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $q \neq 0$. On munit E, E' et E'' de bases $e = (e_1, \cdots, e_p)$, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ et $g = (g_1, \cdots, g_q)$.*

Soit $(\lambda, u, v, w) \in \mathbb{K} \times (L(E, E'))^2 \times L(E', E'')$. On note $(\alpha_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} = \mathcal{M}_{e,f}(u)$, $(\beta_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} = \mathcal{M}_{e,f}(v)$ et $(\gamma_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]} = \mathcal{M}_{f,g}(w)$.

On a :
- $\mathcal{M}_{e,f}(u + v) = (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$
- $\mathcal{M}_{e,f}(\lambda u) = (\lambda \alpha_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$
- $\mathcal{M}_{e,g}(w \circ u) = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{i,k} \alpha_{k,j} \right)_{i,j \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]}$

Démonstration.
- Soit $j \in [\![1, p]\!]$.

$$(u + v)(e_j) = u(e_j) + v(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} f_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} f_j = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) f_j$$

  Donc $\mathcal{M}_{e,f}(u + v) = (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j})_{i,j}$.
  De même $\mathcal{M}_{e,f}(\lambda u) = (\lambda \alpha_{i,j})_{i,j}$.
- Soit $j \in [\![1, p]\!]$.

$$\begin{aligned}(w \circ u)(e_j) = w(u(e_j)) &= w\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} f_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} w(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} \left(\sum_{i=1}^{q} \gamma_{i,k} g_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} \gamma_{i,k} \right) g_i\end{aligned}$$ ■

Remarque 16.7 Pour que le calcul ait une interprétation algébrique, il faut qu'on travaille dans la même base de E' pour u et w.

Exemple 16.5 On travaille dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ munis de leur bases canoniques respectives e, f et g.

Soit $u \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tel que $\mathcal{M}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $w \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ tel que $\mathcal{M}_{f,g}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue le produit des deux matrices : le premier cœfficient est le produit de la première ligne de la matrice de w : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ par la première colonne de la matrice de u : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ie

$$1 \times 1 + 0 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$$

Ainsi, on trouve le résultat

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple 16.6 On travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique c. Soit $u \in L(\mathbb{R}_2[X])$ tel que

$$\mathcal{M}_c(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que u est bijective et trouver $\mathcal{M}_c(u^{-1})$.

- On pose $c = (c_1, c_2, c_3)$. Par définition :

$$\begin{cases} u(c_1) = c_1 + 2x_2 \\ u(c_2) = -c_1 + c_3 \\ u(c_3) = 2c_1 + c_2 + c_3 \end{cases}$$

On veut avoir c_1, c_2, c_3 en fonction de $u(c_1), u(c_2), u(c_3)$. Un pivot de Gauss assure que

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{-u(c_1) - 2u(c_2) + 2u(c_3)}{5} \\ c_2 = \dfrac{3u(c_1) + u(c_2) - u(c_3)}{5} \\ c_3 = \dfrac{-u(c_1) + 3u(c_2) + 2u(c_3)}{5} \end{cases}$$

(c_1, c_2, c_3) est génératrice et chaque vecteur de cette famille est combinaison linéaire de $(u(c_1), u(c_2), u(c_3))$ donc icelle est génératrice.

Or, c'est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
u transforme une base en une base donc elle est bijective.

- En composant pas u^{-1}, on tire les décompositions de $u^{-1}(c_1)$, $u^{-1}(c_2)$ et $u^{-1}(c_3)$, donc la matrice :

$$\mathcal{M}_c(u^{-1}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chapitre 17

Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, non réduit à $\{0\}$, de dimension finie notée n.

17.1 Généralités

17.1.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

<u>THÉORÈME 17.1</u> *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*

- *F est de dimension finie et* $\dim(F) \leqslant n$
- *$F = E$ si et seulement si* $\dim(F) = n$

Démonstration.

- L'ensemble $\mathscr{F}$ des familles libres de F contient une famille de cardinal maximal et cette famille est une base de F. On note que les éléments de $\mathscr{F}$ sont des familles libres de E donc possèdent au plus n éléments. Finalement, F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant n$.
- On suppose $\dim(F) = n$. Il existe une base f de F. f est libre donc f est une famille libre de vecteurs de E et $\dim(E) = n$.
  Donc f est une base de E. $E = \operatorname{Vect}\{f\} = F$.
- L'autre implication est vraie. ∎

<u>Définition 17.1</u>

- Si $n \geqslant 2$, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

- Soit f une famille de vecteurs de E. On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$ la dimension de $\text{Vect}\{f\}$.

17.1.2 Représentation d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une famille génératrice de F et $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de e.

La donnée des coordonnées de chaque vecteur $(f_1, \cdots, f_p)$ dans la base e permet d'écrire directement un système d'équations paramétriques de F dans E.

Exercice : On travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique c.

On pose $F = \text{Vect}\{1 + X + 2X^2, 1 + 2X + X^2, 1 + 3X^2\}$. Trouver un système d'équations cartésiennes de F dans c.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de coordonnées (α, β, γ) dans c.

$$P \in F \text{ ssi } \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, P = \lambda(1 + X + 2X^2) + \mu(1 + 2X + X^2) + \nu(1 + 3X^2)$$
$$\text{ssi il existe } (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = \alpha \\ \lambda + 2\mu = \beta \\ \lambda + \mu + 3\nu = \gamma \end{cases}$$
$$\text{ssi il existe } (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = \alpha \\ \lambda + 2\mu = \beta \\ \gamma - 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Une équation cartésienne de F dans c est $-3\alpha + \beta + \gamma = 0$ où (α, β, γ) est le nom générique des coordonnées d'un polynôme dans c.

Remarque 17.1 Pour tout sous-espace vectoriel F de E de dimension p, on a p paramètres dans toute représentation paramétrique optimale et $n - p$ équations dans toute représentation cartésienne optimale.

17.2 Somme de sous-espaces vectoriels

17.2.1 Généralités

Théorème 17.2 *Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $(x_1, \cdots, x_{p+q}) \in E^{p+q}$.*

- $\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_p\} + \text{Vect}\{x_{p+1}, \cdots, x_{p+q}\} = \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_{p+q}\}$
- *Si $(x_1, \cdots, x_{p+q})$ est libre, la somme précédente est directe.*

Démonstration.

- Soit $x \in \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_{p+q}\}$.
  Il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i x_i$.
  $$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i x_i$$
  Donc $x \in \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_p\} + \text{Vect}\{x_{p+1}, \cdots, x_{p+q}\}$.
  On procède de même pour la deuxième implication.
- On suppose $(x_1, \cdots, x_{p+q})$ libre. Soit $x \in \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_p\} \cap \text{Vect}\{x_{p+1}, \cdots, x_{p+q}\}$.
  Il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.
  Il existe $(\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{p+q}) \in \mathbb{K}^q$ tel que $x = \sum_{i=p+1}^{p+q} \lambda_i x_i$.
  On a :
  $$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} (-\lambda_i) x_i = 0$$
  Or $(x_1, \cdots, x_{p+q})$ est libre.
  Donc, pour tout $i \in [\![1, p+q]\!]$, $\lambda_i = 0$
  Donc $x = 0$. On a donc $\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_p\} \cap \text{Vect}\{x_{p+1}, \cdots, x_{p+q}\} \subset \{0\}$.
  Finalement, $\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_p\} \cap \text{Vect}\{x_{p+1}, \cdots, x_{p+q}\} = \{0\}$. ■

Remarque 17.2 Quand on « coupe » une base de E en deux, les deux sous-familles engendrent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice : On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique c. On pose :

$$P = \text{Vect}\{(1,1,1), (2,5,1)\} \text{ et } D = \text{Vect}\{(1,2,3)\}$$

Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}((1,1,1),(2,5,1),(1,2,3)) &= \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Donc $((1,1,1),(2,5,1),(1,2,3))$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

Théorème 17.3 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E non réduits à $\{0\}$. La concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.*

Démonstration. On note $p = \dim(F)$ e $q = \dim(G)$. Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \cdots, g_q)$ une base de G.

- Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \mu_1, \cdots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ tel que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i + \sum_{i=1}^{q}\mu_i g_i = 0$.
  On note que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{q}(-\mu_i)g_i$.
  Comme $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i \in F$, $\sum_{i=1}^{q}(-\mu_i)g_i \in G$ et $F \cap G = \{0\}$, on a :
  $$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{q}(-\mu_i)g_i = 0$$
  Or $(f_1, \cdots, f_p)$ et $(g_1, \cdots, g_q)$ sont libres donc pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, $\lambda_i = 0 = \mu_j$.
  Donc $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ est libre.
- Soit $x \in E$.
  F et G sont supplémentaires donc il existe $(a,b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$.
  Il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $a = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i$.
  Il existe $(\mu_1, \cdots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que $b = \sum_{i=1}^{q}\mu_i g_i$.
  Donc $x = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i + \sum_{i=1}^{q}\mu_i g_i$.
  Donc x se décompose sur $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$. Cette famille est donc génératrice.
- Finalement, $f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ est une base de E. ∎

Corollaire 17.1 *Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.*

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
- Si $F = E$ ou $F = \{0\}$, le résultat est clair.
- On suppose $F \neq E$ et $F \neq \{0\}$. On note $p = \dim(F)$.
  Par hypothèse, $p \in [\![1, n-1]\!]$. Il existe $(e_1, \cdots, e_p)$ base de F.
  Par définition, $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre. Le théorème de la base incomplète assure qu'il existe $(e_{p+1}, \cdots, e_n) \in E^{n-p}$ tel que $(e_1, \cdots, e_n)$ soit une base de E.

On a :

$$\text{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\} \oplus \text{Vect}\{e_{p+1}, \cdots, e_n\} = \text{Vect}\{e_1, \cdots, e_n\}$$

Donc :

$$f \oplus \text{Vect}\{e_{p+1}, \cdots, e_n\} = E$$

Ce qui assure le résultat. ∎

17.2.2 Dimension

<u>THÉORÈME 17.4</u> *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Démonstration.

- La formule est déjà prouvée si $F \cap G = \{0\}$.
- Il existe un supplémentaire S de $F \cap G$ dans F.
  Montrons que $S \oplus G = F + G$.
  - Par construction, $S \subset F$ donc $S + G \subset F + G$.
  - Clairement, $\{0\} \subset F + G$.
  - Soit $x \in F + G$.
    Il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$.
    Il existe $(c, d) \in S \times (F \cap G)$ tel que $a = c + d$.
    On note que $x = b + c + d$, $c \in S$ et $b + d \in G$.
    Donc $x \in S + G$. Donc $F + G \subset S + G$.
    Finalement, $F + G = S + G$.
  - On a $S \subset F$ donc $(S \cap G) \subset S \cap (F \cap G)$. Donc $S \cap G \subset \{0\}$.
    Finalement, $S \cap G = \{0\}$.

  On a donc $S \oplus G = F + G$.
- Comme $S \oplus (F \cap G) = F$, $\dim(S) + \dim(F \cap G) = \dim(F)$.
  Comme $S \oplus G = F + G$, $\dim(S) + \dim(G) = \dim(F + G)$.
  Finalement, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$. ∎

<u>THÉORÈME 17.5</u> FONDAMENTAL *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $F \cap G = \{0\}$
- $F + G = E$
- $F \oplus G = E$

Démonstration.

- On suppose $F \cap G = \{0\}$.
  On a $\dim(F)+\dim(G) = \dim(F+G)+\dim(F\cap G)$ donc $\dim(F+G) = \dim(E)$.
  Or $F + G \subset E$.
  Donc $E = F + G$.
  Donc $E = F \oplus G$.
- On suppose $E = F + G$.
  On a $\dim(F)+\dim(G) = \dim(F+G)+\dim(F\cap G)$ donc $\dim(F+G) = \dim(E)$.
  Donc $\dim(F \cap G) = 0$.
  Donc $F \cap G = \{0\}$.
  Donc $E = F \oplus G$.
- Si $E = F \oplus G$, $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$. ■

Chapitre 18

Calcul matriciel

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension p et E' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension n.

On note $(e_1, \cdots, e_p)$ ou e une base de E et $(f_1, \cdots, f_n)$ ou f une base de E'.

18.1 Vocabulaire général

Définition 18.1 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On appelle matrice de type $n \times p$ à cœfficients dans $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indicée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quand $n = p$.

Définition 18.2 On écrit M sous la forme d'un tableau de cœfficients de $\mathbb{K}$ notés $(a_{i,j})_{i,j}$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle i-ème ligne de M la matrice de $\mathcal{M}_{1,p}$ égale à $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$.

Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on appelle j-ème colonne de M la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ égale à

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On appelle sous-matrice de M toute matrice $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ où $I \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, p]\!]$ sont non vides, dont on réindice les cœfficients, sans les réordonner, afin que les indices de lignes et de colonnes soient successifs.

Définition 18.3 On dit qu'une matrice $n \times p$ est carrée ssi $n = p$. Dans ce cas, n est appelé ordre de la matrice. De plus une matrice carrée $(a_{i,j})_{i,j}$ est dite

- symétrique ssi pour tout i, j, $a_{i,j} = a_{j,i}$
- antisymétrique ssi pour tout i, j, $a_{i,j} = -a_{j,i}$
- triangulaire supérieure ssi pour tout i, j tel que $i > j$, $a_{i,j} = 0$
- triangulaire inférieure ssi pour tout i, j tel que $i < j$, $a_{i,j} = 0$
- diagonale ssi pour tout i, j tel que $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$
- scalaire ssi elle est diagonale à cœfficients diagonaux égaux

Exemple 18.1 Pour tout n, p, la matrice de type $n \times p$ dont tous les cœfficients sont nuls est appelée matrice nulle et est notée 0.

La matrice scalaire d'ordre n dont tous les cœfficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée identité d'ordre n et notée I_n.

De plus, pour tout i, j, la matrice de type $n \times p$ dont tous les cœfficients sont nuls sauf celui en position (i, j) est appelée matrice élémentaire et est notée $E_{i,j}$ (ses cœfficients sont les $(\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{r,s}$).

18.2 Opérations sur les matrices

18.2.1 Addition et produit par un scalaire

Définition 18.4 On définit la somme $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ par $(a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}$.

On définit la multiplication de A par un scalaire λ par $(\lambda a_{i,j})_{i,j}$.

Théorème 18.1 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* np.

18.2.2 Multiplication de deux matrices

On définit le produit de deux matrices A et B comme la matrice C dont les cœfficients sont $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$.

Proposition 18.1

- Pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p} \times \mathcal{M}_{p,m}^2$, $A(B + C) = AB + AC$
- Pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}^2 \times \mathcal{M}_{p,m}$, $(A + B)C = AC + BC$
- Pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p} \times \mathcal{M}_{p,m} \times \mathcal{M}_{m,q}$, $(AB)C = A(BC) = ABC$
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $AI_p = I_nA = A$ et $0A = A0 = 0$

Remarque 18.1 $AB = AC \not\Rightarrow B = C$, $AC = BC \not\Rightarrow A = B$.

De plus, $AB = 0$ *n'implique pas* $A = 0$ *ou* $B = 0$.

Enfin, $AB \neq BA$ *en général.*

Théorème 18.2 $(\mathcal{M}_n, +, \times)$ *est un anneau d'unité* I_n. *Il n'est pas commutatif ni intègre si* $n \neq 1$.

Son groupe des éléments inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire d'ordre n.

18.2.3 Transposition

Définition 18.5 Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de cœfficients $(a_{i,j})_{i,j}$.

On appelle transposée de M et on note M^t la matrice de cœfficients $(a_{j,i})_{i,j}$.

Proposition 18.2

- La transposition est linéaire et involutive, ie pour tout A, $A^{tt} = A$.
- Pour tout A, B, $(AB)^t = B^t A^t$.
- Pour tout A inversible, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Démonstration. Seul le dernier point est à vérifier, les autres découlent de la définition.

Il existe B tel que $AB = BA = I_n$. On a $(AB)^t = (BA)^t = I_n^t$ donc $B^t A^t = A^t B^t = I_n$, puisque l'identité est diagonale.

Donc, par unicité de l'inverse, A^t est inversible d'inverse B^t. ∎

Exemple 18.2 Une matrice carrée M est dite symétrique ssi $M^t = M$ et antisymétrique ssi $M^t = -M$. L'ensemble des matrices symétriques et celui des anti-symétriques sont supplémentaires :

Si M est symétrique et anti-symétrique alors $M = M^t = -M$ donc $M = 0$.

De plus on remarque que $M = \underbrace{\frac{M + M^t}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{M - M^t}{2}}_{\text{anti-symétrique}}$.

18.3 Le pivot de Gauss

18.3.1 Outils de base

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout (i, j) tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $B_{i,\lambda} = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, $A_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{i,j}$ et $P_{i,j} = (\delta_{\tau(r),s})_{r,s}$ avec $\tau : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ envoyant i sur j, j sur i et tout autre élément sur lui-même.

Toutes ces matrices sont inversibles. Soit M de type $n \times p$ à cœfficients dans $\mathbb{K}$ notés $(a_{i,j})_{i,j}$.

On a $B_{i,\lambda} M = (a_{r,s} + (\lambda - 1)\delta_{i,r} a_{i,s})_{r,s}$ donc cette matrice est obtenue à partir de M en multipliant la i-ème ligne de M par λ.

$A_{i,j,\lambda} M = (a_{r,s} + \lambda \delta_{i,r} a_{j,s})_{r,s}$ est obtenue ç partir de M en ajoutant la i-ème ligne de M le produit par λ de la j-ème ligne de M.

$P_{i,j} = (a_{\tau(r),s})_{r,s}$ est obtenue à partir de M en échangeant les i-èmes et j-èmes lignes.

Ces opérations sont effectuées sur les colonnes si on multiplie à droite au lieu d'à gauche. De plus, en pratique, on n'écrit pas les produits matriciels mais les opérations qu'on effectue : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $L_i \leftrightarrow L_j$.

18.3.2 Pivot de Gauss

Proposition 18.3 Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe $A \subset [\![1, n]\!]^2 \times \mathbb{K}^*$ telle que pour tout $(i, j, \lambda) \in A$, $i \neq j$ et

$$\left(\prod_{(i,j,\lambda)\in A} A_{i,j,\lambda} \right) M$$

soit triangulaire supérieure (l'ordre des matrices dans le produit est important).

Démonstration. On a $M = (a_{k,l})_{k,l}$. Montrons qu'en multipliant M à gauche par des matrices convenables, on peut transformer M en N dont la première colonne est nulle sauf au plus le cœfficient en position $(1, 1)$.

Si tous les cœfficients de la première colonne de M sont nuls on choisit évidemment $N = M$.

Sinon, il existe k tel que $a_{k,1} \neq 0$. Si $a_{1,1} = 0$, $Q = A_{1,k,1}M$ est une matrice dont le cœfficient $(1, 1)$ est non nul. En étendant la définition de A à $\lambda = 0$ par l'identité, on remarque que la première colonne de la matrice

$$N = \left(\prod_{p=2}^{n} A_{p,1,-\frac{a_{p,1}}{a_{1,1}}} \right) A_{1,k,1}M$$

a tous ses cœfficients nuls sauf celui en position $(1, 1)$.

En réappliquant le résultat à toutes les colonnes de N (récurrence finie), on obtient le résultat. ∎

Remarque 18.2 En pratique on utilise plutôt les matrices $B_{i,\lambda}$ et $P_{i,j}$.

De plus, on peut aussi imposer aux cœfficients diagonaux de valoir 1.

Il est parfois utile de connaître la transformation de M, par exemple pour inverser.

Proposition 18.4 Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe $A \subset [\![1, n]\!]^2 \times \mathbb{K}^*$ telle que pour tout $(i, j, \lambda) \in A$, $i \neq j$ et

$$\left(\prod_{(i,j,\lambda)\in A} A_{i,j,\lambda} \right) M$$

soit diagonale.

Démonstration. Il existe Q produit de matrices de type $A_{i,j,\lambda}$ telle que QM soit triangulaire supérieure. Q est inversible en tant que produit de matrices qui le sont. Ainsi QM est inversible, donc aucun cœfficient diagonal de QM n'est nul.

En utilisant la dernière ligne de QM et en opérant comme dans la preuve précédente, on obtient une matrice triangulaire supérieure dont la dernière colonne est nulle sauf le dernier cœfficient. On applique ceci aux colonnes $n-1$, $n-2$ jusqu'à la deuxième. ∎

18.3.3 Résolution d'un système linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ et D un vecteur colonne à p lignes. Toutes les matrices de transformations introduites étant inversibles, le système linéaire $MX = D$ et celui $QMX = QD$ sont équivalents (avec QM la transformée de M par pivot de Gauss).

Exemple 18.3 Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Étudier le système d'inconnues (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -6 & -8 \\ 1 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

On transforme par des opérations de Gauss en

$$\left(\begin{array}{ccc|r} \boxed{1} & 3 & 4 & a \\ 0 & 0 & 0 & b+2a \\ 0 & 1 & 4 & c-a \\ 0 & -2 & -8 & d-2a \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|r} \boxed{1} & 0 & -8 & 4a-3c \\ 0 & 0 & 0 & b+2a \\ 0 & \boxed{1} & 4 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d+2c-4a \end{array}\right)$$

Le système est donc compatible ssi $b+2a = d+2c-4a = 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(4a-3c+8z, c-a-4z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Remarquons de plus que si B est la matrice d'une application linéaire entre les bases e et f, le calcul précédent donne les équations de $\mathrm{Im}(u)$ dans la base f (conditions de compatibilité) et permet de déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ (prendre $a=b=c=d=0$).

18.3.4 Calcul d'un inverse

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Si Q est telle que $N = QM$ soit diagonale alors $M^{-1} = N^{-1}Q$ qui est triviale à calculer.

Exemple 18.4 On cherche à inverser, si c'est possible la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On transforme via des opérations de Gauss le couple (A, I_4) en :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\text{puis en } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\text{puis en } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\text{puis en } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{matrix}$$

$$\text{puis en } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{19}{2} & 9 & -\frac{5}{2} & 4 \\ 8 & 9 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix}$$

Finalement, A est inversible. Pour calculer A^{-1}, il suffit en pratique de diviser la i-ème ligne de Q par le i-ème cœfficient de la diagonale de QM pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$. Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{19}{2} & 9 & -\frac{5}{2} & 4 \\ 8 & 9 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} & 9 & -\frac{5}{2} & 4 \\ 4 & \frac{9}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -4 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

18.4 Interprétation matricielle

18.4.1 Matrice d'une application linéaire

THÉORÈME 18.3 *L'application*

$$\varphi : \begin{cases} L(E,E') & \to & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathscr{M}_{e,f}(u) \end{cases}$$

est linéaire et bijective.

THÉORÈME 18.4 *On suppose $n = p$. Soit $u \in L(E,E')$.*

u est bijective si et seulement si $\mathscr{M}_{e,f}(u)$ est inversible. Le cas échéant, $\mathscr{M}_{f,e}(u^{-1}) = \mathscr{M}_{e,f}^{-1}(u)$.

Démonstration.

- On suppose u bijective. Il existe $v \in L(E',E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}$ et $v \circ u = \mathrm{Id}$.
  Donc $\mathscr{M}_f(u \circ v) = \mathscr{M}_f(\mathrm{Id})$ et $\mathscr{M}_e(v \circ u) = \mathscr{M}_e(\mathrm{Id})$.
  Donc $\mathscr{M}_{e,f}(u) \times \mathscr{M}_{f,e}(v) = I_n$ et $\mathscr{M}_f(v) \times \mathscr{M}_e(u) = I_n$.
  Donc $\mathscr{M}_{e,f}(u)$ est inversible et son inverse est $\mathscr{M}_{f,e}(u^{-1})$.
- On suppose $\mathscr{M}_{e,f}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$.
  Il existe $N \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $N \times \mathscr{M}_{e,f}(u) = I_n$ et $\mathscr{M}_{f,e}(u) \times N = I_p$.
  Or l'application φ ci-dessus est surjective donc il existe $v \in L(E',E)$ tel que $N = \mathscr{M}_{f,e}(v)$.
  Donc $\mathscr{M}_{f,e}(v) \times \mathscr{M}_{e,f}(u) = I_n$ et $\mathscr{M}_{e,f}(u) \times \mathscr{M}_{f,e}(v) = I_n$.
  Donc $\mathscr{M}_e(v \circ u) = \mathscr{M}_e(\mathrm{Id}_E)$ et $\mathscr{M}_f(u \circ v) = \mathscr{M}_f(\mathrm{Id}_{E'})$.
  Donc $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_{E'}$. ■

THÉORÈME 18.5 *L'application*

$$\varphi : \begin{cases} (L(E),+,\circ) & \to & (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),+,\times) \\ u & \mapsto & \mathscr{M}_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

On en déduit que

$$\psi : \begin{cases} (GL(E),\circ) & \to & (GL_n(\mathbb{K}),\times) \\ u & \mapsto & \mathscr{M}_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

Application : Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $MN = I_n$.

On introduit $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique c. Il existe $(u, v) \in (L(\mathbb{K}^n))^2$ tel que $M = \mathscr{M}_c(u)$ et $N = \mathscr{M}_c(v)$.

Par hypothèse, $MN = I_n$ donc $\mathscr{M}_c(u \circ v) = \mathscr{M}_c(\text{Id})$.

Donc $u \circ v = \text{Id}$. Donc u est bijective donc M est inversible.

Donc M est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche si et seulement si elle est inversible à droite.

Exercice : Soit A une matrice non inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'existence de $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AB = 0$.

On travaille dans $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique c. Il existe $u \in L(\mathbb{K}^n)$ tel que $\mathscr{M}_c(u) = A$.

Comme A est non inversible, u n'est pas bijective. Or c'est une application linéaire entre deux espaces de même dimension. Donc elle n'est pas injective.

Il existe un supplémentaire F de $\text{Ker}(u)$ dans $\mathbb{K}^n$. On note p le projecteur sur $\text{Ker}(u)$ parallèlement à F.

On note que $u \circ p = 0$ donc $\mathscr{M}_c(u)\mathscr{M}_c(p) = \mathscr{M}_c(0)$.

Finalement, $A \times \mathscr{M}_c(p) = 0$.

Exemple 18.5 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Trouver B.

Il existe $u \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathscr{M}_c(u) = A$.

On cherche une base de $\text{Ker}(u)$: $(-1, 1, -1)$.

On pose $F = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. $F \oplus \text{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$.

On cherche une expression analytique de la projection p sur $\text{Ker}(u)$ parallèlement à F : $(x, y, z) \mapsto (-z, z, -z)$.

La matrice M représentative de p dans c est une solution : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18.4.2 Traduction des égalités vectorielles

Soit $(u, x, y) \in L(E, E') \times E \times E'$.

On appelle $(\alpha_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ la matrice représentative de u entre e et f.

On appelle X la matrice de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ donc les coefficients sont les coordonnées de x dans e.

On appelle Y la matrice de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les coefficients sont les coordonnées de y dans f.

On note $(x_1, \cdots, x_p)$ les coordonnées de x dans e et $(y_1, \cdots, y_n)$ celles de y dans f.

$$\begin{aligned}
u(x)=y \text{ ssi } & u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right)=\sum_{i=1}^{n} y_i f_i \\
\text{ssi } & \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j)=\sum_{i=1}^{n} y_i f_i \\
\text{ssi } & \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} f_i\right)=\sum_{i=1}^{n} y_i f_i \\
\text{ssi } & \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} x_j\right) f_i=\sum_{i=1}^{n} y_i f_i \\
\text{ssi } & \text{pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ y_i=\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} x_j \\
\text{ssi } & Y=\mathscr{M}_{e,f}(u)X
\end{aligned}$$

18.4.3 Changement de bases

Définition 18.6 Soient e et e' deux bases de E. On appelle matrice de changement de bases de e vers e' et on note $P_e^{e'}$ la matrice $\mathscr{M}_{e',e}(\mathrm{Id}_E)$.

Exemple 18.6 On pose $e=(1,X,X^2)$ et $e'=(X(X-1),1,1-X)$.

$$P_e^{e'}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 18.3

- *Les matrices de changement de bases sont inversibles.*
- *Toute matrice inversible peut être interprétée comme matrice de changement de bases d'un espace vectoriel à choisir avec une base à choisir.*
- *Soit* (e,e') *deux bases de* E.

$$(P_e^{e'})^{-1}=P_{e'}^{e}$$

Exercice : On pose $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $M \in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer M^{-1}.

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $c=(c_1,c_2,c_3)$.

On introduit $c_1'=c_1+2c_2$, $c_2'=-c_1+c_3$ et $c_3'=2c_1+c_2+c_3$.

On a $c_1=\frac{1}{5}(-c_1'-2c_2'+2c_3')$, $c_2=\frac{1}{5}(3c_1'+c_2'-c_3')$ et $c_3=\frac{1}{5}(-c_1'+3c_2'+2c_3')$.

On montre que (c'_1, c'_2, c'_3) est une base. Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

<u>THÉORÈME 18.6</u> *Soient e et e' deux bases de E, f et f' deux bases de F.*

Soit $x \in E$ et $u \in L(E, E')$. On note x le vecteur colonne des coordonnées de x dans e. On note x' le vecteur colonne des coordonnées de x dans e'.

$$X' = (P_e^{e'})^{-1}X$$
$$\mathscr{M}_{e',f'}(u) = (P_f^{f'})^{-1} \times \mathscr{M}_{e,f}(u) \times P_e^{e'}$$

Démonstration.
- $\mathrm{Id}(x) = x$ donc $X' = \mathscr{M}_{e,e'}(\mathrm{Id})X = P_{e'}^{e}X = (P_e^{e'})^{-1}X$.
- On note que $u = \mathrm{Id}_{E'} \circ u \circ \mathrm{Id}_E$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{e',f'}(u) &= \mathscr{M}_{e',f'}(\mathrm{Id}_{e'} \circ u \circ \mathrm{Id}_E)\\ &= \mathscr{M}_{f,f'}(\mathrm{Id}_{E'} \times \mathscr{M}_{e,f}(u) \times \mathscr{M}_{e',e}(\mathrm{Id}_E)\\ &= P_{f'}^{f} \times \mathscr{M}_{e,f}(u) \times P_e^{e'}\\ &= (P_f^{f'})^{-1} \times \mathscr{M}_{e,f}(u) \times P_e^{e'}\end{aligned}$$ ∎

Exercice : On travaille dans $\mathbb{K}_2[X]$ muni de $c = (1, X, X^2)$ et $b = (X + 1, X^2 + 1, X - 2)$.

Soit $u \in L(\mathbb{K}_2[X])$ tel que $\mathscr{M}_c(u) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Trouver $\mathscr{M}_b(u)$.

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_f(u) &= \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 0 & 4\\ 3 & 6 & -6\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

18.5 Exemple de transformation algèbre/technique

18.5.1 Transformation algébrique → technique

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P'' - P + (2X - X^2)\widetilde{P}(1) \end{cases}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Trouver $\mathscr{M}_c(f)$.
3. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Trouver une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Trouver les plans de $\mathbb{R}_2[X]$ stables par f.

1. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X^2+1)(\lambda P + Q)'' - (\lambda P + Q) + (2X - X^2)(\lambda\widetilde{P}(1) + \widetilde{Q}(1)) \\ &= \lambda((X^2+1)P'' - P + (2X - X^2)\widetilde{P}(1)) + (X^2+1)Q'' - Q + (2X - X^2)\widetilde{Q}(1) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. $\mathscr{M}_c(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de coordonnées (x, y, z) dans c.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) &\text{ ssi } f(P) = 0 \\ &\text{ ssi } \mathscr{M}_c(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\text{ ssi } \begin{cases} -x - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \\ &\text{ ssi } (x, y, z) \in \mathrm{Vect}\left\{(-2, 2, 1)\right\} \\ &\text{ ssi } P \in \mathrm{Vect}\left\{-2 + 2X + X^2\right\} \end{aligned}$$

Finalement, $(-2 + 2X + X^2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de coordonnées (x, y, z) dans c.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Im}(f) & \text{ ssi il existe } Q \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } f(Q) = P \\ & \text{ssi il existe } (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \mathscr{M}_c(f) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ & \text{ssi il existe } (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} -x' - 2z' = x \\ 2x' + y' + 2z' = y \\ -x' - y' = z \end{cases} \\ & \text{ssi } x + y + z = 0 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de $\operatorname{Im}(f)$ dans c est $x + y + z = 0$.

5. $X - X^2$ et $-2 + 2X$ sont des vecteurs non colinéaires de $\operatorname{Im}(f)$.
Soit P de coordonnées (x, y, z) dans c ;

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Vect}\left\{X - X^2, -2 + 2X\right\} & \text{ ssi } \begin{vmatrix} 0 & -2 & x \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \\ & \text{ssi } x + y + z = 0 \end{aligned}$$

Le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$ est le seul plan stable par f.

18.5.2 Transformation d'un problème numérique

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n.

On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $c = (c_1, c_2)$. Il existe $u \in L(\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathscr{M}_c(u) = M$.

- Soit $e_1 \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) dans c.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(e_1) = \lambda e_1 & \text{ ssi } M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ & \text{ssi } \begin{cases} 3x - y = \lambda x \\ 4x - y = \lambda y \end{cases} \\ & \text{ssi } \begin{cases} (3 - \lambda)x - y = 0 \\ 4x - (\lambda + 1)y = 0 \end{cases} \\ & \text{ssi } \begin{cases} (3 - \lambda)x - y = 0 \\ (\lambda - 1)^2 x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 1$, $u(e_1) = \lambda e_1$ ssi $e_1 = 0$.
Si $\lambda = 1$, $u(e_1) = \lambda e_1$ ssi $2x - y = 0$.
On note en particulier que $c_1 + 2c_2$ vérifie $u(c_1 + 2c_2) = c_1 + 2c_2$.
On pose $e_1 = c_1 + 2c_2$ et $e_2 = c_2$.

- $e = (e_1, e_2)$ est une base donc on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_e(u) &= (P_c^e)^{-1}\mathscr{M}_c(u)P_c^e \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}M^n &= \mathscr{M}_c(u)^n \\ &= \mathscr{M}_c(u^n) \\ &= (P_c^e)\mathscr{M}_c(u^n)(P_c^e)^{-1} \\ &= (P_c^e)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}(P_c^e)^{-1}\end{aligned}$$

- On pose $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

A et I_2 commutent donc $(A + I_2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k I_2^{n-k}$.
Or $A^2 = 0$.
Donc $(A + I_2)^n = I_2 + nA$.
On a donc :

$$\begin{aligned}M^n &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}2n+1 & -n\\ 4n & 1-2n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

18.5.3 Application à la notion de rang d'une matrice

Définition 18.7 Soit $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de M et on note $\mathrm{rg}(M)$ le rang de mla famille des vecteurs colonnes de M (familles de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

Remarque 18.4 Le rang de M est le rang de toute application linéaire représentée par M.

THÉORÈME 18.7 *Pour tout* $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$, *on pose* $J_{n,p,r} = \sum_{k=0}^{r} E_{k,k}$.

Soit $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$ *et* $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\mathrm{rg}(M) = r$ *si et seulement s'il existe* $(P,Q) \in GL_n \times GL_p(\mathbb{K})$ *tel que* $M = PJ_{n,p,r}Q$.

Démonstration.

- On suppose qu'il existe $(P,Q) \in GL_n \times GL_p(\mathbb{K})$ tel que $M = PJ_{n,p,r}Q$. $\mathrm{rg}(J_{n,p,r}) = r$ et P et Q sont inversibles donc $\mathrm{rg}(PJ_{n,p,r}Q) = r$. Donc $\mathrm{rg}(M) = r$.
- On suppose $\mathrm{rg}(M) = r$.
  On note $c = (c_1, \cdots, c_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $b = (b_1, \cdots, b_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
  Il existe $u \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ tel que $\mathscr{M}_{c,b}(u) = M$.
  On a $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(M) = r$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = p - r$. (On suppose $p - r > 0$)
  Il existe une base $(c'_{r+1}, \cdots, c'_p)$ de $\mathrm{Ker}(u)$.
  Le théorème de la base incomplète assure l'existence de $(c'_1, \cdots, c'_r) \in (\mathbb{K}^p)^r$ tel que $(c'_1, \cdots, c'_p)$ soit une base.
  On pose $(b'_1, \cdots, b'_r) = (u(c'_1), \cdots, u(c'_r))$. Comme $\mathrm{Vect}\{c'_1, \cdots, c'_r\} \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, $u|_{\mathrm{Vect}\{c'_1, \cdots, c'_r\}}$ est injective donc $(b'_1, \cdots, b'_r)$ est libre.
  Le théorème de la base incomplète assure qu'il existe $(b'_{r+1}, \cdots, b'_n) \in (\mathbb{K}^n)^{n-r}$ tel que $(b'_1, \cdots, b'_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.
  (On suppose $n > r$) On pose $c' = (c'_1, \cdots, c'_p)$ et $b' = (b'_1, \cdots, b'_n)$.

$$M = \mathscr{M}_{c,b}(u) = P_b^{b'} \mathscr{M}_{c',b'}(u) P_{c'}^{c} = P_b^{b'} J_{n,p,r} P_{c'}^{c}$$

  Or $P_b^{b'}$ et $P_{c'}^{c}$ sont inversibles. D'où le résultat.
- Les cas laissés de côté sont simples et se traitent de la même manière. ■

Exercice : Trouver P et Q pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{rg}(M) = 3$. On note $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$ celle de $\mathbb{K}^3$.

Il existe $u \in L(\mathbb{K}^4, \mathbb{K}^3)$ tel que $\mathscr{M}_{c,b}(u) = M$.

$(5, -3, 3, -2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$ donc $(c_1, c_2, c_3, (5, -3, 3, -2))$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

On pose $b'_1 = u(c_1) = (1, 2, 0)$, $b'_2 = u(c_2) = (0, 1, 1)$ et $b'_3 = u(c_3) = (-1, -1, 3)$.

Une preuve de liberté et le théorème fondamental assurent que (b'_1, b'_2, b'_3) est une base de $\mathbb{K}^3$.

On a $\mathscr{M}_{c',b'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $c' = (c_1, c_2, c_3, (5, -3, 3, -2))$ et $b' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ et on a $P = P_c^{c'}$ et $Q = P_{b'}^b$.

Corollaire 18.1 *Soit $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^t)$.*

Démonstration. On note $r = \text{rg}(M)$. Il existe $(P, Q) \in GL_n \times GL_p(\mathbb{K})$ tel que $M = PJ_{n,p,r}Q$.

$$M^t = Q^t J_{n,p,r}^t P^t = Q^t J_{p,n,r} P^t$$

Or Q^t et P^t sont inversibles donc $\text{rg}(M^t) = r$. ∎

Chapitre 19

Déterminant

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ notée M.

19.1 Le groupe des permutations

Définition 19.1 On appelle permutation de $[\![1,n]\!]$ toute bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de telles bijections.

Proposition 19.1 $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

Définition 19.2 On note $[k]_\sigma$ l'ensemble $\{\sigma^i(k), i \in \mathbb{N}\}$ appelé orbite de k suivant σ.

Proposition 19.2 Aucune orbite n'est vide, deux orbites distinctes selon σ sont disjointes et la réunion de toues les orbites selon σ est $[\![1,n]\!]$.

Définition 19.3 On appelle cycle toute permutation c telle qu'il existe une et une seule orbite suivant c non réduite à un élément.

Cette orbite est appelée support du cycle et son cardinal est appelé longueur du cycle. Un cycle de longueur 2 est appelé transposition.

Exemple 19.1 On considère $\sigma \in \mathfrak{S}_7$ définie par $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 7$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 5$, $\sigma(6) = 1$ et $\sigma(7) = 6$ qu'on code souvent sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\sigma(1) = 3$, $\sigma^2(1) = 7$, $\sigma^3(1) = 6$ et $\sigma^4(1) = 1$. Donc $[1]_\sigma = \{1, 3, 6, 7\}$. L'orbite de $3, 6, 7$ selon σ est aussi $\{1, 3, 6, 7\}$. On trouve aussi $[2]_\sigma = [4]_\sigma = \{2, 4\}$ et $[5]_\sigma = \{5\}$.

Soit σ_1 qui coïncide avec σ sur $[1]_\sigma$ et qui laisse les autres éléments fixes ie,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

et σ_2 qui coïncide avec σ sur $[2]_\sigma$ et qui laisse les autres éléments fixes.

On a $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$. Autrement dit, on est capable d'écrire σ sous la forme d'une composée de cycles à support disjoints, qui par conséquent commutent.

Remarquons enfin que σ_1, qu'on note souvent $(1\,3\,7\,6)$ s'écrit comme composée non commutative des transpositions $(1\,3)(3\,7)(7\,6)$.

<u>Théorème 19.1</u> *Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme composée commutative de cycles à support disjoints, de manière unique à l'ordre des facteurs près.*

De plus, toute permutation distincte de l'identité s'écrit comme composée de transpositions.

Remarque 19.1 Si $n \geqslant 2$, le deuxième point est aussi vrai pour l'identité puisque toute transposition est égale à son inverse.

De plus, cette décomposition en produit de transposition n'est pas unique et les facteurs ne commutent pas en général.

<u>Définition 19.4</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et on note $\varepsilon(\sigma)$ l'entier $(-1)^{n-m}$ où m est le nombre d'orbites suivant σ.

Exemple 19.2 La signature de la permutation σ de l'ensemble précédent est $(-1)^{7-3} = 1$ puisque ses trois orbites sont $\{1, 3, 6, 7\}$, $\{2, 4\}$ et $\{5\}$.

La signature de l'identité est $(-1)^{n-n} = 1$.

Le signature d'un cycle de longueur q est $(-1)^{q-1}$ puisqu'il a une orbite de q éléments et $n-q$ orbites à un élément. En particulier, la signature d'une transposition est -1.

<u>Théorème 19.2</u> *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application ε est un morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \times)$. Lorsque $n \geqslant 2$, ce morphisme est surjectif.*

Remarque 19.2 Il en résulte que si une permutation est la composée de k transpositions, sa signature est $(-1)^k$. En particulier, la parité du nombre de transpositions dans la décomposition d'une permutation fixée est indépendant de la décomposition choisie.

<u>Définition 19.5</u> Le noyau du morphisme ε noté $\mathfrak{A}_n$ est appelé groupe alterné. Ses éléments sont appelés permutations paires. Les autres permutations sont dites impaires.

19.2 Un peu de vocabulaire

Soient E et F deux espaces vectoriels non nécessairement de dimension finie.

Définition 19.6 Soit $f : E^n \to F$. f est dite n-linéaire ssi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $(a_j)_{j\neq i} \in E^{n-1}$, l'application :

$$\begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n) \end{cases}$$

est linéaire.

On parle de forme n-linéaires quand $F = \mathbb{K}$. L'ensemble des applications n-linéaires est un espace vectoriel.

Remarque 19.3 *Une application n-linéaire est nulle sur les n-uplets qui contiennent un* 0.

Définition 19.7 Soit $f : E^n \to F$ n-linéaire. On dit que :

- f est alternée ssi f associe le vecteur nul de F à tout n-uplet dont deux composantes sont égales.
- f est symétrique ssi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, $f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \cdots, x_n)$
- f est anti-symétrique ssi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, $f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \cdots, x_n)$

Remarque 19.4 *L'ensemble des applications n-linéaires symétriques (resp. anti-symétriques, alternées) est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications n-linéaires de E^n vers F.*

Proposition 19.3 Une application n-linéaire est anti-symétrique ssi elle est alternée.

Remarque 19.5

- *Comme toute permutation est la composée de transpositions, une application n-linéaire $f : E^n \to F$ est symétrique (resp. anti-symétrique) ssi l'image par f d'une famille de n vecteurs dont on échange deux éléments est la même (resp. l'opposée) de celle de la famille originelle par f.*
- *L'image par une application n-linéaire alternée d'une famille liée est nulle.*

Exemple 19.3 $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \mapsto \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ est une application bilinéaire symétrique.
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bilinéaire anti-symétrique.
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ est trilinéaire alternée.

19.3 Différentes notions de déterminant

19.3.1 Motivation

On considère le système :

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 + \cdots + a_{1,n}\lambda_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}\lambda_1 + \cdots + a_{n,n}\lambda_n = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Il peut être interprété comme :

- $MX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = b$ d'inconnue $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$
- $u(x) = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}^n$.

En particulier, l'existence d'une solution est équivalente à la surjectivité de u donc à l'injectivité de u qui est équivalente à l'unicité de la solution. On a parlé de système de Cramer. Dans les chapitres précédents, on a associé à (S) un scalaire appelé déterminant de (S), dont la non nullité caractérisait les systèmes de Cramer. On veut donc définir ce scalaire dans le cas général.

19.3.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$ aussi notée e.

Définition 19.8 Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E notée aussi x. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note $(a_{i,j})_{i,j}$ les coordonnées du vecteur x_j dans la base e.

On appelle déterminant de x dans la base e le scalaire :

$$\det_e(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Théorème 19.3 $\det_e$ *est une forme n-linéaire alternée prenant la valeur* 1 *sur e.*

Théorème 19.4 *Une famille de n vecteurs de E est une base de E ssi le déterminant de cette famille dans la base e est non nul.*

Exemple 19.4 Soit $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ une famille libre de vecteurs de E, aussi notée u. L'hyperplan H de E engendré par la famille u est l'ensemble des vecteurs x de E tel que le déterminant dans la base e de $(u_1, \cdots, u_{n-1}, x)$ soit nul.

Une équation cartésienne de H est donc $\det(u_1, \cdots, u_{n-1}, x) = 0$.

19.3.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 19.9 Soit $M = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de M le scalaire :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Remarque 19.6 Par définition d'une matrice de passage, le déterminant d'une base f de E dans la base e est $\det(P_e^f)$.

THÉORÈME 19.5 *Soit $(M, N, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$.*

- $\det(M^t) = \det(M)$
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$
- $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *ssi* $\det(M) \neq 0$. *Dans ce cas,* $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.
- $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

19.3.4 Déterminant d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 19.10 Soit $u \in L(E)$.

La formule de changement de bases et les deux derniers points du théorème précédent assure que toutes les matrices représentant u dans une base quelconque de E ont le même déterminant, noté $\det(u)$. La définition d'une matrice représentative assure de plus que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E,

$$\det(u) = \det_e(u(e_1), \cdots, u(e_n))$$

THÉORÈME 19.6 *Pour toute forme n-linéaire alternée f sur E et toute famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E, on a :*

$$f(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = \det(u) f(x_1, \cdots, x_n)$$

THÉORÈME 19.7 *Soit $(u, v, \lambda) \in L(E)^2 \times \mathbb{K}$.*

- $\det(\mathrm{Id}) = 1$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
- $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$
- $u \in GL(E)$ *ssi* $\det(u) \neq 0$. *Dans ce cas* $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.

19.4 Calcul de déterminant

La formule donnant le déterminant de M

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$$

permet de retrouver les formules pour $n = 2$ ou $n = 3$ et de trouver certaines propriétés de déterminants paramétrés.

Proposition 19.4 On montre aussi de plus que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Comme le déterminant est multilinéaire, alterné et anti-symétrique (les variables étant les lignes ou les colonnes de la matrice), le déterminant de M reste inchangé quand on applique une transformation de Gauss à M.

Un pivot de Gauss (partiel) et des échanges de colonnes (ou de lignes) permettent de ramener le calcul de $\det(M)$ à celui d'une matrice triangulaire (en faisant attention aux changements de signes).

THÉORÈME 19.8 *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de chaque bloc.*

Définition 19.11 Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

On appelle cofacteur du coefficient en position (i, j) de M le scalaire $(-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$ où $M_{i,j}$ est obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne.

THÉORÈME 19.9 *Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $c_{i,j}$ le cofacteur du coefficient en position (i, j) de M.*

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} c_{i,j} \qquad \text{(développement par rapport à la } i\text{-ème ligne)}$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} c_{i,j} \qquad \text{(développement par rapport à la } j\text{-ème colonne)}$$

Remarque 19.7 C'est une formule utile pour trouver une formule de récurrence ou sur une ligne (ou une colonne) avec beaucoup de zéros.

Démonstration. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On travaille dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ muni de sa base canonique $E = (E_1, \cdots, E_n)$.

On note $(C_1, \cdots, C_n)$ les vecteurs colonnes de M.

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det_E(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_n)\\
&= \det_E\left(C_1, \cdots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}E_i, C_{j+1}, \cdots, C_n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \det_E(C_1, \cdots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \cdots, C_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} m_{i,j} \det_E(E_i, C_1, \cdots, C_{j-1}, C_{j+1}, \cdots, C_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & M_{i,j} \end{pmatrix}\\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i+j} \det(M_{i,j})\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} c_{i,j}
\end{aligned}$$

■

19.5 Applications

19.5.1 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 19.12 On note $\mathscr{B}$ l'ensemble des bases de E. On définit sur $\mathscr{B}$ une relation binaire en posant :

$$\forall (b, b') \in \mathscr{B}^2,\ b\mathcal{R}b' \text{ ssi } \det_b(b') > 0$$

Proposition 19.5 $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et si (b, b') et (b', b'') ne sont pas en relation, $b\mathcal{R}b''$

Démonstration.

- La relation $\mathcal{R}$ est réflexive :
  Soit $(b, b') \in \mathscr{B}^2$ tel que $b\mathcal{R}b'$.

$$P_{b'}^{b} = (P_b^{b'})^{-1} \text{ donc } \det(P_{b'}^{b}) = \frac{1}{\det(P_b^{b'})}$$

  Donc $\det(P_{b'}^{b}) > 0$ donc $b'\mathcal{R}b$.

- La relation $\mathcal{R}$ est transitive :
  Soit $(b, b', b'') \in \mathscr{B}^3$ tel que $b\mathcal{R}b'$ et $b'\mathcal{R}b''$.
  On a $P_b^{b''} = P_b^{b'} P_{b'}^{b''}$.
  Donc $\det(P_b^{b''}) = \det(P_b^{b'}) \det(P_{b'}^{b''})$.
  Donc $\det(P_b^{b''}) > 0$.
  Donc $b\mathcal{R}b''$.
- Il existe $(b, b') \in \mathscr{B}^2$ tel que b et b' ne soient pas en relation :
  Il existe une base b de E. On construit une base b' de E en multipliant le premier vecteur de b par -1 et en conservant les autres.
  On a $\det(P_b^{b'}) < 0$ donc il existe $(b, b') \in \mathscr{B}^2$ tel que b et b' ne soient pas en relation.
- Il existe $(b_0, b_0') \in \mathscr{B}^2$ tel que b et b' ne soient pas en relation.
  Soit $b \in \mathscr{B}$ tel que b et b' ne soient pas en relation.
  Par construction, $\det(P_b^{b_0}) < 0$ et $\det(P_{b_0}^{b_0'}) < 0$ (non nuls car c'est une base).
  Donc $\det(P_b^{b_0}) \det(P_{b_0}^{b_0'}) > 0$.
  Donc $\det(P_b^{b_0'}) > 0$.
  Finalement, $b\mathcal{R}b_0'$.
  Donc, pour tout $(b, b', b'') \in \mathscr{B}^3$ vérifiant b et b' ne sont pas en relation et b' et b'' non plus, $b\mathcal{R}b''$. ∎

Remarque 19.8 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive, transitive et symétrique. Pour tout $x \in E$, $\{y \in E, y\mathcal{R}x\}$ s'appelle la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$, noté $[x]_{\mathcal{R}}$.

- *Aucune classe d'équivalence n'est vide.*
- *La réunion des classes d'équivalences est E.*
- *Deux classes d'équivalences sont disjointes.*

Il existe deux classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{B}$. Chacune d'entre elles s'appelle une orientation. Orienter E signifie choisir une des deux orientations (en pratique, on fixe une base). Les bases de l'orientation choisie sont dites directes, les autres sont dites indirectes.

Exercice : On oriente $\mathbb{R}_2[X]$ par $(1, X, X(X+1))$.

Vérifier que $(X+1, X+2, X^2+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner son orientation.

$$\det_{(1,X,X^2)}(1, X, X(X+1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\det_{(1,X,X^2)}(X+1, X+2, X^2+1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$\det_{(1,X,X^2)}(X+1, X+2, X^2+1) < 0$ donc $(X+1, X+2, X^2+1)$ est une base indirecte.

19.5.2 Calcul d'inverses de matrices

<u>THÉORÈME 19.10</u> *Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle $c_{i,j}$ le cofacteur du coefficient en position (i,j) de M. On appelle $\widetilde{M}$ la matrice $(c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ (comatrice de M).*

$$\widetilde{M}^t M = M\widetilde{M}^t = \det(M)I_n$$

COROLLAIRE 19.1 *Si $\det(M) \neq 0$, M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\widetilde{M}^t$. (Utile si $n = 2$ ou $n = 3$)*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Le coefficient en position (i,j) de $\widetilde{M}^t M$ est :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{k,i} m_{k,j}$$

- On suppose $i = j$. $d_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{k,i} m_{k,i} = \det(M)$ (développement par rappor à la i-ème colonne).
- On suppose $i \neq j$.
  $d_{i,j}$ est le développement par rapport à la i-ème colonne du déterminant de la matrice obtenue à partir de M en remplaçant la i-ème colonne de M par la j-ème colonne de M.
  Donc $d_{i,j} = 0$.

Donc $\widetilde{M}^t M = \det(M)I_n$. ∎

19.5.3 Systèmes de Cramer

On suppose M inversible. Soit $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On sait que l'équation $MX = B$ d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ a une seule solution (égale à $M^{-1}B$).

Proposition 19.6 Notons $(x_1, \cdots, x_n)$ les composantes de X. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note M_i la matrice obtenue à partir de M en remplaçant la i-ème colonne de M par B.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(M)}$.

Démonstration. On note $(C_1, \cdots, C_n)$ les vecteurs colonne de M et E la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}$.

Par définition, $B = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i$.

$$\begin{aligned}
\det(M_i) &= \det_E(C_1, \cdots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \cdots, C_n) \\
&= \det_E\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det_E(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n) \\
&= x_i \det(M)
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. ∎

Exemple 19.5 Résoudre :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 2 \\ y + 2z = \end{cases}$$

- Méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

  L'unique solution de (S) est donc $(1, -1, 1)$.
- Méthode de Cramer :

  On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  $\det(M) = -3$. Le système étant de Cramer, il admet une seule solution qui est :

$$\left(\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

C'est-à-dire $(1,-1,1)$.

Remarque 19.9

- *C'est une méthode inefficace pour les systèmes numériques et sans discussion pour les systèmes paramétrés.*
- *Cependant, elle est limitée car elle ne gère que les systèmes carrés.*

Exemple 19.6 Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer, sans pivots, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de :

$$(S) : \begin{cases} mx+y=m \\ mx-y=m+1 \\ x+my=m-1 \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique c et $\mathbb{R}^2$ de la sienne notée c'.

Il existe $u\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathscr{M}_{c',c}(u)=\begin{pmatrix} m & 1 \\ m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$.

On pose $b=(m,m+1,m-1)$. $\mathscr{S}$ est l'ensemble des solutions de $u(X)=b$ d'inconnue $X\in\mathbb{R}^2$.

On montre que $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}\left\{(m,m,1),(1,-1,m)\right\}$.

- On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}\neq\varnothing &\text{ ssi } (m,m+1,m-1)\in\mathrm{Im}(u) \\ &\text{ ssi } (m,m+1,m-1)\in\mathrm{Vect}\left\{(m,m,1),(1,-1,m)\right\} \\ &\text{ ssi } \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ m+1 & m & -1 \\ m-1 & 1 & m \end{vmatrix}=0 \\ &\text{ ssi } 3m^2-4m-1=0 \end{aligned}$$

- Si $3m^2-4m-1\neq 0$, $\mathscr{S}=\varnothing$.
- On suppose $3m^2-4m-1=0$. Les deux premières équations de (S) n'étant pas proportionnelles et $\mathrm{rg}(u)=2$, on a :

$$\begin{aligned} (S) &\text{ ssi } \begin{cases} mx+y=m \\ mx-y=m+1 \end{cases} \\ &\text{ ssi } \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2m}\begin{vmatrix} m & 1 \\ m+1 & -1 \end{vmatrix} \\ y=-\dfrac{1}{2m}\begin{vmatrix} m & m \\ m & m+1 \end{vmatrix} \end{cases} \\ &\text{ ssi } \begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2m} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Chapitre 20

Espaces euclidiens

20.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

20.1.1 Définition

Définition 20.1 Soit E un espace vectoriel réel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique sur E telle que $\forall x \in E\backslash\{0\}$, $f(x,x) > 0$ (on dit qu'elle est définie positive).

Exemple 20.1

- Pour tout n,

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

  est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.
- Si $a < b$,

$$\varphi : \begin{cases} C^0([a,b], \mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_a^b f(t)g(t)\,dt \end{cases}$$

  est un produit scalaire sur $C^0([a,b], \mathbb{R})$.

Définition 20.2 Soit E muni d'un produit scalaire φ. On appelle norme associée à φ la fonction $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$.

Remarque 20.1 Comme on ne manipule en général qu'un seul produit scalaire, on notera par la suite E un espace vectoriel et $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et y et $\|x\|$ la norme de x associés.

20.1.2 Propriétés

<u>THÉORÈME 20.1</u> CAUCHY-SCHWARZ *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Pour tout $x, y \in E^2$, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

avec égalité ssi (x, y) est liée.

Démonstration. Soit $x, y \in E^2$. Si $x = 0$, on a bien le résultat. On suppose donc $x \neq 0$. Posons

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle \end{cases}$$

φ est positive et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

qui est un polynôme de degré 2 puisque $\|x\| \neq 0$.

Comme φ est positive, son discriminant est négatif ou nul, ie

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$$

ce qui conclut.

De plus, on a l'égalité ssi le discriminant est nul ssi il existe λ_0 tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$ ie $\lambda_0 x + y = 0$ ssi (x, y) est liée. ∎

Proposition 20.1 Soit $(x, y) \in E^2$.
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme)
- $\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$ (identité de polarisation)

Démonstration. On a

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$
$$\|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

En ajoutant et soustrayant ces deux égalités, on obtient les résultats. ∎

Exemple 20.2 Soit $u \in L(E)$. On considère les deux propriétés suivantes :
- Pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$
- Pour tout $x, y \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Clairement le deuxième point implique le premier.
Réciproquement, si u vérifie le premier point, pour tout $x, y \in E^2$,

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2}{4} \\ &= \frac{\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2}{4} \\ &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Ces deux assertions sont donc équivalentes.

20.1.3 Norme d'un vecteur

Proposition 20.2
- $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
- $\forall (x, y) \in E^2$, $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Démonstration.
- Clair par définition du produit scalaire (défini positif)
- Pour tout (λ, x), $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2 \|x\|^2$.
- Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}(\|x\| + \|y\|)^2 - \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| - \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ &= 2(\|x\|\,\|y\| - \langle x, y\rangle)\end{aligned}$$

Or $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\,\|y\|$ donc $(\|x\| + \|y\|)^2 - \|x+y\|^2 \geqslant 0$, ce qui assure le résultat.
En l'appliquant à $x + y$ et $-y$, on trouve de plus :

$$\|x + y - y\| \leqslant \|x + y\| + \|y\|$$

et par symétrie

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x + y\|$$

D'où la deuxième inégalité. ∎

<u>Définition 20.3</u> Un vecteur $x \in E$ est dit unitaire ssi $\|x\| = 1$.

20.2 Orthogonalité

20.2.1 Vocabulaire

Définition 20.4

- Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux ssi $\langle x, y\rangle = 0$
- Un vecteur x de E est dit orthogonal à un sous-espace vectoriel F de E ssi pour tout $y \in F$, $\langle x, y\rangle = 0$.
- Deux sous-espaces F et G de E sont dits orthogonaux ssi pour tout $x, y \in F \times G$, $\langle x, y\rangle = 0$.

Proposition 20.3 Soit F et G deux sous-espaces de E dont on suppose connaître deux familles génératrices $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_j)_{j\in J}$

Alors si $x \in E$, $x \perp F$ ssi $\forall i \in I$, $x \perp f_i$ et $F \perp G$ ssi pour tout i, j, $f_i \perp g_j$.

Démonstration.

- Si pour tout $i \in I$, $x \perp f_i$.
  Soit $y \in F$. Comme f est génératrice, $y = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$.
  Par linéarité du produit scalaire, on a $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle x, f_i\rangle = 0$.
  Donc $x \perp F$. L'autre implication est triviale.
- On suppose que pour tout $(i, j) \in I \times J$, $f_i \perp g_j$.
  Soit $x, y \in F \times G$. Par génératricité, on a $x = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$ et $y = \sum_{j\in J_j}^{\mu} g_j$.
  Par linéarité,
  $$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \lambda_i \mu_j \langle f_i, g_j\rangle = 0$$
  Donc $F \perp G$ et l'autre implication est triviale. ■

20.2.2 Orthogonal d'une partie de E

Définition 20.5 Soit $A \subset E$ non vide. On appelle orthogonal de A l'ensemble $\{x \in E, \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}$.

Cet ensemble est noté $A^\perp$.

Proposition 20.4 Pour tout $A \subset E$, $A^\perp$ est un sous-espace de E.

Démonstration. Pour tout $x \in A$, $\langle x, 0\rangle = 0$ donc $0 \in A^\perp$.

De plus, soit $\lambda, x_1, x_2 \in A^\perp$ et $y \in A$.

$$\langle \lambda x_1 + x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = 0$$

Donc $\lambda x_1 + x_2 \in A^{\perp}$. ∎

20.2.3 Familles orthogonales

Définition 20.6 Soit I un ensemble, $(x_i)_{i\in I} \in E^I$.

- $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthogonales ssi pour tout $(i,j) \in I^2$ vérifiant $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.
- $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale ssi pour tout $(i,j) \in I^2$, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Théorème 20.2 *Soit I un ensemble fini, $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale.*

x est libre ssi pour tout $i \in I$, $x_i \neq 0$. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Démonstration. La première implication est triviale. Réciproquement soit λ telle que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$.

Soit $j \in I$. On a

$$0 = \left\langle x_j, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \right\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle x_j, x_i\rangle = \lambda_j \left\| x_j \right\|^2$$

Comme $x_j \neq 0$, $\lambda_j = 0$. Donc x est libre. ∎

Théorème 20.3 Pythagore *Soit I un ensemble fini non vide, $x \in E^I$.*

Si x est orthogonale, $\left\| \sum\limits_{i\in I} x_i \right\|^2 = \sum\limits_{i\in I} \left\| x_i \right\|^2$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i\in I} x_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i\in I} x_i, \sum_{i\in I} x_i \right\rangle \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \sum_{i\in I} \langle x_i, x_i\rangle \\
&= \sum_{i\in I} \left\| x_i \right\|^2
\end{aligned}$$ ∎

Remarque 20.2 La réciproque est fausse sauf pour $\mathrm{Card}(I) \in \{1,2\}$.

20.3 Cas de la dimension finie

20.3.1 Définitions

Définition 20.7 On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple 20.3 $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique est un espace euclidien.

Soit E un espace euclidien dont on suppose avoir trouvé une base orthonormale $e = (e_1, \cdots, e_n)$.

Soit $x, y \in E^2$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ dans e.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Donc on peut se ramener à $\mathbb{R}^n$ par le choix d'une base orthonormale.

20.3.2 Existence de bases orthonormées

Théorème 20.4 *Soit E un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Toute famille orthonormale de E se complète en une base orthonormale de E.*

Corollaire 20.1 *Tout espace euclidien non réduit à $\{0\}$ admet une base orthonormale.*

Démonstration.

- Soit a une famille orthonormale de E. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des surfamilles orthonormales de a.
  Tous les éléments de $\mathcal{E}$ ont au plus $\dim(E)$ éléments et $a \in \mathcal{E}$, donc on a une surfamille de a de cardinal maximal notée $(e_1, \cdots, e_p)$.
- Par construction $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre et orthonormale. Supposons qu'elle ne soit pas génératrice.
  Il existe alors $z \in E \setminus \operatorname{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\}$. On pose $x = z - \sum_{i=1}^{p} \langle z, e_i\rangle e_i$.
  $x \neq 0$ sinon $z \in \operatorname{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\}$. De plus, pour $j \in [\![1, p]\!]$,
  $$\langle x, e_j\rangle = \langle z, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle z, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0$$
  Donc $e_j \perp x$ et $(e_1, \cdots, e_p, \frac{x}{\|x\|})$ est orthonormale.
  Or c'est une surfamille de a à $p + 1$ vecteurs, ce qui est absurde. Donc $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice. C'est donc une base. ∎

Corollaire 20.2 *Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E.*
- $F \oplus F^{\perp} = E$
- *$F^{\perp}$ est le seul sous-espace de E, orthogonal et supplémentaire à F.*

Démonstration.
- Soit $x \in F \cap F^{\perp}$.
  Par définition $\langle x, x\rangle = 0$ donc $x = 0$.
  L'autre inclusion étant triviale, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
- Si $F = E$ ou $F = \{0\}$, le résultat est trivial.
- On note $p = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$.
  Il existe $(e_1, \cdots, e_p)$ base orthonormée de F et $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ tel que $(e_1, \cdots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.
  On a $e_j \in F^{\perp}$ pour $j \in [\![p+1, n]\!]$. On a donc trouvé une famille libre de $n - p$ vecteurs de $F^{\perp}$.
  Donc $\dim(F^{\perp}) \geqslant n - p$ et $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) \geqslant n$.
  Or $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(F + F^{\perp}) + \dim(\{0\}) = \dim(F + F^{\perp})$.
  D'où $F + F^{\perp} = E$.
  Enfin, $F \oplus F^{\perp} = E$.
- Soit G un sous-espace de E tel que $G \oplus F = E$ et $F \perp G$.
  On a alors $G \subset F^{\perp}$. De plus, $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(F^{\perp})$ donc $G = F^{\perp}$. ■

Corollaire 20.3 *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*

$$F^{\perp\perp} = F$$

Démonstration. On a $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp} = E$ donc par unicité, $F = F^{\perp\perp}$. ■

Définition 20.8 On note $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ ssi $F \oplus G = E$ et $F \perp G$.

Théorème 20.5 Riesz *L'application*

$$\varphi : \begin{cases} E & \to & L(E, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle a, x\rangle \end{cases} \end{cases}$$

est un isomorphisme. Par conséquent, pour toute forme linéaire f, il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \langle a, \cdot\rangle$.

Démonstration. Il existe une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Soit $f \in L(E, \mathbb{R})$.

- On pose $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\langle a, e_j\rangle = f(e_j)$.
  Donc $\langle a, \cdot\rangle$ et f sont deux formes linéaires qui coïncident sur une base. Elles sont donc égales.
- Soit $a, b \in E^2$ tel que $f = \langle a, \cdot\rangle = \langle b, \cdot\rangle$.
  Pour tout $x \in E$, $\langle a - b, x\rangle = 0$ donc $\|a - b\|^2 = 0$ et $a = b$. ■

Exemple 20.4 On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. La base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormale.

On définit

$$e_1^* : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x \end{cases} \quad e_2^* : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & y \end{cases} \quad e_3^* : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & z \end{cases}$$

(e_1^*, e_2^*, e_3^*) est une base de $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Soit φ l'isomorphisme précédent et $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$.

$\varphi(a)$ a pour coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans (e_1^*, e_2^*, e_3^*).

Remarque 20.3 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sous certaines hypothèses, on peut associer à f et à un triplet $a \in \mathbb{R}^3$ une application linéaire L_a telle que $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$.*

Soit $a \in \mathbb{R}^3$. $L_a \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et ses coordonnées dans (e_1^*, e_2^*, e_3^*) sont $(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a))$.

Classiquement, on note $L_a = df(a)$ et $e_1^* = dx$, $e_2^* = dy$ et $e_3^* = dz$. On a alors

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\,dz$$

De plus, par le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur appelé gradient de f en a et noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}^3$,

$$df(a)(h) = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a), h\rangle$$

20.4 Projection orthogonale

20.4.1 Définition

Définition 20.9 Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. On appelle projection orthogonale q sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 20.4 *Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée de F. Il existe $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ tel que $(e_1, \cdots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.*

Soit $x \in E$*. On sait que* $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$*.*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle q(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Exemple 20.5 On travaille dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On pose H l'hyperplan dont une équation cartésienne est $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

On cherche la matrice dans la base canonique de la projection π orthogonale sur H.

$((1,-1,0,\cdots,0),\cdots,(1,0,\cdots,0,-1))$ est une base de H. Or $\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\cdots,1)$ est orthogonal à tous les vecteurs de cette base donc il appartient à $H^\perp$.

Comme H est un hyperplan, la dimension de $H^\perp$ est 1 donc $\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\cdots,1)$ est une base de $H^\perp$. Donc

$$\mathrm{Id} - \pi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\cdots,x_n) & \mapsto & \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}(1,\cdots,1) \end{cases}$$

Et

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\cdots,x_n) & \mapsto & (x_1,\cdots,x_n) - \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}(1,\cdots,1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathscr{M}_b(\pi) = I_n - \frac{1}{n} J_n = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

avec $J_n = (1)_{i,j}$.

Remarque 20.5 *On a, pour tout* x, y*,* $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$*.*

20.4.2 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Définition 20.10 Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E, $x_0 \in E$.

On appelle distance de x_0 à F et on note $d(x_0, F)$ le réel $\inf_{x \in F} \|x - x_0\|$.

THÉORÈME 20.6 *Avec les notations précédentes et* q *la projection orthogonales sur* F*,*

$$d(x_0, F) = \|x_0 - q(x_0)\|$$

De plus, pour tout $y \in F$*,* $\|x_0 - y\| = d(x_0, F)$ *ssi* $y = q(x_0)$*.*

20.4.3 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition 20.11 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \neq 0$ dont une base est $(x_1, \cdots, x_n)$. On construit $(e_1, \cdots, e_n)$ en posant :

- $e_1 = x_1$
- $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, e_{k+1} est la projection orthogonale de x_{k+1} sur $\mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_k\}^{\perp}$.

Théorème 20.7 *Pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_1, \cdots, e_k)$ *est une base orthogonale de* $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_k\}$ *et* $\langle e_k, x_k\rangle > 0$.

Démonstration.

- On procède par récurrence. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose H_k : « $(e_1, \cdots, e_k)$ est une base orthogonales de $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_k\}$ ».
- $e_1 = x_1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que H_k soit vraie.
  Soit p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_k\}^{\perp}$. Par construction, $e_{k+1} = p(x_{k+1})$.
  Pour $j \leqslant k$, $\langle e_{k+1}, e_j\rangle = \langle x_{k+1}, p(e_j)\rangle = 0$. Donc $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ est orthogonale par H_k.
  De plus, $x_{k+1} \notin \mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_k\} = \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_k\}$. Donc $x_{k+1} \notin \mathrm{Ker}(p)$ et $e_{k+1} \neq 0$, donc par H_k, $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ est libre.
  Enfin, $x_{k+1} - e_{k+1} = x_{k+1} - p(x_{k+1}) \in \mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_k\}$ donc $e_{k+1} \in \mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_{k+1}\}$. Or, pour $j \leqslant k$, $e_j \in \mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_{k+1}\}$.
  Don $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ est une famille orthogonale libre de $k+1$ vecteurs dans $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_{k+1}\}$ qui est de dimension $k+1$ donc c'en est une base orthogonale et H_{k+1} est vraie.
- Le principe de récurrence finie conclut.
- $\langle x_1, e_1\rangle = \|x_1\|^2$. Or $x_1 \neq 0$ donc $\langle x_1, e_1\rangle > 0$.
- Soit $k \in [\![2, n]\!]$. On note p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_{k-1}\}$.

$$\langle e_k, x_k\rangle = \langle p(x_k), x_k\rangle = \langle p(x_k), x_k - p(x_k)\rangle + \|p(x_k)\|^2 = \|e_k\|^2$$

  Or $e_k \neq 0$ car il fait partie d'une base. Ainsi, $\langle e_k, x_k\rangle > 0$. ■

Définition 20.12 Formules générales Formules d'orthogonalisation :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 \\ \forall k \in [\![2, n]\!], e_k = x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i \end{cases}$$

Formules d'orthonormalisation :

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|} \\ \forall k \in [\![2, n]\!], e'_k = x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, e_i \rangle e_i \\ \forall k \in [\![2, n]\!], e_k = \dfrac{e'_k}{\|e'_k\|} \end{cases}$$

Exemple 20.6 Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$.

On pose :

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= X - \frac{\langle X, P_0 \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 \\ P_2 &= X^2 - \frac{\langle X^2, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 - \frac{\langle X^2, P_0 \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 \\ P_3 &= X_3 - \frac{\langle X^3, P_2 \rangle}{\|P_2\|^2} P_2 - \frac{\langle X^3, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 - \frac{\langle X^3, P_0 \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 \end{aligned}$$

On a donc $P_1 = X - \frac{1}{2}$, $P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$ et $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}$. Ainsi $(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1}{\|P_1\|}, \frac{P_2}{\|P_2\|}, \frac{P_3}{\|P_3\|})$ est orthonormale.

THÉORÈME 20.8 *Soit E un espace euclidien de dimension n dont une base est $(x_1, \cdots, x_n)$. Il existe une unique base $(b_1, \cdots, b_n)$ orthonormale et telle que :*

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_k\} = \mathrm{Vect}\{b_1, \cdots, b_k\}$
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle x_k, b_k \rangle > 0$.

Démonstration. On a vu l'existence précédemment. Soit $(b'_1, \cdots, b'_n)$ qui convient.

- On a :

$$\mathrm{Vect}\{b_1\} = \mathrm{Vect}\{x_1\} = \mathrm{Vect}\{b'_1\}$$

  Donc b_1 et b'_1 sont colinéaires. Comme $b_1 \neq 0$, il existe λ tel que $b'_1 = \lambda b_1$.
  Or $1 = \|b'_1\| = |\lambda|\, \|b_1\| = |\lambda|$ donc $\lambda = \pm 1$.
  De plus, $\langle x_1, b'_1 \rangle > 0$ donc $\lambda \langle x_1, b_1 \rangle > 0$ donc $\lambda > 0$ et $\lambda = 1$.
  Donc $b_1 = b'_1$.
- Soit $k \in [\![2, n]\!]$. On considère l'orthogonal F de $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_{k-1}\}$ dans $\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_k\}$. Par construction $\dim(F) = 1$.
  Or $(b_k, b'_k) \in (F \setminus \{0\})^2$ donc $\mathrm{Vect}\{b_k\} = \mathrm{Vect}\{b'_k\}$. Comme précédemment, on montre $b_k = b'_k$, ce qui conclut quant à l'unicité. ■

Chapitre 21

Groupe orthogonal

21.1 Automorphisme orthogonal

E est un espace euclidien non réduit à $\{0\}$, de dimension n et muni d'une base orthonormale $e = (e_1, \cdots, e_n)$.

21.1.1 Définition

Définition 21.1 On appelle automorphisme orthogonale de E tout automorphisme u tel que pour tout $x, y \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

On dit que $u \in O(E)$.

Proposition 21.1 $O(E) \subset GL(E)$.

Démonstration. Soit $u \in O(E)$ et $x \in \operatorname{Ker}(u)$.

$0 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ donc $x = 0$. Par conséquent, $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$ donc u est bijective (dimension finie). ■

Proposition 21.2 les symétries orthogonales sont des automorphismes orthogonaux.

Démonstration. Soit s une symétrie orthogonales. Il existe un sous-espace F et E telle que s soit la symétrie par rapport à F.

Soit $x, y \in E$. Ces vecteurs se décomposent sur $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$ en $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$.

$$\langle s(x), s(y)\rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle - \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle$$

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_2\rangle + \langle x_2, y_1\rangle$$

Or $\langle x_1, y_2\rangle = \langle x_2, y_2\rangle = 0$ donc

$$\langle s(x), s(y)\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x, y\rangle$$ ■

Définition 21.2 Les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans s'appellent des réflexions et celles par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$ s'appellent retournements.

21.1.2 Caractérisations algébriques

Théorème 21.1 *Soit $u \in L(E)$. u est un automorphisme orthogonal ssi pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.*

Théorème 21.2 *Soit $u \in L(E)$. u est un automorphisme orthogonal ssi $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base orthonormée.*

Démonstration.
$\Rightarrow$ Clair
$\Leftarrow$ u transforme une base en une base donc $u \in GL(E)$.
Soit $x, y \in E^2$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ dans e.

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \langle x, y\rangle$$

Donc $u \in O(E)$. ■

21.1.3 Caractérisation matricielle

Théorème 21.3 *Soit $u \in L(E)$ et $M = \mathscr{M}_e(u)$.*
$u \in O(E)$ ssi $M^t \times M = I_n$.

Démonstration. On note $M = (m_{i,j})_{i,j}$.

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\Leftrightarrow \forall i, j, \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall i, j, \sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{t,i} m_{l,j} \langle e_t, e_l\rangle = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall i, j, \sum_{t=1}^{n} m_{t,i} m_{t,j} = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow M^t M = I_n \end{aligned}$$ ■

Définition 21.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est orthogonale ssi $M^t M = I_n$ ssi $M M^t = I_n$. L'ensemble de ces matrices est $O_n(\mathbb{R})$.

Remarque 21.1 $\mathscr{M}_e(u) \in O_n$ ssi $u \in O(E)$ *à condition que e soit orthonormale.*

Tout élément de O_n peut être interprété comme une matrice de changement de base entre deux bases orthonormales. En particulier, si e et e' sont deux bases orthonormales, $(P_e^{e'})^{-1} = (P_{e'}^{e})^t$.

21.1.4 Structure de $O(E)$

Théorème 21.4
- *Pour tout $M \in O_n$, $\det(M) = \pm 1$.*
- *$(O_n, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.*
- *$\{M \in O_n, \det(M) = 1\}$ est un sous-groupe de O_n noté SO_n et appelé groupe spécial orthogonal.*
- *Les éléments des SO_n s'appellent les rotations.*

Démonstration.
- $M^tM = I_n$ donc $\det(M)^2 = 1$.
- $I_n^tI_n = I_n$ donc $O_n \neq \varnothing$.
  Soit $M, N \in O_n^2$. On a $(MN)^t(MN) = N^tM^tMN = N^tN = I_n$ donc $MN \in O_n$.
  De plus, $M^tM = I_n$ donc M est inversible. On a de plus $M^t = M^{-1}$ donc $M^{-1}(M^{-1})^t = I_n$ et $M^{-1} \in O_n$.
  O_n est donc un sous-groupe de GL_n.
- $M \mapsto \det(M)$ est un morphisme de groupes entre O_n et $\{\pm 1\}$. Son noyau est un sous-groupe de O_n. ∎

21.2 Étude quand $\dim(E) = 2$

21.2.1 Étude de $O(E)$

E est un plan muni d'une base (e_1, e_2) orthonormée.

Théorème 21.5 *Soit $u \in L(E)$.*

$u \in SO(E)$ ssi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathscr{M}_e(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $a^2 + b^2 = 1$.

$u \in O(E) \setminus SO(E)$ ssi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathscr{M}_e(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $a^2 + b^2 = 1$.

Démonstration. Si $u \in SO(E)$, on note $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans e.

On a $M^tM = I_2$ et $\det(M) = 1$ donc :

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \\ ad-bc=1 \end{cases}$$

Si $a = 0$, $b^2 = 1$, $bd = 0$ et $bc = -1$ donc $(b,c,d) = (1,-1,0)$ ou $(b,c,d) = (-1,1,0)$. On a bien $a = d$, $b = -c$ et $a^2+b^2 = 1$.

Sinon, on trouve

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c=-\dfrac{bd}{a} \\ c^2+d^2=1 \\ ad-bc=1 \end{cases}$$

Donc $\frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = 1$ donc $\frac{d^2}{a^2} = 1$ et $d = \varepsilon a$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

On a alors $c = -\varepsilon b$. En utilisant $ad - bc = 1$, on trouve $\varepsilon(a^2+b^2) = 1$ et $\varepsilon = 1$.

Ainsi, $a = d$ et $b = -c$. L'autre implication est triviale et on montre de même le deuxième point. ∎

Corollaire 21.1 *$SO(E)$ est abélien.*

Corollaire 21.2 *$SO(E)$ est formé des composées de deux réflexions.*

$O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$ est l'ensemble des réflexions.

Démonstration.

- Toute réflexion appartient à $O^-(E)$. Réciproquement, soit $u \in O^-(E)$. Sa matrice dans e est $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2 = 1$.

  On a $M^2 = I_2$ donc u est une symétrie, distincte de $\pm\,\mathrm{Id}$ puisque $\det(M) = -1$. u est donc une réflexion.
- La composée de deux réflexions appartient bien à $SO(E)$ puisqu'elle appartient à $O(E)$ (groupe) et son déterminant est $(-1)^2 = 1$.

  Réciproquement, soit $u \in SO(E)$. Il existe une réflexion s de E et on peut écrire $u = s \circ (s \circ u)$.

  $s \circ u \in O(E)$ et $\det(s \circ u) = -1$ donc $s \circ u$ est une réflexion et on a bien écrit u comme composée de deux réflexions. ∎

21.2.2 Complément sur $SO(E)$

<u>THÉORÈME 21.6</u> *Soit $u \in SO(E)$. La matrice représentative de u dans une base orthonormée directe est indépendante de la base orthonormale directe choisie. Si e est une base orthonormée directe, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{M}_e(u) == \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.*

α, défini à 2π près, est appelé mesure de l'angle de la rotation u.

Démonstration. Soit $u \in SO(E)$, e et e' deux bases orthonormées directes. $\mathscr{M}_{e'}(u) = (P_e^{e'})^{-1}\mathscr{M}_e(u)P_e^{e'}$.

Or $P_e^{e'} \in O_2$ et son déterminant vaut 1 car e et e' sont directes. Donc $P_e^{e'} \in SO_2$, donc commute avec $\mathscr{M}_e(u)$.

D'où $\mathscr{M}_{e'}(u) = \mathscr{M}_e(u)$. ∎

Proposition 21.3 Les mesures d'angles de rotation sont changés en leur opposé quand on change l'orientation du plan.

Démonstration. Soit e et e' deux bases orthonormées d'orientation différentes. La matrice P de passage de e à e' appartient à O_n^- donc elle s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

$$\mathscr{M}_{e'}(u) = P^t \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$ ∎

<u>THÉORÈME 21.7</u> *Si $w \in O^-(E)$, il existe (e_1, e_2) base de E telle que $\mathscr{M}_{(e_1,e_2)}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $e_1 \in \mathrm{Ker}(w - \mathrm{Id})$ unitaire et $e_2 \in \mathrm{Ker}(w + \mathrm{Id})$ unitaire. ∎

Proposition 21.4 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note r_α la rotation dont une mesure de l'angle est α.

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & SO(E) \\ \alpha & \mapsto & r_\alpha \end{cases}$$

est un morphisme surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Cette proposition est équivalente (via le choix d'une base orthonormée directe) à montrer que

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & SO_2 \\ \alpha & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est surjective de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\psi(\alpha)\psi(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\ &= \psi(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ψ est donc un morphisme. Le théorème précédent assure sa surjectivité.

De plus, $\psi(\alpha) = I_2$ ssi $\cos(\alpha) = 1$ et $\sin(\alpha) = 0$ ie $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$. ■

Proposition 21.5 Soit u et v unitaires. Il existe une unique rotation r telle que $r(u) = v$.

Démonstration. On complète u en une base (u, w) de E. Les coordonnées de v dans cette base sont notées (a, b).

Comme $r(u) = v$, la matrice de u est obligatoirement $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Réciproquement, on vérifie que cette rotation convient. ■

<u>Définition 21.4</u> Soit $(u, v) \in E^2$ non nuls. Il existe une unique rotation r telle que $r(\frac{u}{\|u\|}) = \frac{v}{\|v\|}$.

Toute mesure de r s'appelle mesure de l'angle $(\widehat{u, v})$.

Remarque 21.2 La mesure est définie modulo 2π. Elle change de signe quand on change l'orientation.

Notons $\alpha = \mathrm{mes}(\widehat{u, v})$ et w tel que $(\frac{u}{\|u\|}, w)$ soit une base orthonormée directe. Alors on a $r(\frac{u}{\|u\|}) = \cos(\alpha)\frac{u}{\|u\|} + \sin(\alpha)w$.

On a donc $\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \rangle = \langle \frac{u}{\|u\|}, r(\frac{u}{\|u\|}) \rangle = \cos(\alpha)$.

Donc $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\alpha)$ et de même $[u, v] = \|u\| \|v\| \sin(\alpha)$.

21.3 Étude quand $\dim(E) = 3$

21.3.1 Complément sur $O(E)$

<u>Définition 21.5</u> Soit E un espace euclidien orienté, P un plan de E. Pour orienter P, on choisit un vecteur $w \in P^\perp$.

Les bases directes de P sont alors les bases (u, v) telles que (u, v, w) soit une base directe de E.

THÉORÈME 21.8 *Soit* $u \in L(E)$.

$u \in SO(E)$ *ssi il existe une base orthonormée* e *de* E *et* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a^2+b^2=1$ *et* $\mathscr{M}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.

$u \in O^-(E)$ *ssi il existe une base orthonormée* e *de* E *et* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a^2+b^2=1$ *et* $\mathscr{M}_e(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Remarque 21.3 Soit $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{Id}\}$. $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ *est une droite appelée axe de* u *noté* Δ. *On choisit une orientation sur* Δ, *ce qui donne une orientation du plan* $\Delta^\perp$. *Or cet espace est stable par* u, *et* u *induit une rotation (plane) sur icelui. Cette rotation est caractérisée par une mesure de son angle, qu'on appelle mesure de l'angle de* u.

COROLLAIRE 21.3 *Les éléments de* $SO(E)$ *sont les composées de deux réflexions. Ce sont aussi les composées de deux retournements.*

Les éléments de $O^-(E)$ *sont les réflexions et les composées de trois réflexions.*

Démonstration.

- Soit $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Il existe Δ axe de u. On note $\widetilde{u} = u|_{\Delta^\perp}$.
  $\widetilde{u} \in SO(\Delta^\perp)$ donc il existe Δ_1, Δ_2 deux droites de $\Delta^\perp$ tel que $\widetilde{u} = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$.
  On pose $P_1 = \mathrm{Vect}\{\Delta \cup \Delta_1\}$ et $P_2 = \mathrm{Vect}\{\Delta \cup \Delta_2\}$. On vérifie alors que $u = s_{P_1} \circ s_{P_2}$ en travaillant sur Δ puis $\Delta^\perp$. Le cas de Id est trivial.
  Réciproquement, la composée de deux réflexions appartient bien à $SO(E)$.
- Soit $u \in SO(E)$. On a vu que $u = s_{P_1} \circ s_{P_2}$.
  Or, pour toute symétrie s, $-s$ est un retournement et $u = (-s_{P_1}) \circ (-s_{P_2})$ donc u est la composée de deux retournements.
  Réciproquement, la composée de deux retournements appartient à $SO(E)$.
- Déjà fait. ■

21.3.2 Détermination pratique

Exemple 21.1 On travaille dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté par la base canonique. On pose $\Delta = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$, orienté par $(1,1,0)$.

Déterminer la rotation r d'axe Δ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{3}$ dans la base canonique.

On pose $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,0,1)$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.

$e = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée directe. La matrice de r dans e est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De plus, la matrice de changement de bases est $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ qui est orthogonale, donc son inverse est sa transposée.

On trouve alors la matrice recherchée :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 21.6 Soit $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et k un vecteur unitaire de l'axe de u orientant cet axe. On note α une mesure de l'angle de u. Pour tout $x \in E$ tel que $x \perp k$, $u(x) = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)k \wedge x$.

Démonstration. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ orthogonal à k. On considère la base orthonormée directe $e = (k, \frac{x}{\|x\|}, k \wedge \frac{x}{\|x\|})$.

La matrice de u dans e est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

En particulier, $u(\frac{x}{\|x\|}) = \cos(\alpha)\frac{x}{\|x\|} + \sin(\alpha)k \wedge \frac{x}{\|x\|}$.

Ainsi, on a la formule, qui reste vraie en 0. ∎

Exemple 21.2 On travaille dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté par la base canonique c. Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans c :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que u est une rotation, déterminer son axe et une mesure de son angle α.

On vérifie que $\|u(c_1)\| = 1 = \|u(c_2)\|$, que $\langle u(c_1), u(c_2)\rangle = 0$ et que $u(c_1) \wedge u(c_2) = u(c_3)$. u est donc une rotation.

$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(-3, 1, 1)\}$ qu'on oriente par $(-3, 1, 1)$. Comme $(0, 1, -1) \perp (-3, 1, 1)$, $u(0, 1, -1) = \cos(\alpha)(0, 1, -1) + \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{11}}(2, 3, 3)$.

Donc :

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin(\alpha)}{\sqrt{11}} = \dfrac{5}{9} \\ \cos(\alpha) + \dfrac{3\sin(\alpha)}{\sqrt{11}} = \dfrac{11}{9} \\ -\cos(\alpha) + \dfrac{3\sin(\alpha)}{\sqrt{11}} = \dfrac{4}{9} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \sin(\alpha) = \dfrac{5\sqrt{11}}{18} \\ \cos(\alpha) = \dfrac{7}{18} \end{cases}$$

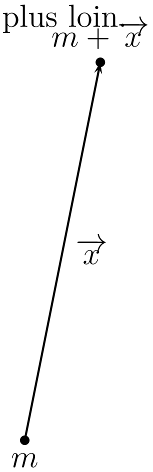
Chapitre 22

Compléments de géométrie affine

22.1 Espaces affines réels

Un espace affine réel E est un ensemble non vide de points reliées par des vecteurs, vérifiant la propriété de Chasles. L'ensemble de ces vecteurs forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ appelé direction de E. Pour tout $(m, n) \in E^2$, l'unique vecteur d'origine m et d'extrémité n est noté $\overrightarrow{mn}$. De plus, pour tout $m, \overrightarrow{x} \in E \times \overrightarrow{E}$, on note $m + \overrightarrow{x}$ le point n tel que $\overrightarrow{mn} = \overrightarrow{x}$.

Un point o de E et une base e de $\overrightarrow{E}$ étant données, tout point m de E est caractérisé par la donnée des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{om}$ dans la base e. On dit que le couple (o, e) est un repère cartésien de E. Cette vision des choses est plus que suffisante en pratique pour traiter les problèmes de géométrie. Ce chapitre a pour but d'aller plus loin.



Définition 22.1 On appelle espace affine réel tout triplet $(E, \overrightarrow{E}, \oplus)$ formé d'un ensemble non vide E, d'un $\mathbb{E}$-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ dont on note $+$ la loi

interne et d'une loi externe $\oplus$ sur E à domaine d'opérateurs $\overrightarrow{E}$ tel que

- Pour tout $(a, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E \times \overrightarrow{E}^2$, $(a \oplus \overrightarrow{x}) \oplus \overrightarrow{y} = a \oplus (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$.
- Pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe un unique $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ tel que $b = a \oplus \overrightarrow{x}$. On note alors $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{ab}$.

Remarque 22.1 Soit $(E, \overrightarrow{E}, \oplus)$ un espace affine réel et $a \in E$.

Il existe $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ tel que $a \oplus \overrightarrow{x} = a$. On a de plus $a \oplus \overrightarrow{x} = (a \oplus \overrightarrow{x}) \oplus \overrightarrow{x} = a \oplus 2\overrightarrow{x}$ donc par unicité $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{x}$ donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, le seul vecteur qui relie un point à lui-même est $\overrightarrow{0}$.

Proposition 22.1

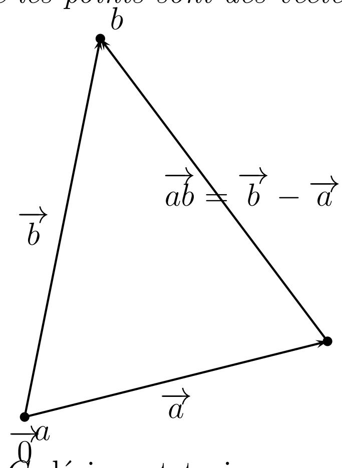
- Pour tout $(a, b) \in E^2$, $\overrightarrow{ab} = 0$ ssi $a = b$.
- Pour tout $(a, b, c) \in E^2$, $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.
- Pour tout $(a, b) \in E^2$, $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$.

Démonstration.

- $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{0}$ ssi $a \oplus \overrightarrow{ab} = a \oplus 0$ ssi $a = b$ par la remarque précédente.
- On a $a \oplus (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}) = (a \oplus \overrightarrow{ab}) \oplus \overrightarrow{bc} = b \oplus \overrightarrow{bc} = c = a \oplus \overrightarrow{ac}$. Par unicité $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.
- $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \overrightarrow{aa} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$. ∎

Remarque 22.2 Soit $\overrightarrow{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le triplet $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{E}, +)$ est un espace affine. On dit qu'on a muni $\overrightarrow{E}$ de sa structure affine canonique. Intuitivement, le même objet appartenant à $\overrightarrow{E}$ peut être vu comme une flèche ou comme l'extrémité de cette même flèche dont l'origine est le vecteur nul. Dans ce cadre, $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$.

Cette structure est délicate à manipuler à cause des confusions entre points et vecteurs puisque les points sont des vecteurs.



Par la suite, E, F et G désignent trois espaces affines réels dont les directions sont $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$. On note $+$ la loi $\oplus$ de la définition.

22.2 Sous-espaces affines

22.2.1 Définitions et propriétés

Définition 22.2 On dit qu'une partie V de E est un sous-espace affine de E ssi il existe un point $a \in E$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que $V = \{m \in E, \overrightarrow{am} \in \overrightarrow{V}\}$. Le cas échéant, le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ associé à V est unique et appelé direction de V.

Remarque 22.3 On associe à tout sous-espace affine le vocabulaire connu pour les sous-espaces vectoriels via la notion de direction. Ainsi, on appelle dimension d'un sous-espace affine la dimension de sa direction.

Une droite de E est alors un sous-espace affine de dimension 1, ie une partie de E de la forme $a + \mathbb{R}\overrightarrow{x}$. De même, un plan de E est un sous-espace affine de dimension 2, ie une partie de E de la forme $a + \mathbb{R}\overrightarrow{x} + \mathbb{R}\overrightarrow{y}$ avec $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ non colinéaires.

Remarquons enfin que les points de E sont exactement les sous-espaces affines de E de dimension 0.

Proposition 22.2 Avec les notations précédentes,
- Pour tout $a, b \in V^2$, $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{V}$
- Pour tout $(b, \overrightarrow{x}) \in V \times \overrightarrow{V}$, $b + \overrightarrow{x} \in V$.

Exemple 22.1 La notion de sous-espace affine apparaît souvent dans le cours parce que cette structure est celle des solutions d'une équation linéaire.

Plus précisément, si $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ sont considérés comme des sous-espaces affines, et si $u \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$, on sait que pour tout $b \in \overrightarrow{F}$, l'ensemble des solutions de $u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ d'inconnue $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ est soit vide, soit de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}(u)$ avec x_0 une solution particulière de l'équation considérée, ie un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(u)$.

Ceci étant, mettre un nom sur la structure des ensembles de solutions des équations linéaires ne nous aide absolument pas à résoudre ces équations linéaires…

Définition 22.3 Soit V et W deux sous-espaces affines de E de directions respectives $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$. On dit que V est parallèle à W ssi $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{W}$.

22.2.2 Propriétés de stabilité

Proposition 22.3 Soit V et W deux sous-espaces affines de E de direction respective $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$. Si $V \cap W \neq \varnothing$, alors $V \cap W$ est un sous-espace affine de E de direction $\overrightarrow{V} \cap \overrightarrow{W}$.

Démonstration. Si $V \cap W \neq \varnothing$, il existe a dedans. Soit $m \in E$, on remarque que $m \in V \cap W$ ssi $m \in V$ et $m \in W$ ssi $\overrightarrow{am} \in \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{am} \in W$ ssi $\overrightarrow{am} \in \overrightarrow{V} \cap \overrightarrow{W}$.

Finalement, $V \cap W = a + \overrightarrow{V} \cap \overrightarrow{W}$. ∎

Corollaire 22.1 *L'intersection de deux sous-espaces affines supplémentaires V et W de E est un singleton.*

Démonstration. Il existe $(a, b) \in V \times W$. Par hypothèse, il existe $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{W}$ tel que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. On remarque alors que le point $b - \overrightarrow{y}$ (égal à $a + \overrightarrow{x}$) appartient à $V \cap W$, qui en devient non vide. La proposition précédente assure alors que $V \cap W$ est de dimension nulle. C'est donc un singleton. ∎

Théorème 22.1 *Soit V un sous-espace affine de E. Tout barycentre de points de V est un point de V.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in V^n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ de somme non nulle. Il existe $m \in V$. On remarque que le barycentre g de la famille pondérée $((a_1, \lambda_1), \cdots, (a_n, \lambda_n))$ vérifie :

$$\overrightarrow{mg} = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}(\lambda_1 \overrightarrow{ma_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{ma_n})$$

Or pour tout i, $\overrightarrow{ma_i} \in \overrightarrow{V}$ donc $\overrightarrow{mg} \in \overrightarrow{V}$ et $g \in V$. ∎

Exemple 22.2 Soit V un sous-espace affine de E. Montrons que $E \setminus V$ n'est pas un sous-espace affine de E.

Ce point est clair si $V = E$ car un sous-espace affine n'est pas vide. Supposons donc $V \neq E$. Il existe alors $a \in E \setminus V$. Comme $V \neq \varnothing$, il existe aussi $b \in V$.

On pose alors $c = a + 2\overrightarrow{ab}$. Si $c \in V$, alors b et c sont dans V donc $(bc) \subset V$. Or $a \in (bc)$ donc $a \in V$, ce qui est absurde.

On a donc trouvé deux points a et c de $E \setminus V$ dont le milieu n'appartient pas à $E \setminus V$, qui n'est donc pas un sous-espace affine de E.

22.3 Applications affines

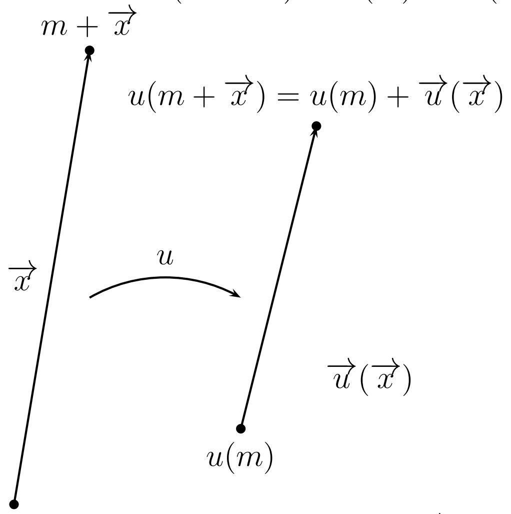
22.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 22.4 Soit $u : E \to F$. On dit que u est affine ssi il existe une application $\overrightarrow{u} \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$ telle que pour tout $(m, n) \in E^2$, $\overrightarrow{u(m)u(n)} = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{mn})$.

Le cas échéant, $\overrightarrow{u}$ est unique et est appelée partie linéaire de u.

Remarque 22.4

- *La définition est équivalente à* $u(m+\overrightarrow{x}) = u(m) + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$ *pour tout* $(m,\overrightarrow{x}) \in E \times \overrightarrow{E}$.



- *Soit* $a \in E$ *et* $u : E \to F$. *On suppose qu'il existe* $\overrightarrow{u} \in L(\overrightarrow{E},\overrightarrow{F})$ *telle que pour tout* $m \in E$, $\overrightarrow{u(a)u(m)} = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{am})$. *La relation de Chasles et la linéarité de* $\overrightarrow{u}$ *assurent que*
  $$\overrightarrow{u(m)u(n)} = \overrightarrow{u(a)u(n)} - \overrightarrow{u(a)u(m)} = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{an}) - \overrightarrow{u}(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{an} - \overrightarrow{am}) = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{mn})$$
  On en déduit que u *est affine. La réciproque étant claire, on en déduit une caractérisation des applications affines.*
  En particulier, pour montrer qu'une application est affine, on fixe un point $a \in E$ *(prendre un point fixe de* u *simplifie les calculs) et on montre que* $\overrightarrow{am} \mapsto \overrightarrow{u(a)u(m)}$ *de* $\overrightarrow{E}$ *dans* $\overrightarrow{F}$ *est linéaire.*
- *Soit* u *une application de* E *dans* E *possédant un point fixe* a. *On peut appliquer la méthode précédente dans notre cas particulier (très usuel). Montrer que* u *est affine revient à prouver que l'application* $\overrightarrow{am} \mapsto \overrightarrow{au(m)}$ *de* $\overrightarrow{E}$ *dans lui-même est linéaire. Si on identifie les points de* E *avec les vecteurs de l'espace vectoriel* $\overrightarrow{G} = \{\overrightarrow{am}, m \in E\}$, *montrer que* u *est affine revient à prouver que* u *est linéaire de* $\overrightarrow{G}$ *dans lui-même et on peut alors utiliser les outils de l'algèbre linéaire.*
- *Par définition, une application affine est entièrement déterminée par la donnée de sa partie linéaire et par l'image d'un point de son espace de départ. Ainsi, pour tout* $f \in L(\overrightarrow{E},\overrightarrow{F})$ *et* $(a,b) \in E \times F$, *il existe une unique application affine* u *de* E *vers* F *de partie linéaire* f *telle que* $u(a) = b$.
  La partie unicité de l'écriture donne une méthode pratique pour montrer que deux applications affines sont égales : on montre l'égalité des parties linéaires et l'égalité en n point de E.

Proposition 22.4 Il existe une unique application affine qui envoie trois points non alignés d'un plan sur trois points donnés d'un espace affine. On peut généraliser à quatre points non coplanaires d'un espace de dimension 3.

Démonstration. Soit $(a, b, c) \in E$ non alignés et $(a', b', c') \in F^3$. Comme $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ est une base de $\overrightarrow{E}$, il existe une application linéaire $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ telle que $f(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{a'b'}$ et $f(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{a'c'}$.

Il existe alors une unique application affine u de E vers F de partie linéaire f et telle que $u(a) = a'$. On a alors $u(b) = u(a) + f(\overrightarrow{ab}) = a' + \overrightarrow{a'b'} = b'$ et $u(c) = c'$.

On remarque que u est la seule application qui convienne. ■

Remarque 22.5 Pour montrer que deux applications affines sont égales, montrer qu'elles donnent la même image de trois points non alignés d'un plan, ou de quatre points non coplanaires d'un espace de dimension 3.

Définition 22.5 On appelle transformation affine de E toute application affine bijective de E dans E. L'ensemble d'icelles est noté $GA(E)$.

Proposition 22.5 Soit u affine de E dans E. u est bijective ssi $\overrightarrow{u}$ l'est.

Démonstration. Soit $a \in E$. On remarque que pour tout $m \in E$,

$$u(m) = a \Leftrightarrow \overrightarrow{u(a)u(m)} = \overrightarrow{u(a)a} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{u(a)a}$$

Si $\overrightarrow{u}$ est bijective, $\overrightarrow{u(a)a}$ possède alors un unique antécédent $\overrightarrow{x}$ par $\overrightarrow{u}$. L'équation $u(m) = a$ admet donc une unique solution, à savoir $a + \overrightarrow{x}$. Par conséquent, u est bijective.

La réciproque est facile. ■

THÉORÈME 22.2 *Soit u (resp. v) une application affine de E vers F (resp. de F vers G) de partie linéaire $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$). Alors $v \circ u$ est une application affin de E vers G de partie linéaire $\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$.*

Démonstration. Soit $(m, n) \in E^2$. Par définition, $(v \circ u)(n) = v(u(n)) = v(u(m) + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{mn})) = v(u(m)) + \overrightarrow{v}(\overrightarrow{u}(\overrightarrow{mn}))$.

Donc $(v \circ u)(n) = (v \circ u)(m) + (\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u})(\overrightarrow{mn})$. Comme la composée de deux applications linéaires est linéaire, $\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$ est linéaire.

$v \circ u$ est donc affine de partie linéaire $\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$. ■

22.3.2 Exemples

Définition 22.6 Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ l'application

$$t_{\overrightarrow{v}} : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ m & \mapsto & m + \overrightarrow{v} \end{cases}$$

Proposition 22.6 Les translations de E sont des transformations affines de E de partie linéaire égale à l'identité de $\overrightarrow{E}$. Réciproquement, une application affine de E dans E de partie linéaire égale à l'identité de $\overrightarrow{E}$ est une translation.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. Pour tout $(m, n) \in E^2$, $t_{\overrightarrow{v}}(n) = n + \overrightarrow{v} = m + \overrightarrow{mn} + \overrightarrow{v} = t_{\overrightarrow{v}}(m) + \mathrm{Id}(\overrightarrow{mn})$.

Donc $t_{\overrightarrow{v}}$ est une application affine de partie linéaire Id. Comme Id est bijective, $t_{\overrightarrow{v}}$ aussi. (On aurait pu montrer que la composition de $t_{\overrightarrow{v}}$ et $t_{-\overrightarrow{v}}$ dans les deux sens faisait Id).

Réciproquement, si f est une application affine de partie linéaire Id, on prend $a \in E$ et on appelle t la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$. t et f ont même partie linéaire et $t(a) = f(a)$. Donc $t = f$. ■

Définition 22.7 Soit $a \in E$ et $\lambda \neq 0$. On appelle homothétie de E de centre a et de rapport λ l'application :

$$h_{a,\lambda} : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ m & \mapsto & a + \lambda\overrightarrow{am} \end{cases}$$

Proposition 22.7 Les homothéties de E de rapport λ sont des transformations affines de partie linéaire $\lambda\,\mathrm{Id}$. Réciproquement, pour $\lambda \notin \{0, 1\}$, une application affine de E dans E de partie linéaire $\lambda\,\mathrm{Id}$ est une homothétie de rapport λ.

Démonstration. Soit $(a, \lambda) \in E \times \mathbb{R}^*$. Pour tout $(m, n) \in E^2$, $h_{a,\lambda}(n) = a + \lambda\overrightarrow{an} = a + \lambda\overrightarrow{am} + \lambda\overrightarrow{mn} = h_{a,\lambda}(m) + \lambda\,\mathrm{Id}(\overrightarrow{mn})$.

L'homothétie $h_{a,\lambda}$ est donc une application affine de partie linéaire $\lambda\,\mathrm{Id}$. Comme $\lambda \neq 0$, $\lambda\,\mathrm{Id}$ est bijective donc $h_{a,\lambda}$ est une transformation affine. (On aurait pu montrer que la composée de $h_{a,\lambda}$ et $h_{a,\frac{1}{\lambda}}$ dans les deux sens faisait Id)

Réciproquement, soit f une application affine de partie linéaire $\lambda\,\mathrm{Id}$ avec $\lambda \notin \{0, 1\}$. On prend $b \in E$. Montrons que f admet un point fixe. Soit $m \in E$.

$$f(m) = m \Leftrightarrow m = f(b) + \lambda\overrightarrow{bm} \Leftrightarrow m = b + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{bf(b)}$$

Finalement, f admet un unique point fixe noté a. On pose alors h l'homothétie de centre a et de rapport λ. On remarque que h et f ont même partie linéaire et coïncident en a, donc $f = h$. ■

Définition 22.8 Soit V et W deux sous-espaces affines de E supplémentaires de direction respective $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$. Pour tout $m \in E$, l'unique point d'intersection de W avec $m + \overrightarrow{V}$ est appelé projection de m sur W parallèlement à V. L'application p de E dans E qui à tout point m de E associe sa projection sur W parallèlement à V est appelée projection de E sur W parallèlement à V.

Proposition 22.8 Cette application est affine de partie linéaire le projecteur de $\overrightarrow{E}$ sur $\overrightarrow{W}$ par rapport à $\overrightarrow{V}$.

Démonstration. Soit $(m, n) \in E^2$. On note $m' = p(m)$ et $n' = p(n)$ et on remarque que $\overrightarrow{mn} = \overrightarrow{m'n'} + (\overrightarrow{mm'} - \overrightarrow{nn'})$. Or par définition de p, $\overrightarrow{m'n'} \in \overrightarrow{W}$ et $(\overrightarrow{mm'}, \overrightarrow{nn'}) \in \overrightarrow{V}$ donc $\overrightarrow{mm'} - \overrightarrow{nn'} \in \overrightarrow{V}$.

Ainsi, $\overrightarrow{m'n'}$ est l'image de $\overrightarrow{mn}$ par le projecteur de $\overrightarrow{E}$ sur $\overrightarrow{W}$ parallèlement à $\overrightarrow{V}$ qu'on note $\overrightarrow{p}$. D'où $\overrightarrow{m'n'} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{mn})$, qui est QED. ■

Définition 22.9 Soit V et W deux espaces affines de E supplémentaires et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On appelle affinité de rapport λ, de direction V par rapport à W l'application définie par :

$$u : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ m & \mapsto & m + (1 - \lambda)\overrightarrow{mp(m)} \end{cases}$$

où p désigne la projection sur W parallèlement à V. On appelle symétrie de E par rapport à W parallèlement à V l'affinité de rapport -1 par rapport à W de direction V.

Proposition 22.9 Une affinité est une transformation affine.

Démonstration. On prend $a \in W$. Comme $p(a) = a$, $u(a) = a + (1 - \lambda)\overrightarrow{aa} = a$. On remarque alors que pour tout $m \in E$, en notant $\overrightarrow{p}$ la partie linéaire de p,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{au(m)} &= \overrightarrow{am} + (1 - \lambda)\overrightarrow{mp(m)} \\ &= \overrightarrow{am} + (1 - \lambda)(\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{ap(m)}) \\ &= \lambda\overrightarrow{am} + (1 - \lambda)\overrightarrow{p(a)p(m)} \\ &= \lambda\overrightarrow{am} + (1 - \lambda)\overrightarrow{p}(\overrightarrow{am}) \\ &= (\lambda \operatorname{Id} + (1 - \lambda)\overrightarrow{p})(\overrightarrow{am}) \end{aligned}$$

Comme $\lambda \operatorname{Id} + (1-\lambda)\overrightarrow{p}$ est linéaire, u est affine.

Montrons que cette application linéaire est injective. Soit $\overrightarrow{x}$ dans son noyau. On a $\lambda\overrightarrow{x} + (1-\lambda)\overrightarrow{p}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$.

On décompose $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$ sur $\overrightarrow{V} \oplus \overrightarrow{W}$. On a alors $\lambda\overrightarrow{x} + (1-\lambda)\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$ ie $\lambda\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.

Comme V et W sont supplémentaires et $\lambda \neq 0$, on a $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{z}$ donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. On a donc l'injectivité, puis la bijectivité car on est en dimension finie. ■

22.3.3 Représentations d'une application affine

On munit E et F d'un repère cartésien (o, e) et (o', e'). Soit $u : E \to F$ de partie linéaire $\overrightarrow{u}$ est $m \in E$.

On note X le vecteur colonne des coordonnées de m dans (o, e), A celui de $u(o)$ dans (o', e') et Y celui de $u(m)$ dans (o', e'). On sait que

$$\overrightarrow{o'u(m)} = \overrightarrow{o'u(o)} + \overrightarrow{u(o)u(m)} = \overrightarrow{o'u(o)} + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{om})$$

On sait traduire cette écriture vectorielle dans la base e'. En effet, le choix des notations assure que le vecteur colonne des coordonnées de $\overrightarrow{o'u(m)}$ et $\overrightarrow{o'u(o)}$ dans e' dont X' et A. De plus, le vecteur colonne des coordonnées de $\overrightarrow{om}$ dans e est X donc celui de $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{om})$ dans e' est $\mathscr{M}_{e,e'}(\overrightarrow{u})X$. Finalement,

$$X' = A + \mathscr{M}_{e,e'}(\overrightarrow{u})X$$

Dans le cas où $E = F$ et où $o = u(o)$, $A = 0$ et l'expression finale est semblable à celle d'une application linéaire. Pour obtenir l'expression analytique de la partie linéaire de$u$ entre deux bases e et e' de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$, il suffit donc de supprimer les constantes apparaissant dans l'expression analytique de u entre deux repères de E et F associés à e et e'.

Exemple 22.3 On suppose que E est un espace affine de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R} = (o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit P le plan de E dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est $x + y + z = 3$ et $\overrightarrow{D}$ la droite de $\overrightarrow{E}$ donc un vecteur directeur est $\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. On cherche une expression analytique de u, affinité par rapport au plan P de direction $\overrightarrow{D}$ et de rapport 3.

- Solution géométrique : soit $m \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$. On note m' le projeté de m sur P parallèlement à $\overrightarrow{D}$.
  Par définition, $m' \in P$ et $\overrightarrow{mm'} \in \overrightarrow{D}$. On sait donc que $x' + y' + z' = 3$ et qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{mm'} = \mu(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$ ie $x' - x = \mu$, $y' - y = 2\mu$ et $z' - z = -\mu$.

En injectant ces trois équations dans la première, on détermine $\mu = \frac{3-x-y-z}{2}$. On peut alors écrire $u(m) = m - 2\overrightarrow{mm'} = m - 2\mu(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$. Finalement, une expression analytique de u dans $\mathcal{R}$ est

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z-3, 2x+3y+2z-6, -x-y+3) \end{cases}$$

- Avec une base adaptée. On note $e = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. On a ainsi construit une base e' de $\overrightarrow{E}$ dont les deux premiers vecteurs forment une base de $\overrightarrow{P}$. La matrice représentative de la projection $\overrightarrow{p}$ sur $\overrightarrow{P}$ parallèlement à $\overrightarrow{D}$ est alors élémentaire à déterminer. Comme la partie linéaire de u est $3\,\mathrm{Id} - 2\overrightarrow{p}$, on sait que
$$\mathscr{M}_e(\overrightarrow{u}) = P_e^{e'} \mathscr{M}_{e'}(\overrightarrow{u}) P_{e'}^{e} = P_e^{e'}(3I_3 - 2\mathscr{M}_{e'}(\overrightarrow{p}))P_{e'}^{e}$$
Donc
$$\mathscr{M}_e(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Il existe donc (α, β, γ) tel qu'une expression analytique de u soit
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z+\alpha, 2x+3y+2z+\beta, -x-y+\gamma) \end{cases}$$
Comme le point a de coordonnées $(1,1,1)$ dans $\mathcal{R}$ appartient à P, il est fixe par u et $f(1,1,1) = (1,1,1)$. On détermine alors α, β et γ et on retrouve l'expression précédente.

Remarque 22.6

- *On aurait pu éviter d'introduire α, β, γ en raisonnant comme suit. Soit m de coordonnées (x,y,z) dans $\mathbb{R}$. Comme a est fixe par u, on sait que $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{au(m)}$, donc, si on note (x',y',z') les coordonnées de $u(m)$ dans $\mathcal{R}$, on a*
$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \\ z'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$
On retrouve alors le même résultat.
- *La méthode algébrique est ici plus longue que la méthode géométrique. En revanche, si $\overrightarrow{E}$ est euclidien, et si l'affinité considérée est orthogonale et qu'on travaille dans des bases orthonormales, on a des méthodes efficaces de recherche d'expressions analytiques.*

22.3.4 Images de parties du plan par des applications affines

THÉORÈME 22.3 *Soit u une application affine de E dans F de partie linéaire $\overrightarrow{u}$. L'image par u d'un sous-espace affine V de E de direction $\overrightarrow{V}$ est un sous-espace affine de F de direction $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{V})$.*

Démonstration. Par définition, il existe $a \in E$ tel que $V = a + \overrightarrow{V}$. Soit $m \in E$.

$m \in u(V)$ ssi il existe $n \in V$ tel que $m = u(n)$ ssi il existe $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{V}$ tel que $m = u(a + \overrightarrow{x})$ ssi il existe $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{V}$ tel que $m = u(a) + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$ ssi $m \in u(a) + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{V})$.

Finalement, $u(V)$ est le sous-espace affine de F de direction $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{V})$ et contenant $u(a)$. ∎

Remarque 22.7 Il existe un théorème similaire sur les images réciproques de sous-espaces affines par des applications affines, mais il est plus délicat car l'image réciproque put aussi être vide, et d'un intérêt pratique moindre. Notons que le résultat précédent, combiné avec les résultats connus d'algèbre linéaire assurent les points suivants :

- *L'image d'un sous-espace affine V par une application affine bijective est un sous-espace affine de même dimension que V.*
- *Dans le cas général, l'image d'un sous-espace affine par une application affine u est un sous-espace affine de dimension inférieure ou égales à celle de V. On en déduit que les images de points alignés (resp. coplanaires) par une application affine sont des points alignés (resp. coplanaires).*
- *Les images de deux sous-espaces affines parallèles par une application affine sont des sous-espaces affines parallèles.*

Un des intérêts des propriétés précédentes est de fournir une méthode simple pour prouver qu'une application donnée n'est pas affine : Pour prouver qu'une application entre deux espaces affines n'est pas affine, il suffit de trouver (propriété existentielle) trois points alignés dont les images ne le sont pas, ou bien deux droites parallèles dont les images ne sont pas parallèles.

Attention, l'image d'une droite peut être un point, qui est parallèle à n'importe quoi puisque de dimension 0.

THÉORÈME 22.4 *Soit u une application affine de E dans F. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$.*

L'image par u du barycentre g de la famille pondérée de points $((\lambda_1, a_1), \cdots, (\lambda_n, a_n))$ est le barycentre de $((\lambda_1, u(a_1)), \cdots, (\lambda_n, u(a_n)))$.

Démonstration. Notons $\overrightarrow{u}$ la partie linéaire de u. On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1\overrightarrow{ga_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{ga_n}=\overrightarrow{0} &\text{ donc } \overrightarrow{u}(\lambda_1\overrightarrow{ga_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{ga_n})=\overrightarrow{0}\\
&\text{ donc } \lambda_1\overrightarrow{u}(\overrightarrow{ga_1})+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{u}(\overrightarrow{ga_n})=\overrightarrow{0}\\
&\text{ donc } \lambda_1\overrightarrow{u(g)u(a_1)}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{u(g)u(a_n)}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

qui est CQFD. ∎

Remarque 22.8 On a donc encore une méthode pour montrer qu'une application n'est pas affine (qui admet de nombreuses variantes) : il suffit de trouver un segment $[a,b]$ *dont l'image du milieu n'est pas le milieu de* $[u(a),u(b)]$.

Chapitre 23

Compléments de géométrie euclidienne

23.1 Introduction

23.1.1 Vocabulaire

Dans ce chapitre, E est un espace affine euclidien, il un espace affine dont l'esapce vectoriel sous-jacent est euclidien. On note n sa dimension (supposée non nulle) et $\overrightarrow{E}$ sa direction. Le produit scalaire et la norme sont notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$. L'objectif du chapitre est la description des applications affines de E dans E qui conservent les distances dans la cas ou $n \in \{2, 3\}$.

Les notions euclidiennes associées aux espaces euclidiens sont aussi associées aux espaces affine via la direction d'iceux. On peut donc parler de sous-espaces affines orthogonaux, donc de projection, symétrie et affinité orthogonale.

Définition 23.1 On appelle distance euclidienne entre deux points m et n de E la norme de $\overrightarrow{mn}$. On la note $d(m, n)$.

Proposition 23.1 Pour tout $(m, n, p) \in E^3$,

- $d(m, n) = 0$ ssi $m = n$
- $d(m, n) = d(n, m)$
- $|d(m, p) - d(p, n)| \leqslant d(m, n) \leqslant d(m, p) + d(p, n)$.

23.1.2 Isométries d'un espace affine euclidien

Définition 23.2 On appelle isométrie de E toute transformation affine u de E dans E telle que pour tout $(m, n) \in E^2$, $d(u(m), u(n)) = d(m, n)$.

Remarque 23.1 *Soit u une isométrie de E. Comme u est une application affine, elle conserve le parallélisme, l'alignement et envoie les sous-espaces affines de E sur des sous-espaces affines de E. Comme u est bijective, elle conserve les dimensions des sous-espaces affines. Comme u conserve les distances, elle envoie les sphères de E sur les sphères de même rayon.*

THÉORÈME 23.1 *Une transformation affine de E est une isométrie de E ssi sa partie linéaire appartient à $O(E)$.*

Démonstration. Soit $(m,n) \in E^2$ et u une transformation de E. On remarque que $d(u(m),u(n)) = d(m,n)$ ssi on a $\left\|\overrightarrow{u(m)u(n)}\right\| = \|\overrightarrow{mn}\|$ ssi $\|\overrightarrow{u}(\overrightarrow{mn})\| = \|\overrightarrow{mn}\|$.

Donc u est une isométrie ssi $\overrightarrow{u}$ conserve la norme ssi $\overrightarrow{u} \in O(E)$. ∎

Définition 23.3 L'ensemble des isométries de E, noté $\mathrm{Is}(E)$, est un groupe pour la loi de composition. L'ensemble des isométries dont la partie linéaire appartient à $SO(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(E)$ noté $\mathrm{Is}^+(E)$, et appelé groupe des déplacements de E.

Enfin, les éléments du complémentaire de $\mathrm{Is}^+(E)$ dans $\mathrm{Is}(E)$, noté $\mathrm{Is}^-(E)$ sont appelés antidéplacements de E.

23.2 Transformations planes

Ici, E est un plan affine euclidien orienté.

23.2.1 Description des isométries planes

Définition 23.4 On appelle rotation de E de centre $o \in E$ toute application $f : E \to E$ telle qu'il existe $r \in SO(E)$ vérifiant

$$f : \begin{cases} E & \to & E \\ m & \mapsto & o + r(\overrightarrow{om}) \end{cases}$$

Remarque 23.2 *Une rotation est un déplacement de E. On appelle centre d'une rotation distincte de l'identité l'unique point fixe d'icelle. De plus, l'étude des angles d'une rotation vectorielle assure que si $o \in E$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, la rotation de centre o et dont une mesure de l'angle est α est une application $f : E \to E$ vérifiant pour tout $m \in E$, $\|\overrightarrow{om}\| = \left\|\overrightarrow{of(m)}\right\|$ et $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{om}, \overrightarrow{of(m)}}) = \alpha$.*

Réciproquement, ces deux conditions caractérisent f, qu'on notera $r_{o,\alpha}$ dans la suite.

<u>Théorème 23.2</u> *Les déplacements de E sont les translations et les rotations.*

<u>Définition 23.5</u> Pour toute droite D de E on note s_D la réflexion d'axe D et pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

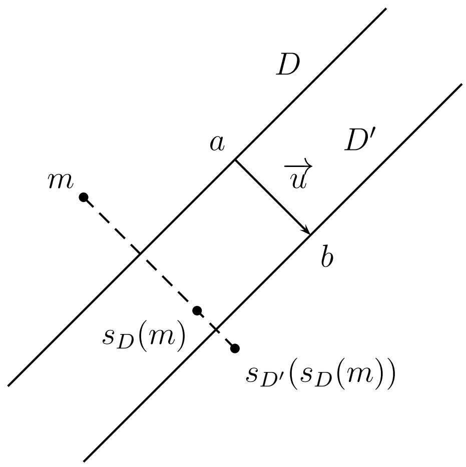
Lemme 23.2.1
Soit D et D' deux droites parallèles de E. En désignant par $\overrightarrow{u}$ l'unique vecteur de $\overrightarrow{D}^{\perp}$ tel que $D' = D + \overrightarrow{u}$, on a $s_{D'} \circ s_D = t_{2\overrightarrow{u}}$.

Réciproquement, toute translation de vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ peut s'écrire comme $s_{D'} \circ s_D$ où D est une droite quelconque de direction $(\mathbb{R}\overrightarrow{v})^{\perp}$ et $D' = D + \frac{\overrightarrow{v}}{2}$.

Démonstration. Il existe $a \in D$. On note b la projection orthogonale de a sur D' et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$. La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ envoie a sur b donc D sur D' ie $D' = D + \overrightarrow{u}$.

Par construction $s_D(a) = a$ donc $s_{D'} \circ s_D(a) = a + 2\overrightarrow{ab} = t_{2\overrightarrow{u}}(a)$. De plus, s_D et $s_{D'}$ ont même partie linéaire, à savoir la réflexion d'axe $\overrightarrow{D}$, donc la partie linéaire de leur composée est Id ie la partie linéaire de $t_{2\overrightarrow{u}}$, ce qui assure $t_{2\overrightarrow{u}} = s_{D'} \circ s_D$.

La réciproque est une simple réécriture de ce qui précède. ∎



Lemme 23.2.2
Soit D et D' deux droites de E sécantes en o et telles qu'une mesure de l'angle orienté $(\widehat{D, D'})$ soit $\alpha \pmod{\pi}$.

Alors $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation de centre o et dont une mesure est 2α (mod $2)\pi$. Réciproquement, toute rotation de centre o et de mesure β peut s'écrire comme la composée $s_{D'} \circ s_D$ où D est une droite quelconque passant par o et D' l'unique droite passant par o formant un angle orienté de $\frac{\beta}{2}$ avec D.

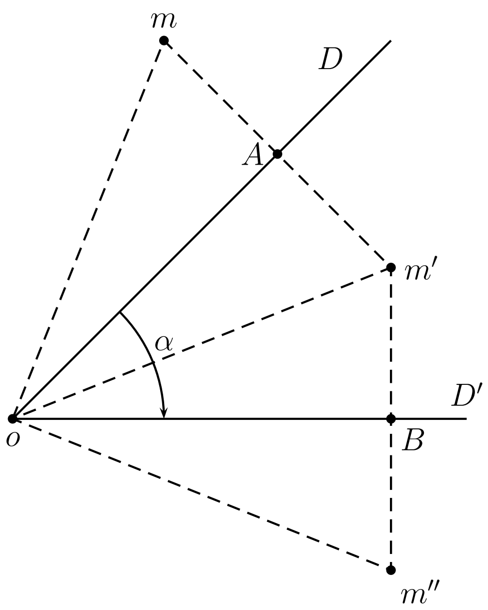
Démonstration. Soit $m \in E$, on note $m' = s_D(m)$ et $m'' = s_{D'}(m')$. Comme les réflexions conservent les distances et comme o est fixe sous l'action de s_D et $s_{D'}$, on sait que $d(o,m) = d(o,m') = d(o,m'')$. On peut aussi remarquer que

$$\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{om}, \overrightarrow{om'}}) = 2\operatorname{mes}(\widehat{D, (om')}) \mod 2\pi \text{ et } \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{om'}, \overrightarrow{om''}}) = 2\operatorname{mes}(\widehat{(om'), D''}) \mod 2\pi$$

Donc $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{om}, \overrightarrow{om''}}) = 2\operatorname{mes}(\widehat{D, D'}) \mod 2\pi$.

Finalement, on obtient $s_{D'} \circ s_D = r_{o,2\alpha}$.

La réciproque est aussi une réécriture de ce qui précède. ∎



Fin de la démonstration du théorème. Par construction les translations et les rotations sont dans $\mathrm{Is}^+(E)$. Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Is}^+(E)$. Il existe $a \in E$. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$ et $h = f \circ t^{-1}$.

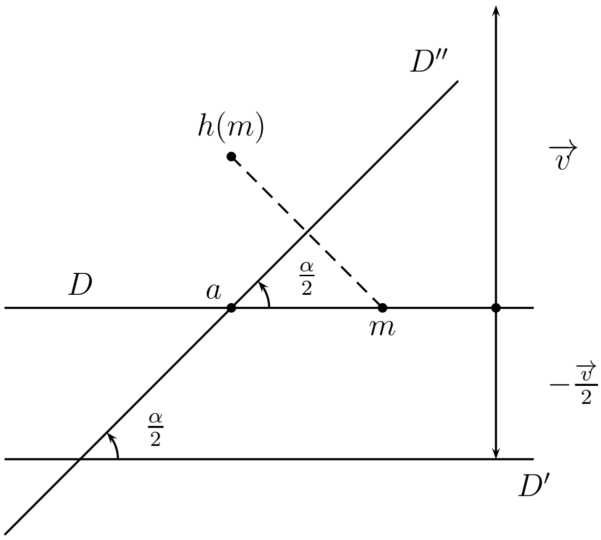
On remarque que h est un déplacement et $h(f(a)) = f(a)$. Un changement d'origine assure que h est l'identité ou une rotation. Dans le premier cas, f est alors une translation. Dans le second, f est la composée d'une rotation h et d'une translation t, chacune distincte de l'identité.

Dans ce cas, notons $\alpha \in]0, 2\pi[$ une mesure de l'angle de h et $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{E} \setminus \{0\}$ le vecteur de t. On note D la droite de direction $(\mathbb{R}\overrightarrow{v})^\perp$ passant par a.

Soit D'' la médiatrice de $[m, h(m)]$ où $m \in D \setminus \{a\}$ est fixé. On pose $D' = D - \frac{\overrightarrow{v}}{2}$.

On a alors $h \circ t = (s_{D''} \circ s_D) \circ (s_D \circ s_{D'}) = s_{D''} \circ s_{D'}$. f est dont une rotation de centre $D'' \cap D'$ et d'angle dont une mesure est α.

D'où le théorème. ∎



Remarque 23.3 *On constate aussi que tout élément de* $\mathrm{Is}^+(E)$ *se décompose en une composée de deux réflexions.*

23.2.2 Rappels sur les similitudes planes

Définition 23.6 Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle similitude de rapport λ toute transformation affine f de E telle que pour tout $(m,n) \in E^2$, on ait $d(f(m), f(n)) = \lambda d(m,n)$.

Proposition 23.2 Les similitudes de E sont exactement les composées d'une isométrie de E et d'une homothétie de E.

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ et s une similitude de rapport λ. Soit h une homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$. La transformation $h \circ s$ conserve évidemment les distances donc est une isométrie. On écrit alors $s = h^{-1} \circ (h \circ s)$, ce qui prouve le résultat.

Réciproquement, si $\lambda \neq 0$, h une homothétie de rapport λ et i une isométrie de E alors $h \circ i$ est une transformation affine qui multiplie les distances par $|\lambda|$, donc est une similitude de rapport $|\lambda|$. ■

Une transformation affine f de E est une similitude de E de rapport $\lambda > 0$ ssi $\lambda^{-1} f \in O(E)$.

L'ensemble des similitudes de E muni de la loi de composition usuelles est un groupe. L'ensemble des similitudes de E de partie linéaire dans $\{\lambda u, \lambda > 0, u \in SO(E)\}$ est une sous-groupe du groupe précédent noté $S^+(E)$, dont les éléments s'appellent similitudes directes de E.

Enfin, toute similitude de rapport $\lambda > 0$ envoie un sous-espace affine de E sur un sous-espace affine de E de même dimension, un cercle de rayon

$r > 0$ sur un cercle de rayon λr et conserve le parallélisme et l'alignement. Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés de droites et de vecteurs.

23.3 Description des isométries directes en dimension 3

Dans ce paragraphe, $\dim(E) = 3$.

23.3.1 Quelques éléments de $\mathrm{Is}^+(E)$

Définition 23.7 On appelle rotation de E tout déplacement de E admettant un point fixe.

Soit u un déplacement de E admettant un point fixe $a \in E$. L'étude des rotations vectorielles assure, via un changement d'origine, que $u = \mathrm{Id}$ ou u admet exactement une droite de points invariants, auquel cas sa partie linéaire $\overrightarrow{u}$ est une rotation vectorielle.

Finalement une rotation u de E est l'identité ou admet une droite D de points invariants, appelée axe de u. Dans ce cas, on peut orienter D par le choix d'un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{D}$, puis orienter $(\mathbb{R}\overrightarrow{w})^\perp$ de manière compatible avec le choix de $\overrightarrow{w}$. u est alors caractérisée par la donnée de $\overrightarrow{w}$ et d'une mesure de l'angle de la rotation vectorielle $\overrightarrow{u}$.

Définition 23.8 On appelle vissage de E toute composée d'une rotation et d'une translation de vecteur appartenant à la direction de l'axe de la rotation (quelconque si la rotation est l'identité).

Proposition 23.3 L'ordre dans l'écriture des éléments composant un vissage est indifférent.

Démonstration. Soit r une rotation de E distincte de l'identité, d'axe D et t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ appartenant à $\overrightarrow{D} \setminus \{0\}$. Comme $\overrightarrow{t} = \mathrm{Id}$, $r \circ t$ et $t \circ r$ ont même partie linéaire. Or ces deux applications donnent les mêmes images des points de D. On en déduit $r \circ t = t \circ r$. ■

23.3.2 Description de $\mathrm{Is}^+(E)$

Théorème 23.3 *Il est clair que les translations, les rotations et les vissages sont des déplacements. En fait ce sont les seuls.*

Pour tout sous-espace affine V de E (plan ou droite), on note s_V la symétrie orthogonales par rapport à V. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Lemme 23.3.1
Soit V et V' deux sous-espaces affines parallèles de E. Si $\overrightarrow{u}$ désigne l'unique vecteur orthogonal à $\overrightarrow{V}$ et tel que $V' = V + \overrightarrow{u}$, alors $s_{V'} \circ s_V = t_{2\overrightarrow{u}}$.

Réciproquement toute translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit comme la composée $s_{V'} \circ s_V$ où V est un sous-espace affine quelconque de direction incluse dans $(\mathbb{R}\overrightarrow{v})^\perp$ et $V' = V + \frac{\overrightarrow{v}}{2}$.

Démonstration. Comme dans le plan. ■

Lemme 23.3.2
Soit P et P' deux plans de E d'intersection égale à une droite Δ, orientée par un vecteur non nul $\overrightarrow{\omega} \in \overrightarrow{E}$. Notons Π un plan orthogonal à Δ orienté de manière compatible avec Δ, D (resp. D') l'intersection de P (resp. P') et Π. On pose aussi α une mesure de l'angle de droites $(\widehat{\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D'}})$. Alors $s_{P'} \circ s_P$ est la rotation d'axe Δ, orienté par $\overrightarrow{\omega}$, dont une mesure est 2α.

Réciproquement, toute rotation d'axe Δ, orienté par $\overrightarrow{\omega} \in \overrightarrow{E} \setminus \{0\}$ et de mesure β peut s'écrire comme composée $s_{P'} \circ s_P$ où P est un plan quelconque contenant Δ et P' est l'unique plan contenant Δ et tel que la mesure de $(\widehat{\overrightarrow{P}^\perp, \overrightarrow{P'}^\perp})$ mesuré dans $(\mathbb{R}\overrightarrow{\omega})^\perp$ orienté de manière compatible avec $\overrightarrow{\omega}$ soit $\frac{\beta}{2}$.

Démonstration. La réflexion s_P laisse clairement Π globalement invariant et induit sur Π la symétrie axiale d'axe D. De même, la réflexion $s_{P'}$ laisse Π globalement invariant et induit sur Π la symétrie axiale d'axe D'.

Il s'ensuit que $s_{P'} \circ s_P$ induit sur Π l'application $s_{D'} \circ s_D$ ie la rotation plane de de centre $D \cap D'$ et donc une mesure de l'angle est 2α. De plus, comme s_P et $s_{P'}$ laissent Δ invariante point par point, il en est de même de leur composée.

Finalement, on peut trouver 4 points non coplanaires en lesquelles $s_{P'} \circ s_P$ coïncide avec la rotation d'axe Δ orienté par $\overrightarrow{\omega}$ et dont une mesure de l'angle est 2α (trois points non alignés de Π et un de $\Delta \setminus \Pi$). D'où l'égalité des deux applications.

La réciproque est une simple réécriture de ce qui précède. ■

Lemme 23.3.3
Soit D et D' deux droites de E sécantes en o. Notons Δ la droite passant par o et orthogonale au plan P engendré par D et D'. On oriente Δ par le choix d'un vecteur $\overrightarrow{\omega} \in \overrightarrow{E}$ et P de manière compatible.

On désigne par α une mesure de l'angle de droites $(\widehat{D, D'})$ mesuré dans P.

Alors $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation d'axe Δ orienté par $\overrightarrow{\omega}$, dont une mesure est 2α.

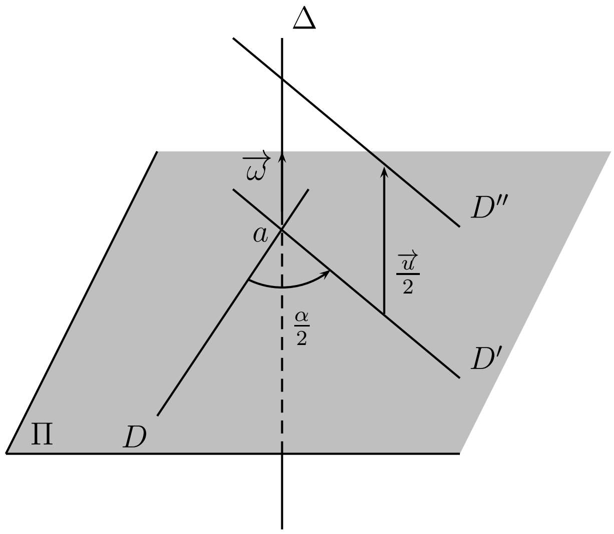
Réciproquement, toute rotation d'axe Δ orienté par $\overrightarrow{\omega}$ et de mesure β peut s'écrire comme composée $s_{D'} \circ s_D$ où D est une droite quelconque sécante avec Δ (en o) et orthogonale à Δ, et D' l'unique droite passant par o, orthogonale à Δ et telle que la mesure de l'angle $(\widehat{D, D'})$, mesuré dans $\overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ soit $\frac{\beta}{2}$.

Démonstration. Similaire à la démonstration précédente. ■

<u>Théorème 23.4</u> *Les vissages de E sont les composées de deux symétries axiales orthogonales.*

Démonstration.

- Montrons qu'un vissage v se décompose en produit de deux symétries axiales orthogonales. Ce point est déjà établi si v est une translation ou une rotation. On suppose donc que v est caractérisé par son axe Δ (orienté par $\overrightarrow{\omega}$), par une mesure de son angle $\alpha \in]0, 2\pi[$ et par un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ de translation dans $\overrightarrow{\Delta}$.
  Il existe Π un plan orthogonal à Δ, qu'on oriente de manière compatible àavec $\overrightarrow{\omega}$. On note $\{a\} = \Delta \cap \Pi$. Il existe deux droites D et D' de Π passant par a telles qu'une mesure de l'angle $(\widehat{D, D'})$ soit $\frac{\alpha}{2}$.
  On appelle $D'' = t_{\frac{\overrightarrow{u}}{2}}(D')$. Les lemmes précédents assurent que la rotation d'axe Δ dont une mesure de l'angle est α est $(s_{D'} \circ s_D$ et que $t_{\overrightarrow{u}} = s_{D''} \circ s_{D'}$.
  On en déduit que $v = s_{D''} \circ s_D$.
- Soit D et D'' deux droites de E. Si ces droites sont coplanaires, $s_D \circ s_{D''}$ est une translation ou une rotation par la partie précédente.
  Dans le cas contraire, on note Δ la perpendiculaire commune à ces deux droites, et D' la projection de D'' sur le plan orthogonale à Δ contenant D. On remarque que $s_{D''} \circ s_D = (s_{D''} \circ s_{D'}) \circ (s_{D'} \circ s_D)$.
  Or $s_{D''} \circ s_{D'}$ est une translation de vecteur appartenant à la direction de Δ et $s_{D'} \circ s_D$ est une rotation d'axe Δ. Donc $s_{D''} \circ s_D$ est un vissage, dont l'axe est la perpendiculaire commune à D et D''. ■



Remarque 23.4 *Comme on sait décomposer toute symétrie axiale orthogonale en produit de deux réflexions, tout vissage de E se décompose en produit de quatre réflexions. Réciproquement, la composée de quatre réflexions est un déplacement de E.*

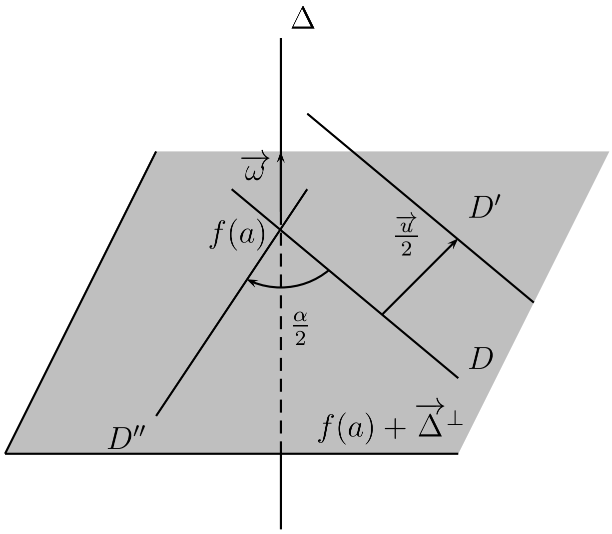
<u>Théorème 23.5</u> $\mathrm{Is}^+(E)$ *est l'ensemble des vissages de E. C'est donc aussi l'ensemble des composées de quatre réflexions.*

Démonstration. Par construction, les vissages de E sont dans $\mathrm{Is}^+(E)$. Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Is}^+(E)$. On prend $a \in E$ et on note t la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$ et $h = f \circ t^{-1}$. On remarque h est un déplacement et que $f(a)$ est fixe pour h.

Un changement d'origine assure que h est l'identité ou une rotation. Finalement, on a trois cas possibles pour f : f est une translation ou une rotation, auquel cas, c'est un vissage, ou f est la composée d'une rotation h et d'une translation t, chacune distincte de l'identité. Dans ce cas, si le vecteur de t appartient à la direction de l'axe de h, f est clairement un vissage.

Dans le cas contraire, on note Δ l'axe orienté de h, $\alpha \in]0, 2\pi[$ une mesure de l'angle de h et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ le vecteur de t. On appelle D la droite $f(a) + (\overrightarrow{Delta} + \mathbb{R}\overrightarrow{u})^{\perp}$ (qui est bien une droite vu que $\overrightarrow{u} \notin \overrightarrow{\Delta}$), $D' = t_{-\frac{\overrightarrow{u}}{2}}(D)$ et D'' la droite passant par a, orthogonale à Δ et telle qu'une mesure de $(\widehat{D, D''})$ dans le plan $\overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ (orienté de manière compatible avec Δ) soit $\frac{\alpha}{2}$. On a déjà vu que $f = s_{D''} \circ s_D$ et $t = s_D \circ s_{D'}$.

On en déduit $f = s_{D''} \circ s_{D'}$, qui est la composée de deux symétries axiales orthogonales, donc un vissage. ∎


Δ
$\overrightarrow{\omega}$
$f(a)$
D'
$\frac{\overrightarrow{u}}{2}$
$\frac{\alpha}{2}$
D
D''
$f(a) + \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$

Chapitre 24

Polynômes à une indéterminée à cœfficients dans un corps

Ici, $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

24.1 Définitions générales

Définition 24.1 On appelle suite presque nulle d'élément de $\mathbb{K}$ toute suite a d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que le support de a : $\text{supp}(a) = \{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ soit fini.

Définition 24.2 On appelle polynôme à une indéterminée à cœfficients dans $\mathbb{K}$ tout suite presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$.

On note leur ensemble $\mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme nul dont tous les cœfficients sont nuls.

Définition 24.3 Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. On appelle degré de P et on note $\deg(P)$ le plus grand élément du support de P.

On appelle cœfficient dominant de P le cœfficient d'indice égal à $\deg(P)$.

Un polynôme est dit unitaire (ou normalisé) ssi il est non nul et de cœfficient dominant égal à 1.

Remarque 24.1 Par convention $\deg(0) = -\infty$. *L'ensemble des degrés est donc* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *qu'on peut munir d'une addition et d'une relation d'ordre.*

On peut donc définir les polynômes constants comme ceux de degré négatif ou nul.

Définition 24.4 On appelle indéterminée de $\mathbb{K}[X]$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$dont les cœfficients sont tous nuls sauf celui d'indice 1, égal à 1. Ce polynôme est noté X.

24.2 Structure algébrique

24.2.1 Lois de composition

Afin de définir des opérations, il faut vérifier qu'elles donnent des suites presque nulles.

Proposition 24.1 Soit a et b deux suites presque nulles. On note P et Q les polynômes associés et on pose $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si $n \geqslant \deg(P) + 1$ alors $\lambda a_n = 0$
- Si $n \geqslant \sup(\deg(P), \deg(Q)) + 1$ alors $a_n + b_n = 0$
- Si $n \geqslant \deg(P) + \deg(Q) + 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents.

Si P ou Q est nul, c'est clair. Dans le cas contraire, on pose $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$.

Soit $n \geqslant p + q + 1$.

Par définition, pour tout $k \in [\![p + 1, n]\!]$, $a_k = 0$ et pour $k \in [\![0, p]\!]$, $n - k \geqslant n - p \geqslant q + 1$ donc $b_{n-k} = 0$.

On a donc $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$. ■

<u>**Définition 24.5**</u> Pour tout polynômes P et Q de suites a et b, on définit :

- $P + Q = (a_n + b_n)_n$
- $PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_n$
- $\lambda P = (\lambda a_n)_n$.

Remarque 24.2 Tout polynôme non nul s'écrit comme produit d'un polynôme unitaire et de son cœfficient dominant.

Exemple 24.1 Pour tout p, X^p est le polynôme donc tous les cœfficients sont nuls sauf je p^{e} qui vaut 1.

Proposition 24.2 Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

- $\deg(P + Q) \leqslant \sup(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Démonstration. On a déjà vu le premier point et que $\deg(PQ) \leqslant \deg(P)\deg(Q)$.

La deuxième inégalité est claire si P ou Q est nul. On les suppose donc non nuls et on note p et q leurs degrés et a et b les suites correspondantes.

Le cœfficient d'indice $p + q$ de PQ est

$$\sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k b_{p+q-k} + a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_k b_{p+q-k}$$

Pour tout $k \geqslant p+1$, $a_k = 0$ et pour tout $k \leqslant p-1$, $b_{p+q-k} = 0$.

Donc le cœfficient d'indice $p+q$ de PQ est $a_p b_q \neq 0$.

Donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. ∎

Remarque 24.3

- $\deg(P+Q) < \sup(\deg(P), \deg(Q))$ *ssi* $\deg(P) = \deg(Q) = p$ *et* $a_p = -b_p$.
- *On peut vérifier que le cœfficient constant (resp. dominants) de PQ est le produit des cœfficients constants (resp. dominants) de P et Q. En particulier le produit de deux polynômes unitaires est unitaire.*

24.2.2 Structure algébrique

<u>Théorème 24.1</u> $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

<u>Définition 24.6</u> On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur à n.

Proposition 24.3 C'est un espace vectoriel dont une base est $(1, X, \cdots, X^n)$.

<u>Théorème 24.2</u> $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *est un anneau commutatif donc les éléments inversibles sont les polynômes constants non nuls.*

Démonstration. On a déjà vu que $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien. Il faut démontrer que $\times$ est associative, commutative, distributive par rapport à $+$ et possède un neutre.

On sait déjà que $\times$ est commutative et que 1 est un neutre.

Soit P, Q, R trois polynômes de suites respectives a, b et c.

$$(PQ)R = \left(\sum_{p+q=n}^{a} {}_p b_q \right)_n c = \left(\sum_{p+q+r=n}^{a} {}_p b_q c_r \right)_n$$

La symétrie en a, b et c assure l'associativité.

$$P(Q+R) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) \right)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)_n + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \right)_n = PQ + PR$$

Comme $\times$ est commutative, elle est distributive par rapport à $+$.

De plus, les polynômes constants non nuls sont inversibles et si P est inversible, on a $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = 1$ donc $\deg(P) + \deg(Q) = 0$ donc $\deg(P) = 0$ et P est constant non nul. ∎

Remarque 24.4 $\mathbb{K}[X]$ *n'est pas un corps, mais il est intègre.*

De plus, pour tout $\lambda, P, Q \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]^2$, $(\lambda P)Q = P(\lambda Q) = \lambda(PQ)$ doc on peut ne pas écrire les parenthèses.

24.2.3 Écriture des éléments de $\mathbb{K}[X]$

On remarque que, en notant 1 le neutre multiplicatif de $\mathbb{K}[X]$, $a\cdot 1+b\cdot 1 = (a+b)\cdot 1$ et $(a\cdot 1)\times(b\cdot 1) = (ab)\cdot 1$. On peut donc confondre éléments de $\mathbb{K}$ et polynômes constants.

De plus, on peut écrire tout polynôme défini par a comme la somme *finie* :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_n}^{a} X^n$$

Définition 24.7 Soient P et Q deux polynômes. On note $P = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_n}^{a} X^n$.

On pose $P\circ Q = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n Q^n$ qui est obtenu en substituant Q à X dans l'écriture de P.

$P\circ Q$ est bien un polynôme de degré $\deg(P)\deg(Q)$.

Remarque 24.5 Il y a unicité du cœfficient de X^n dans l'écriture de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$.

24.3 Divisibilité et division

Définition 24.8 Soit (P,Q) deux polynômes. On dit que P divise Q ou que P est un diviseur de Q ou que Q est un multiple de P et on note $P \mid Q$ ssi il existe $R\in\mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$.

Remarque 24.6
- *Si $P\mid Q$, alors $Q = 0$ ou $\deg(P)\leqslant\deg(Q)$.*
- *$P\mid Q$ et $Q\mid P$ ssi $\deg(P)\leqslant\deg(Q)$.*

Définition 24.9 On dit que deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont associés ssi il existe $\lambda\neq 0$ tel que $P = \lambda Q$.

Théorème 24.3 Division euclidienne *Soit A, B deux polynômes avec $B\neq 0$. Il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ+R$ et $\deg(R)<\deg(B)$.*

Q et R sont les quotient et reste de la division euclidienne du dividende A par l diviseur B.

Démonstration.
- Soit $p = \deg(B)$. Si $p = 0$, c'est évident. On suppose $p\geqslant 1$ et on note b le cœfficient dominant de B. De plus, pour tout m, on pose

  H_m : ´ $\forall A\in\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A)\leqslant m, \exists!(Q,R)\in\mathbb{K}[X]^2, A = BQ+R$ et $\deg(R) <$ de

Pour tout $m < p$, H_m est vraie.
Soit m tel que H_m soit vraie et A tel que $\deg(A) \leqslant m+1$.
Si $\deg(A) < m+1$, H_m assure le résultat. Sinon, on note a le cœfficient dominant de A.
On a $\deg(A - ab^{-1}X^{m+1-p}B) \leqslant m$ donc il existe (Q, R) tel que $A - ab^{-1}X^{m+1-p}B = BQ + R$ donc $A = (ab^{-1}X^{m+1-p} + Q)B + R$, ce qui conclut. Donc H_{m+1} est vraie et le principe de récurrence assure l'existence.

- Soit Q, R, Q', R' tel que $BQ + R = BQ' + R'$ et $\deg(R) < \deg(B)$ et $\deg(R') < \deg(B)$.
  On a $(Q - Q')B = (R - R')$ donc comme $\deg((Q - Q')B) = \deg(Q - Q') + \deg(B)$, si $Q \neq Q'$, $\deg(R - R') \geqslant \deg(B)$. Contradiction.
  Donc $Q = Q'$ et $R = R'$. ■

Chapitre 25

Arithmétique des polynômes

25.1 Généralisation

Lemme 25.0.1
Soit $\mathcal{E}$ un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$ qui est aussi un idéal.

Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{E} = P\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Comme $\mathcal{E}$ est un groupe, $0 \in \mathcal{E}$. $\{0\}$ est de la forme proposée donc on suppose $\mathcal{E} \neq \{0\}$.

- L'ensemble des degrés d'éléments non nuls de $\mathcal{E}$ est non vide donc minoré. Il existe donc $P \in \mathcal{E}$ non nul de degré minimal.
  Par construction $P\mathbb{K}[X] \subset \mathcal{E}$.
- Soit $Q \in \mathcal{E}$. Comme $P \neq 0$, il existe A, R tel que $Q = PA + R$ et $\deg(R) < \deg(P)$.
  On a $PA \in \mathcal{E}$ donc $R \in \mathcal{E}$ et on a finalement $R = 0$.
  Donc $Q = PA$ d'où l'inclusion. ∎

Remarque 25.1 $P\mathbb{K}[X] \cap Q\mathbb{K}[X]$ *et* $P\mathbb{K}[X] + Q\mathbb{K}[X]$ *vérifient les hypothèses du lemme, donc on peut définir le pgcd et le ppcm de deux polynômes.*

Proposition 25.1 $P\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X]$ ssi P et Q sont associés.

Démonstration. Une implication est évidente. Montrons l'autre.

On a $P \mid Q$ et $Q \mid P$ donc $P = Q = 0$ ou $\deg(P) = \deg(Q)$.

Si P ou Q est non nul alors P et Q ont même degré et il existe R tel que $P = RQ$.

On a de plus $\deg(R) = 0$ donc P et Q sont associés. ∎

Remarque 25.2 On en déduit que toute partie vérifiant les hypothèses du lemme, il existe P unitaire ou nul tel qu'elle vaille $P\mathbb{K}[X]$.

25.2 Notion de pgcd et ppcm

Définition 25.1 Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

Il existe un unique polynôme nul ou unitaire divisant P et Q et tel que tout autre diviseur commun de P et Q le divise. Icelui est appelé pgcd de P et Q noté $P \wedge Q$.

Il existe un unique polynôme nul ou unitaire multiple de P et Q et qui divise tout autre multiple commun à P et Q. Icelui est appel ppcm de P et Q noté $P \vee Q$.

On dit que deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux ssi leur pgcd vaut 1.

Proposition 25.2 Pour tout $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ tel que R soit unitaire.

- $P \wedge Q = Q \wedge P$
- $PR \wedge QR = R(P \wedge Q)$
- $P \vee Q = Q \vee P$
- $PR \vee QR = R(P \vee Q)$

Théorème 25.1 Bachet-Bézout *Soit* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

$P \wedge Q = 1$ *ssi il existe* (A, B) *tel que* $AP + BQ = 1$.

Remarque 25.3 On a l'implication : $D = P \wedge Q$ *donc il existe* A, B *tel que* $PA + BQ = D$.

La réciproque est vraie si on ajoute les conditions D *unitaire,* $D \mid P$ *et* $D \mid Q$.

Proposition 25.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \cdots, A_n, B) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \wedge B = 1$.

Alors $\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \wedge B = 1$.

Théorème 25.2 Gauss *Soit* $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$.

Si P *et* Q *sont premiers entre eux et* $P \mid QR$ *alors* $P \mid R$.

Proposition 25.4 Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$ tel que B et C soient premiers entre eux et que $B \mid A$ et $C \mid A$.

Alors $BC \mid A$.

Remarque 25.4 Ce résultat se généralise à plus de deux facteurs deux à deux premiers entre eux.

Proposition 25.5 Soit P et Q deux polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

On a $PQ = (P \wedge Q)(P \vee Q)$.

Remarque 25.5 On a aussi un analogue pour l'algorithme d'Euclide.

25.3 Élements irréductibles de $\mathbb{K}[X]$

Définition 25.2 Parmi les diviseurs de P se trouvent tous les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ et tous les éléments de $\mathbb{K}[X]$ associés à P.

On appelle polynôme irréductible un polynôme non constant dont ce sont les seuls diviseurs.

Théorème 25.3 *Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ admet un diviseur irréductible unitaire.*

Démonstration. Soit P un polynôme non constant. On pose $D = \{\deg(Q), Q \mid P \text{ unitaire non constant}\}$.

Comme D est non vide (contient $\deg(a^{-1}P)$ avec a le cœfficient dominant de P), elle admet un plus petit élément associé au polynôme Q.

Si Q n'est pas irréductible, comme il est non constant, il existe R, S tel que $Q = RS$ et $\deg(R) \in [\![1, q-1]\!]$.

Notons r le cœfficient dominant de R. $r^{-1}R$ est un polynôme unitaire diviseur de Q donc de P. Comme son degré est strictement inférieur à celui de Q, on a une contradiction.

Donc Q est irréductible et divise P. ∎

Théorème 25.4 Décomposition en facteurs irréductibles unitaires
Notons I l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

Soit $A \neq 0$. Il existe un unique élément $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et une unique $\mu : I \to \mathbb{N}$ presque nulle tel que :

$$A = \lambda \prod_{P \in I} P^{\nu(P)}$$

Démonstration. On limite la preuve au cadre des polynômes unitaires, on en déduit le résultat facilement.

$\exists$ On procède ensuite par récurrence : pour tout n, on pose

$$H_n\colon \forall A \text{ unitaire tel que } \deg(A) \leqslant n, \exists \nu\colon I \to \mathbb{N} \text{ presque nulle telle que } A = \prod_{P \in I} P^{\nu(P)}$$

H_1 est évidente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie. Soit A de degré $n+1$ unitaire.
Si A est irréductible, c'est vrai. Sinon, il existe B diviseur irréductible unitaire de A.
Il existe alors C unitaire tel que $A = BC$. Comme $\deg(C) < \deg(A)$, l'hypothèse de récurrence assure l'existence de $\nu : I \to \mathbb{N}$ presque nulle telle que :

$$C = \prod_{P \in I} P^{\nu(P)}$$

On définit alors $\mu : I \to \mathbb{N}$ égale à ν sauf en B et telle que $\mu(B) = \nu(B) + 1$. μ est presque nulle et on a

$$A = \prod_{P \in I} P^{\mu(P)}$$

D'où H_{n+1} est vraie et le principe de récurrence assure l'existence.

! Si un polynôme unitaire admet deux décompositions distinctes, il existe μ et $\nu : I \to \mathbb{N}$ distinctes telles que :

$$\prod_{P \in I} P^{\nu(P)} = \prod_{P \in I} P^{\mu(P)}$$

Comme $\nu \neq \mu$, il existe $Q \in I$ tel que $\nu(Q) \neq \mu(Q)$. Il est loisible de supposer $\nu(Q) < \mu(Q)$.

$$\prod_{P \neq Q} P^{\nu(P)} = Q^{\mu(Q)-\nu(Q)} \prod_{P \neq Q} P^{\mu(P)}$$

Donc Q divise le produit de gauche tout en étant premier avec donc $Q = 1$.
Contradiction. Donc $\mu = \nu$. ■

Remarque 25.6 On obtient ainsi le théorème de D'Alembert et de D'Alembert-Gauss.

Exemple 25.1

- Un polynôme de degré 1 est irréductible.
- Un polynôme de degré au moins deux qui admet une racine n'est pas irréductible.
- La réciproque est fausse en général mais vraie si le degré est inférieur ou égal à 3.

Démonstration.

- Si $\deg(P) = 1$ et $P = AB$, $\deg(A) + \deg(B) = 1$ donc A ou B est constant.
  D'où l'irréductibilité de P.
- Soit P de degré au moins 2 admettant a comme racine.
  On a Q tel que $P = (X - a)Q$ et $\deg(Q) = \deg(P) - 1 \geqslant 1$. Donc P n'est pas irréductible.
- Soit P de degré 2 ou 3 sans racine. Si $P = AB$ alors $\deg(A) + \deg(B) \in \{2, 3\}$ et $\deg(A) \neq 1$ et $\deg(B) \neq 1$.
  On en déduit que A ou B est constant, d'où le résultat et l'irréductibilité de P.

- Sur $\mathbb{R}$, $(X^2+1)^2$ n'est pas irréductible et n'a pas de racine, d'où la fausseté pour un degré supérieur à 4. $\blacksquare$

Chapitre 26

Racines d'un polynôme

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

26.1 Vocabulaire

Définition 26.1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que λ est racine de P avec un ordre de multiplicité exactement égal à k si et seulement si $(X-\lambda)^k | P$ et $(X-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas P.
- On dit que λ est racine de P avec un ordre de multiplicité au moins k si et seulement si $(X-\lambda)^k | P$.

Abréviations :

- Une racine de P est une racine d'ordre de multiplicité au moins 1.
- Une racine simple de P est une racine d'ordre de multiplicité exactement égal à 1.
- Une racine double de P est une racine d'ordre de multiplicité exactement égal à 2.
- Une racine triple de P est une racine d'ordre de multiplicité exactement égal à 3.

Définition 26.2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On appelle fonction polynôme associée à P la fonction :

$$\widetilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \end{cases}$$

Proposition 26.1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est racine de P si et seulement si $\widetilde{P}(\lambda) = 0$.

Démonstration. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de P.

$$\begin{aligned} P - \widetilde{P}(\lambda) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \lambda^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (X^n + \lambda^n) \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X - \lambda | X^n - \lambda^n$.

Donc $X - \lambda | P - \widetilde{P}(\lambda)$.

Donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \widetilde{P}(\lambda) + (X - \lambda)Q$.

On suppose que λ est une racine de P. On a $X - \lambda | P$ donc $X - \lambda | \widetilde{P}(\lambda)$. Donc $\widetilde{P}(\lambda) = 0$.

On suppose que $\widetilde{P}(\lambda) = 0$. $P = (X - \lambda)Q$ donc $X - \lambda | P$. Donc λ est une racine de P. ∎

Remarque 26.1 La notion de racine est plus précise que celle de point d'annulation :

Exemple 26.1 On pose $P = (X-1)(X+2)^2$. On a :

$$\widetilde{P} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-1)(x+2)^2 \end{cases}$$

Les points d'annulation de $\widetilde{P}$ sont 1 et -2.

Les racines de P, comptées avec ordre de multiplicité sont 1, -2 et -2. Un système de racines de P est $(1, -2, -2)$ (il n'y a pas d'ordre dans ces systèmes).

Définition 26.3 On appelle équation algébrique sur $\mathbb{K}$ toute équation (E) tel qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant (E) : $\widetilde{P}(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}$.

26.2 Recherche des ordres de multiplicité des racines

26.2.1 Dérivation de polynômes

Définition 26.4 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On appelle polynôme dérivé de P et on note P' le polynôme :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} X^n$$

Remarque 26.2

- *La définition est licite.*
- *La notion de dérivabilité est débile.*
- *Pour tout* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}$ *désigne le polynôme* P *dérivé* k *fois.*
- *Pour tout* $P \in \mathbb{K}[X]$, $P^{(0)} = P$.

Remarque 26.3 *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $k \in \mathbb{N}$.
Si $k \leqslant \deg(P)$, $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$.
Si $k > \deg(P)$, $P^{(k)} = 0$.

<u>Théorème 26.1</u> *Soit* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $(P + Q)' = P' + Q'$
- $(\lambda P)' = \lambda P'$
- $(PQ)' = P'Q + Q'P$
- $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$

<u>Théorème 26.2</u> *Soit* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ *et* $k \in \mathbb{N}$.

$$(PQ)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} P^{(r)} Q^{(k-r)}$$

<u>Théorème 26.3</u> (formule de Taylor) *: Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\widetilde{P}^{(k)}}{k!} \times (X - \lambda)^k \right)$$

Démonstration.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note que :

$$P^{(k)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{k} (n + i) a_{n+k} X^n \right)$$

  Donc $\widetilde{P}^{(k)}(0) = k! a_k$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{\widetilde{P}^{(k)}(0)}{k!}$
  Donc, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  On pose $Q = P \circ (X + \lambda)$. On sait que :

$$Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\widetilde{Q}^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^{(k)} = P^{(k)} \circ (X+\lambda)$.
Donc,

$$P \circ (X+\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\lambda)}{k!} X^k$$

Finalement,

$$P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\lambda)}{k!} (X-\lambda)^k$$

■

Remarque 26.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{1, X-\lambda, (X-\lambda)^2, \cdots, (X-\lambda)^n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.*

<u>Théorème 26.4</u> *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

- *λ est une racine de P d'ordre de multiplicité au moins k si et seulement si pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\widetilde{P}^{(i)}(\lambda) = 0$*
- *λ est une racine de P d'ordre de multiplicité exactement égal à k si et seulement si pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\widetilde{P}^{(i)}(\lambda) = 0$ et $\widetilde{P}^{(k)}(\lambda) \neq 0$.*

Démonstration. On note que :

$$P = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\widetilde{P}^{(i)}}{i!} \times (X-\lambda)^i \right)}_{A} + (X-\lambda)^k \left[\frac{\widetilde{P}^{(k)}(\lambda)}{k!} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{+\infty} \left(\frac{\widetilde{P}^{(i)}}{i!} \times (X-\lambda)^{i-k} \right)}_{B} \right]$$

- On suppose que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\widetilde{P}^{(i)}(\lambda) = 0$ et $\widetilde{P}^{(k)}(\lambda) \neq 0$.
  Dans ce cas, $A = 0$ donc $(X-\lambda)^k | P$.
  On suppose que $(X-\lambda)^{k+1} | P$.
  On a $X - \lambda \left| \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\lambda)}{k!} + B \right.$, or $X - \lambda | B$ donc $X - \lambda \left| \frac{\widetilde{P}^{(k)}(\lambda)}{k!} \right.$.
  Or $\deg(X-\lambda) = 1$ et $\deg\left(\frac{\widetilde{P}^{(k)}(\lambda)}{k!}\right) \leqslant 0$.
  Donc $\widetilde{P}^{(k)}(\lambda) = 0$. Il y a contradiction donc $(X-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas P.
- On suppose $(X-\lambda)^k | P$ et $(X-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas P.
  $(X-\lambda)^k | P$ et $(X-\lambda)^k \left| (X-\lambda)^k \left(\frac{\widetilde{P}^{(k)}(\lambda)}{k!} + B \right) \right.$
  Donc $(X-\lambda)^k | A$. Or $\deg(A) \leqslant k-1$ et $\deg((X-\lambda)^k) = k$. Donc $A = 0$.
  Donc, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\widetilde{P}^{(i)}(\lambda) = 0$.
  On suppose $\widetilde{P}^{(k)}(\lambda) = 0$. On a $(X-\lambda)^{k+1} | P$. Il y a contradiction.
  On a donc $\widetilde{P}^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

■

Exercice : Montrer que les racines de $P = X^7 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Supposons que P admette une racine d'ordre de multiplicité au moins 2 notée λ.

$$\begin{cases} \widetilde{P}(\lambda) = 0 \\ \widetilde{P'}(\lambda) = 0 \end{cases} \text{donc} \begin{cases} \lambda(\lambda^6 + 1) + 1 = 0 \\ 7\lambda^6 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \begin{cases} \lambda = -\dfrac{7}{6} \\ \lambda^6 = -\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

$$\text{donc } 7\left(-\frac{7}{6}\right)^6 + 1 = 0$$

Donc toutes les racines de P sont simples.

26.3 Ensemble des racines d'un polynôme

26.3.1 Introduction

Lemme 26.4.1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ deux à deux distincts.

Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i} \Bigg| P$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} | P$.

Application :

- Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On appelle k le nombre de racines de P. On note $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ les racines de P (deux à deux distinctes). On note $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ les ordres de multiplicités des racines.

  On sait que $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i} \Bigg| P$.

  Donc $\deg(P) \geqslant \deg\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}\right)$.

  Donc $\deg(P) \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$.
- Un polynôme P non nul a au plus $\deg(P)$ racines.
- Pour montrer qu'un polynôme P est nul, on cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leqslant k$, puis on cherche $k + 1$ racines.

Exercice : On pose :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P \circ (X+1) - P \end{cases}$$

Montrer que φ est linéaire et que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{K}_0[X]$.
φ est clairement linéaire.
$\mathbb{K}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a $P \circ (X+1) = P$.
On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P}(k) = \widetilde{P}(0)$.
Donc $P - \widetilde{P}(0)$ admet tous les entiers naturels pour racines.
Donc $P - \widetilde{P}(0) = 0$. Donc $P \in \mathbb{K}_0[X]$.
Finalement, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{K}_0[X]$.

26.3.2 Complémént sur les fonctions polynômes

Théorème 26.5 *La fonction :*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \\ P & \mapsto & \widetilde{P} \end{cases}$$

est distributive par rapport à $+$, $\circ$, $\times$ (par un scalaire ou un polynôme) et par dérivation.

De plus, φ est injective (ce qui n'est pas vrai dans tous les corps).

Démonstration. φ est linéaire. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

On a $\varphi(P) = 0$ donc $\widetilde{P} = 0$. Donc tout élément de $\mathbb{K}$ est racine de P. Or $\mathbb{K}$ est infini donc $P = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$. Or $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Donc φ est injective. ■

Application : La fonction :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathrm{Im}(\varphi) \\ P & \mapsto & \widetilde{P} \end{cases}$$

est bijective et permet d'identifier polynôme et fonction polynômiale associée quand on utilise seulement $+$, $\times$, $\circ$ et l'opérateur dérivation dans $\mathbb{R}$. Cette identification permet d'utiliser tout le vocabulaire des polynômes avec les fonctions polynômiales.

26.4 Factorisation d'un polynôme

26.4.1 Polynôme scindé

Définition 26.5 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé si et seulement si P est constant ou la somme des ordres de multiplicité des racines de P est égale à $\deg(P)$.

Remarque 26.5

- *Un polynôme est scindé si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ et $\nu \in \mathbb{N}^{\mathbb{K}}$ tel que $\{\lambda \in \mathbb{K}, \nu(k) \neq 0$ soit fini et :*

$$P = \mu \prod_{\lambda \in \mathbb{K}} (X - \lambda)^{\nu(\lambda)}$$

- *Si $P \neq 0$, l'écriture est unique.*
- *Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que A soit scindé.*
  Si toute racine de A est racine de B avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à celui dans A, alors $A|B$.

Exercice : Montrer que $X^{32} + X^{16} + 1 | X^{64} + X^{32} + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$A = X^{32} + X^{16} + 1$ admet exactement 32 racines, racines seizièmes de j et j^2.

Soit α une racine de A. $\alpha^{16} = j$ ou $\alpha^{16} = j^2$.

Dans le premier cas, $\alpha^{64} + \alpha^{32} + 1 = j^4 + j^2 + 1 = 0$.

Dans le second cas, $\alpha^{64} + \alpha^{32} + 1 = j^8 + j^4 + 1 = 0$.

Donc toute racine de A est une racine de $B = X^{64} + X^{32} + 1$ donc $A|B$.

26.4.2 Existence d'une forme factorisée

Théorème 26.6 de D'Alembert *Tout polynôme complexe est scindé.*

Théorème 26.7 de D'Alembert-Gauss *On appelle I l'ensemble des polynômes réels de degré 2, unitaires et sans racines réelles. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \backslash \{0\}$.*

Il existe un unique $\mu \in \mathbb{R}^*$, une unique application $\nu \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ tel que $\{x \in \mathbb{R}, \nu(x) \neq 0\}$ soit fini et une unique application $\beta \in \mathbb{N}^I$ tel que $\{x \in I, \beta(x) \neq 0\}$ soit fini et :

$$P = \mu \prod_{\lambda \in \mathbb{R}} (X - \lambda)^{\nu(\lambda)} \prod_{Q \in I} Q^{\beta(Q)}$$

Remarque 26.6 On peut inclure le polynôme nul en perdant l'unicité.

Lemme 26.7.1

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle conjugué de P et on note $\overline{P}$ le polynôme de coefficients $(\overline{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{K}[X])^2$, $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$, $\overline{PQ} = \overline{P}\overline{Q}$ et $\overline{\lambda P} = \overline{\lambda}\overline{P}$.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $\nu \in \mathbb{N}^{\mathbb{C}}$ tels que $\{z \in \mathbb{C}, \nu(z) \neq 0\}$ soit fini et :

$$P = \mu \prod_{z \in \mathbb{C}} (X - z)^{\nu(z)}$$

Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{P} = P$.

Donc :

$$P = \overline{\mu} \prod_{z \in \mathbb{C}} (\overline{X - z})^{\nu(z)} = \overline{\mu} \prod_{z \in \mathbb{C}} (X - \overline{z})^{\nu(z)}$$

Comme $z \mapsto \overline{z}$ est bijective, $P = \overline{\mu} \prod_{z \in \mathbb{C}} (X - z)^{\nu(\overline{z})}$.

L'unicité de l'écriture assure que $\mu \in \mathbb{R}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\nu(\overline{z}) = \nu(z)$.

On pose $\mathscr{P}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ et $\mathscr{P}^- = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) < 0\}$.

$(\mathscr{P}^+, \mathscr{P}^-, \mathbb{R})$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Donc :

$$P = \mu \prod_{z \in \mathbb{R}} (X - z)^{\nu(z)} \prod_{z \in \mathscr{P}^+} (X - z)^{\nu(z)} \prod_{z \in \mathscr{P}^-} (X - z)^{\nu(z)}$$

Comme $z \mapsto \overline{z}$ est bijective, $\prod_{z \in \mathscr{P}^-} (X - z)^{\nu(\overline{z})} = \prod_{z \in \mathscr{P}^+} (X - \overline{z})^{\nu(z)}$.

Donc :

$$P = \mu \prod_{z \in \mathbb{R}} (X - z)^{\nu(z)} \prod_{z \in \mathscr{P}^+} (X^2 - 2\Re(z)X + |z|^2)^{\nu(z)}$$

On note que pour tout $z \in \mathscr{P}^+$, $X^2 - 2\Re(z)X + |z|^2 \in I$. ∎

Exemple 26.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. on pose $P = X^{2n} - 1$. Trouver la forme de D'Alembert-Gauss de P.

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=0}^{2n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}) \\
&= (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}})\prod_{k=n+1}^{2n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}) \\
&= (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}})\prod_{k=1}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}) \\
&= (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}})\prod_{k=1}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}) \\
&= (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\cos(\frac{k\pi}{n})X+1)
\end{aligned}$$

26.5 Liens entre coefficients et racines d'un polynôme

Exemple 26.3 Soit $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$.

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$$

Si on note $\delta,\gamma,\beta,1$ les coefficients de $(X-a)(X-b)(X-c)$, alors $\delta=-abc$, $\gamma=ab+ac+bc$ et $\beta=-a-b-c$.

Soit $(\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{K}^3$. On pose $P=X^3+\beta X^2+\gamma X+\delta$.

Si P est scindé, il existe (a,b,c) un système de racines de P. Les trois relations précédentes sont alors vraies.

Définition 26.6 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in[\![1,n]\!]$ et $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{K}^n$.

On appelle « p-ième fonction symétrique » de la famille $(a_1,\cdots,a_n)$ le scalaire :

$$\sigma_p = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p \\ i_1<i_2<\cdots<i_p}}\prod_{j=1}^{p}a_{i_j}$$

Remarque 26.7 $\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}a_i$, $\sigma_n=\prod_{i=1}^{n}a_i$.

Théorème 26.8 *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré n, scindé. On note $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les coefficients de P. On note $(a_1,\cdots,a_n)$ un système de racines de P.*

Pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, on note σ_p la p-ième fonction symétrique de la famille $(a_1,\cdots,a_n)$.

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\sigma_p = \frac{(-1)^p \lambda_{n-p}}{\lambda_n}$$

Remarque 26.8 Soit f une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$, algébrique et symétrique. Alors f s'écrit comme une expression algébrique des fonctions symétriques.

Exercice : On pose $P = X^3 - 2X^2 + X - \pi$. Calculer $S_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$, $S_2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i}$ et $S_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i^2}$ avec (x_1, x_2, x_3) un système de racines de P.

$$\begin{aligned}
S_1 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2 \\
S_2 &= \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{1}{\pi} \\
S_3 &= \frac{(x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2}{(x_1x_2x_3)^2} \\
&= \frac{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{(x_1x_2x_3)^2} \\
&= \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1}{\sigma_3^2} \\
&= \frac{1 - 4\pi}{\pi^2}
\end{aligned}$$

Chapitre 27

Fractions rationnelles

27.1 Présentation

On construit le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée à cœfficients dans $\mathbb{K}$ à partir de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, de manière analogue à celle dont on construit $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$.

Ainsi un élément de $\mathbb{K}(X)$ est représenté par le quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes P et $Q \neq 0$.

Les lois sont définies pour tout (F, G, λ) avec $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$ par

$$F + G = \frac{AD + BC}{BD} \quad FG = \frac{AC}{BD} \quad \lambda F = \frac{\lambda A}{B}$$

Ces définitions sont licites : le résultat ne dépend pas des représentants choisis. On identifie chaque polynôme à une fraction rationnelle, à savoir $\frac{P}{1}$ qu'on note encore P.

<u>Théorème 27.1</u> $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ *est un corps et* $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

27.2 Degré d'une fraction rationnelle

<u>Définition 27.1</u> Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

L'élément $\deg(A) - \deg(B) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ est indépendant du représentant $\frac{A}{B}$ choisi pour F. On l'appelle degré de F noté $\deg(F)$.

Démonstration. Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, $AD = BC$ donc $\deg(A) + \deg(D) = \deg(B) + \deg(C)$.

D'où $\deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D)$. ∎

Remarque 27.1 Pour tout objet associé à une fraction rationnelle, on doit prouver l'indépendance vis à vis des représentants.

Proposition 27.1 Soit $(F,G) \in \mathbb{K}(X)^2$.

- $\deg(F+G) \leqslant \sup(\deg(F), \deg(G))$
- $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$.

Démonstration.

- On pose $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$.

$$\begin{aligned} F+G &= \frac{AD+BC}{BD} \\ \text{donc } \deg(F+G) &= \deg(AD+BC) - \deg(BD) \\ \text{donc } \deg(F+G) &\leqslant \sup(\deg(AD), \deg(BC)) - \deg(BD) \\ \text{donc } \deg(F+G) &\leqslant \sup(\deg(AD)-\deg(BD), \deg(BC)-\deg(BD)) \\ \text{donc } \deg(F+G) &\leqslant \sup(\deg(A)-\deg(B), \deg(C)-\deg(D)) \\ \text{donc } \deg(F+G) &\leqslant \sup(\deg(F), \deg(G)) \end{aligned}$$

- Avec les mêmes notations,

$$\deg(FG) = \deg(AC) - \deg(BD) = \deg(A) + \deg(C) - \deg(B) - \deg(D) = \deg(F) + \deg(G$$

■

27.3 Pôles et racines d'une fraction rationnelle

Définir les racines d'une fraction rationnelle F comme étant celles du numérateur est tentant mais absurde. Par exemple, doit-on dire que les racines de :

$$\frac{(X-1)(X-3)(X+4)}{2X^3+7X^2-5X+4} = \frac{(X-1)(X-3)}{2X^2-X-1} = \frac{X-3}{2X+1}$$

sont $\{1,3,-4\}$, $\{1,3\}$ ou $\{3\}$?

Pour régler le problème, on va s'intéresser aux fractions irréductibles.

Proposition 27.2 Toute fraction admet un représentant irréductible : soit A, B, C et D des polynômes avec $C \neq 0 \neq D$.

Si $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{D}$ sont deux représentants irréductibles de la même fraction rationnelle alors A et B sont associés, de même que C et D. En particulier, il existe un unique représentant irréductible d'une fraction rationnelle avec un dénominateur unitaire.

<u>Définition 27.2</u> Soit $F \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Il existe A, B tel que $\frac{A}{B}$ soit un représentant irréductible de F.

Le scalaire λ est dit racine de F de multiplicité k (resp. au moins k) ssi λ est rancine d'ordre de multiplicité k (resp. au moins k) de A.

Le scalaire λ est dit pôle de F d'ordre de multiplicité k (resp. au moins k) ssi λ est racine d'ordre de multiplicité k (resp. au moins k) de B.

Remarque 27.2 Tout scalaire ne peut pas être pôle et racine d'une fonction rationnelle.

27.4 Fonction rationnelle

<u>Définition 27.3</u> Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On prend $\frac{A}{B}$ un représentant irréductible de F.

On note Δ le complémentaire dans $\mathbb{K}$ de l'ensemble des pôles de F.

On appelle fonction rationnelle associée à F la fonction

$$\widetilde{F} : \begin{cases} \Delta & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x)^{-1} \end{cases}$$

Proposition 27.3 Soit $(\lambda, F, G) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}(X)^2$. On note Δ et Γ les ensembles de définition respectifs de $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$. Alors pour tout $x \in \Gamma \cap \Delta$,

- $\widetilde{F+G}(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x)$
- $\widetilde{FG}(x) = \widetilde{F}(x)\widetilde{G}(x)$
- $\widetilde{\lambda F}(x) = \lambda \widetilde{F}(x)$

Proposition 27.4 Soit $(F, G) \in \mathbb{K}(X)^2$. On note Δ et Γ les ensembles de définition respectifs de $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$.

Si $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ coïncident sur une partie infinie de $\Delta \cap \Gamma$, on a $F = G$.

Démonstration. Il existe des représentants irréductibles $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ de F et G.

$\widetilde{AD - BC}$ est un polynôme nul sur une partie infinie de $\Gamma \cap \Delta$, donc $AD = BC$ et $F = G$. ■

Chapitre 28

Décomposition en éléments simples

Dans ce cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

28.1 Mise en place des outils

28.1.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Définition 28.1 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(F - P) < 0$.

P est appelé partie entière de F.

Démonstration.

- On écrit $F = \frac{A}{B}$ avec $B \neq 0$.
  Il existe P, R tel que $A = BP + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$. On note que $F = P + \frac{R}{B}$ et $\deg(\frac{R}{B}) < 0$.
- Soit P, Q tel que $\deg(F - P) < 0$ et $\deg(F - Q) < 0$.
  On a $P - Q = (P - F) - (Q - F)$ donc $\deg(P - Q) \leqslant \sup(\deg(P - F), \deg(Q - F)) < 0$.
  Donc, comme $P - Q \in \mathbb{K}[X]$ donc $P = Q$. ■

Remarque 28.1

- *L'application qui à une fraction rationnelle associe sa partie entière est linéaire.*
- *Soit* $F \in \mathbb{K}(X)$*. Si* $\deg(F) < 0$*, sa partie entière vaut* 0*.*
  Si $\deg(F) = 0$*, la partie entière de* F *est un polynôme constant égal au quotient du cœfficient dominant du numérateur par le dénominateur.*

28.1.2 Partie polaire

Définition 28.2 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que λ est un pôle de F avec un ordre de multiplicité exactement égal à k. Alors il existe un unique $(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $F - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{(X-\lambda)^i}$ n'admette pas λ comme pôle.

La fraction rationnelle $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{(X-\lambda)^i}$ s'appelle partie polaire de F associée à λ.

Démonstration.

∃ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose H_k : « Pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$ admettant λ comme pôle d'ordre k, il existe $(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $F - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{(X-\lambda)^i}$ n'admette pas λ comme pôle. »
On pose $E_k = \{k, H_k \text{ est fausse}\}$.
On suppose $E \neq \varnothing$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que H_{k_0} soit fausse.
Il existe alors $F \in \mathbb{K}(X)$ avec λ pôle d'ordre k_0 et tel que pour tout $(a_1, \cdots, a_{k_0}) \in \mathbb{K}^{k_0}$, $F - \sum_{i=1}^{k_0} \frac{a_i}{(X-\lambda)^i}$ admette λ comme pôle.
Il existe $(A, C) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\widetilde{C}(\lambda) \neq 0$ et $F = \frac{A}{(X-\lambda)^{k_0} C}$.

$$F - \frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\widetilde{C}(\lambda)(X-\lambda)^{k_0}} = \frac{\widetilde{C}(\lambda)A - \widetilde{A}(\lambda)C}{\widetilde{C}(\lambda)C(X-\lambda^{k_0})}$$

Or le numérateur admet λ comme racine donc $X - \lambda \mid \widetilde{C}(\lambda)A - \widetilde{A}(\lambda)C$.
On appelle p l'ordre de λ en tant que racine de $\widetilde{C}(\lambda)A - \widetilde{A}(\lambda)C$.
Si $p \geqslant k_0$, $F - \frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\widetilde{C}(\lambda)(X-\lambda)^{k_0}}$ n'a pas λ comme pôle, ce qui contredit la définition de F.
Si $p < k_0$, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$F - \frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\widetilde{C}(\lambda)(X-\lambda)^{k_0}} = \frac{R}{\widetilde{C}(\lambda)C(X-\lambda)^{k_0-p}}$$

Comme $k_0 - p < k_0$, H_{k_0-p} est vraie donc il existe $(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{K}^{k_0-p}$ tel que

$$\frac{R}{\widetilde{C}(\lambda)C(X-\lambda)^{k_0-p}} - \sum_{i=1}^{k_0-p} \frac{a_i}{(X-\lambda)^i}$$

n'admette pas λ comme pôle.

Donc
$$F-\sum_{i=1}^{k_0-p}\frac{a_i}{(X-\lambda)^i}-\frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\widetilde{C}(\lambda)(X-\lambda)^{k_0}}$$
n'ait pas λ comme pôle, ce qui contredit la construction de F.

Donc $E=\varnothing$ et l'existence est prouvée

! On reprend les notations de l'énoncé. Soit $(a_1,\cdots,a_k)\in\mathbb{K}^k$ et $(b_1,\cdots,b_k)\in\mathbb{K}^k$ tel que $F-\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{(X-\lambda)^i}$ et $F-\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{(X-\lambda)^i}$ n'aient pas λ comme pôle.

En particulier, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{(a_i-b_i)}{(X-\lambda)^i}$ n'a pas λ comme pôle. Donc
$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(a_{k-i}-b_{k-i})(X-\lambda)^i}{(X-\lambda)^k}$$
n'a pas λ comme pôle donc
$$(X-\lambda)^k\,\Bigg\|\sum_{i=0}^{k-1}(a_{k-i}+b_{k-i})(X-\lambda)^i$$
Or :
$$\deg\left(\sum_{i=0}^{k-1}(a_{k-i}+b_{k-i})(X-\lambda)^i\right)<k$$
Donc icelui est nul et pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, $a_i=b_i$. ∎

Exemple 28.1 On pose $F=\frac{1}{X^3(X+1)}$. On cherche la partie polaire G de F associée à 0.

Il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $G=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X^3}$.

On a $c=\widetilde{X^3F}(0)=1$. De plus, $H=F-\frac{1}{X^3}=-\frac{1}{X^2(X+1)}$ donc $b=\widetilde{X^2H}(0)=-1$.

De même, $I=H+\frac{1}{X^2}=\frac{1}{X(X+1)}$ donc $a=\widetilde{XI}(0)=1$.

Donc $G=\frac{1}{X}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^3}$.

28.1.3 Décomposition en éléments simples

<u>Théorème 28.1</u> *Soit $F\in\mathbb{K}(X)\setminus\mathbb{K}[X]$ à dénominateur scindé.*

On écrit :
$$F=\frac{A}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X-\lambda_i)^{k_i}}$$

On note P la partie entière de F. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $(a_{1,j} \cdots, a_{k_j,j}) \in \mathbb{K}^{k_j}$ tel que

$$F = P + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k_j} \frac{a_{i,j}}{(X-\lambda_j)^i}$$

et l'écriture est unique.

Exemple 28.2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé et non constant. On écrit $P = \mu\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{k_i}$.

On a $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{X-\lambda_i}$.

28.2 En pratique

28.2.1 Méthode

1. On calcule la partie entière
2. On factorise le dénominateur
3. On écrit la forme a priori de la décomposition
4. On utilise les symétries pour trouver des relations
5. On détermine les cœfficients manquants

28.2.2 Exemple

On pose $F = \frac{X^8+X^2+1}{X^7+2X^5+X^3}$.

- La partie entière est X et le dénominateur se factorise en :

$$X^3(X+i)^2(X-i)^2$$

- Il existe donc un unique $(a, b, c, d, e, f, g) \in \mathbb{C}^7$ tel que ;

$$F = X + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X-i} + \frac{e}{(X-i)^2} + \frac{f}{X+i} + \frac{g}{(X+i)^2}$$

- On teste les symétries habituelles $F(-X) = F$ et $F(-X) = -F$. Ici, $F(-X) = -F$ donc par unicité du DES, $b = -b$, $d = f$, $g = -e$.
- On a aussi $\overline{F} = F$ donc $\overline{a} = a$, $\overline{c} = c$, $\overline{a} = f$ et $\overline{e} = g$.
- Enfin, la partie entière de $\frac{XR}{X^7+2X^5+X^3}$ vaut la somme des cœfficients pénibles à calculer : ici, $-2 = a + d + f$ donc $a + 2 = -2d$.

- De plus, $c = \widetilde{X^3F}(0) = 1$. De plus,

$$F - \frac{1}{X^3} = \frac{X^6 - X^2 - 1}{X(X^4 + 2X^2 + 1)}$$

Donc $b = 0$, $a = -1$, $d = f = -\frac{1}{2}$.
Enfin, $e = \widetilde{(X-i)^2F}(i) = \frac{1}{4i}$ et $g = e = -\frac{i}{4}$.
Donc

$$F = X - \frac{1}{X} + \frac{1}{X^3} - \frac{1}{2(X-i)} - \frac{i}{4(X-i)^2} - \frac{1}{2(X+i)} - \frac{i}{4(X+i)^2}$$

Remarque 28.2
- *Ne pas oublier la partie entière*
- *Attention, il faut parfois différentier des cas, par exemple avec* $H = \frac{1}{(X-\lambda)(X^2-1)}$, *il faut distinguer* $\lambda = 1$, $\lambda = \pm i$ *ou non.*
- *Garder le reste* R *lors du calcul de la partie entière. En effet, la partie entière de*

$$\frac{R}{X^7 + 2X^5 + X^3}$$

est la somme des parties polaires de F.

28.2.3 Cas des pôles simples

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ admettant un pôle simple λ.
Il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F = \frac{A}{(X-\lambda)B}$.
On pose $C = (X-\lambda)B$. La partie polaire associée λ est $\frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\widetilde{B}(\lambda)(X-\lambda)}$.
On note que $C' = (X-\lambda)B' + B$ donc $\widetilde{C'}(\lambda) = \widetilde{B}(\lambda)$.
Donc la partie entière associée à λ est $\frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\widetilde{C'}(\lambda)(X-\lambda)}$.

28.3 Primitives de fractions rationnelles

Dans le cas complexe, on décompose en éléments simples puis on primitive.

Dans le cas réel, on décompose dans $\mathbb{C}[X]$, on regroupe les parties polaires liées aux pôles complexes simples deux à deux, puis on primitive.

Exemple 28.3 On pose :

$$f : \begin{cases}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x(x-1)(x^2+1)} \end{cases}$$

On note que :

$$\frac{1}{X(X-1)(X+i)(X-i)} = -\frac{1}{X}+\frac{1}{2(X-1)}-\frac{1}{2(i-1)(X-i)}+\frac{1}{2(i+1)(X+i)}$$

Or

$$-\frac{1}{2(i-1)(X-i)}+\frac{1}{2(i+1)(X+i)} = -\frac{(i-1)(X-i)-(i+1)(X+i)}{4(X^2+1)} = \frac{X+1}{2(X^2+1)}$$

Donc :

$$\int f(x)\,dx = -\ln(x)+\frac{\ln(x-1)}{2}+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan(x)+C$$

Exemple 28.4 Primitive de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \end{cases}$$

On pose $F = \frac{X+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$. Sa partie entière est nulle. De plus, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$F = \frac{a}{X-i}+\frac{b}{X+i}+\frac{c}{X-j}+\frac{d}{X-j^2}$$

On a $\overline{F} = F$ donc $\overline{a} = b$ et $\overline{c} = d$.

On trouve $a = (X-i)F(i) = -\frac{1+i}{2}$, $b = \overline{a} = -\frac{1-i}{2}$, $c = (X-j)F(j) = \frac{1-j^2}{3}$ et $d = \overline{c} = \frac{1-j}{3}$.

Donc :

$$\begin{aligned} F &= \frac{i-1}{2(X+i)} - \frac{i+1}{2(X-i)} + \frac{1-j^2}{3(X-j)} + \frac{1-j}{3(X-j^2)} \\ &= \frac{X}{X^2+X+1} + \frac{1-X}{X^2+1} \end{aligned}$$

On trouve

$$\int f(x)\,dx = -\frac{\ln(|x^2+1|)}{2}+\arctan(x)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\ln(|x^2+x+1|)}{2}+c$$

Exemple 28.5 Trouver une primitive de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)^2} \end{cases}$$

On pose $F = \frac{X-1}{(X+1)(X^2+1)^2}$ de partie entière nulle. Il existe un unique (a, b, c, d, e) tel que

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{d}{X+i} + \frac{e}{(X+i)^2}$$

On a $\overline{F} = F$ donc $a = \overline{a}$, $b = \overline{d}$ et $e = \overline{c}$. De plus, $a + b + d = 0$.

On trouve $a = (\widetilde{X+1})F(-1) = -\frac{1}{2}$, $c = (\widetilde{X-i})^2F(i) = -\frac{i}{4}$, $e = (\widetilde{X+i})^2F(-i) = \frac{i}{4}$, $b = \frac{1+i}{4}$ et $d = \frac{1-i}{4}$.

Donc

$$F = -\frac{1}{2(X+1)} + \frac{X-1}{2(X^2+1)} - \frac{i}{4(X-i)^2} + \frac{i}{4(X+i)^2}$$

Donc :

$$\int f(x)\,dx = -\frac{\ln(|1+x|)}{2} + \frac{\ln(1+x^2)}{4} - \frac{\arctan(x)}{2} - \frac{x^2+3}{4(x^2+1)} + C$$

Remarque 28.3 Astuce On peut décomposer dans $\mathbb{R}$ en changeant la forme a priori de la décomposition (on tient compte des termes qui se regroupent).

Par exemple, si $F = \frac{1}{X(X-1)(X^2+1)}$, il existe (a, b, c, d) réels *tels que $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$*

On a de plus $\frac{i-1}{2} = (\widetilde{X^2+1})F(i) = c + id$ donc $d = -c = \frac{1}{2}$. On trouve aussi $a = -1$ et $b = \frac{1}{2}$.

D'où $F = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{X-1}{2(X^2+1)}$.

Exemple 28.6 Calculer une primitive de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \end{cases}$$

Il existe un unique $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$F = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

$ai + b = (\widetilde{X^2+1})F(i) = 1 - i$ donc $a = -1$ et $b = 1$.

$cj + d = (\widetilde{X^2+X+1})F(j) = j$ donc $c = 1$ et $d = 0$.

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 29

Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

29.1 Fonctions logarithmes

Définition 29.1 On appelle logarithme népérien et on note ln la primitive nulle en 1 de la fonction :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Proposition 29.1 Propriétés algébriques

1. pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

Proposition 29.2 Propriétés analytiques

1. ln est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Définition 29.2 Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle logarithme en base a la fonction

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{cases}$$

Pour $a = 10$, cette fonction est notée log.

Proposition 29.3 Les propriétés de ces fonctions découlent de celle de ln. Attention à ne pas oublier le facteur multiplicatif en dérivant !

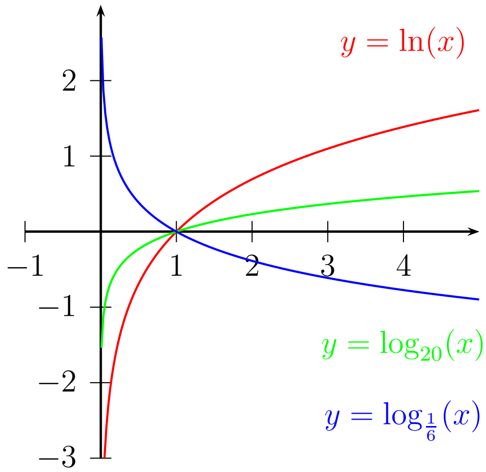


FIGURE 29.1 – Graphe des fonctions logarithmes

Comme ln est une application strictement croissante continue définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et admettant $-\infty$ comme limits en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, elle établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe donc un unique x tel que $\ln(x) = a$.

Définition 29.3 L'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\ln(x) = 1$ est notée e.

29.2 Fonctions exponentielles

Définition 29.4 On appelle fonction exponentielle la réciproque de la fonction ln. L'image de x par cette fonction est notée e^x ou $\exp(x)$.

Proposition 29.4 Propriétés algébriques

1. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$
2. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$

Proposition 29.5 Propriétés analytiques

1. *exp* est dérivable et $\exp' = \exp$.
2. $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Définition 29.5 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle fonction exponentielle de base a la fonction réciproque du la fonction logarithme en base a. Elle est donc définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

L'image d'un réel x par cette fonction est noté $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

Remarque 29.1 Attention à la dérivation !

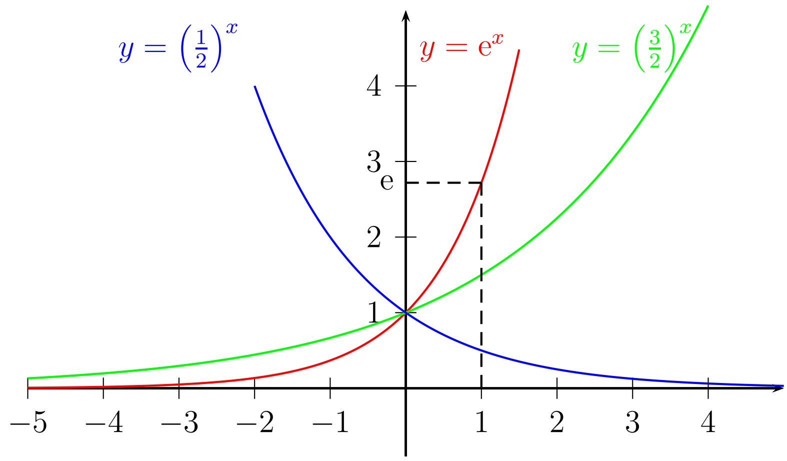


FIGURE 29.2 – Graphe des fonctions exponentielles

Remarque 29.2 Pour manipuler des expressions mettant en jeu des exponentielles et des logarithmes de base différentes on se ramène à une seule base. Dans le cas des équations, on peut conserver deux bases qu'on isole chacune d'un côté avant de passer au logarithme.

Exercice : Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2^{(3^x)}}{3^{(2^x)}}$.

On remarque que :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{3^x \ln(2)}}{\mathrm{e}^{2^x \ln(3)}} = \exp(\ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(3)} - \ln(3)\mathrm{e}^{x\ln(2)}) = \exp(\mathrm{e}^{x\ln(3)}(\ln(2) - \ln(3)\mathrm{e}^{x(\ln(2)-\ln(3))}))$$

La dernière opération consistant à mettre en facteur l'exponentielle prépondérante au voisinage de $+\infty$, repérable puisque toutes les bases sont les mêmes. Sachant que $\ln(3) > \ln(2)$, on n'est plus en présence d'une forme indéterminée et la limite de f en $+\infty$ existe et vaut $+\infty$.

Exercice : Résoudre $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ d'inconnue réelle x.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} &\text{ ssi } 4^x - \frac{1}{\sqrt{3}}3^x = \sqrt{3}3^x - \frac{1}{2}4^x \\ &\text{ ssi } 3\sqrt{3}4^x = 8 \times 3x \\ &\text{ ssi } \ln(3\sqrt{3}) + x\ln(4) = \ln(8) + x\ln(3) \\ &\text{ ssi } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

29.3 Fonctions puissance

Définition 29.6 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance d'ordre a par :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{a\ln(x)} \end{cases}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$.

Proposition 29.6 Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x^y) = y\ln(x)$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x)^y = \mathrm{e}^{xy}$.

Remarque 29.3 Soit p un entier impair. Le cas de la puissance d'ordre $\frac{1}{p}$ pose un problème particulier. En effet, on peut définir cette fonction comme précédemment ou comme la réciproque f de la bijection

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^p \end{cases}$$

La fonction f ainsi construite est définie sur $\mathbb{R}$ entier et coïncide avec la puissance d'ordre $\frac{1}{p}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On l'appelle fonction racine p-ème. En général, afin d'éviter les confusions, la fonction racine p-ème s'écrit $\sqrt[p]{\cdot}$ plutôt que $\cdot^{\frac{1}{p}}$.

Proposition 29.7 Propriétés algébriques

1. Pour tout $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+*)^2 \times \mathbb{R}$, $(xy)^z = x^z y^z$.
2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}_+* \times \mathbb{R}^2$, $x^{y+z} = x^y x^z$.
3. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}_+* \times \mathbb{R}^2$, $(x^y)^z = x^{yz}$.
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction puissance d'ordre a est une bijection (strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante sinon) de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de réciproque la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$.

Proposition 29.8 Propriétés analytiques

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction puissance d'ordre a est dérivable et sa dérivée est :
$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & ax^{a-1} \end{cases}$$
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$.

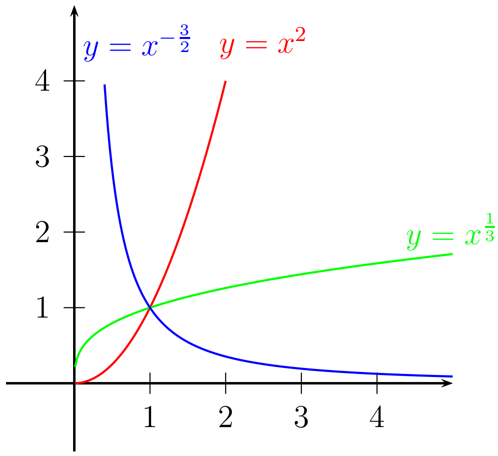


FIGURE 29.3 – Graphe des fonctions puissances

29.4 Comparaison asymptotique des fonctions introduites

Proposition 29.9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{\alpha x} = 0$$

Remarque 29.4 *Cette proposition exprime grossièrement que les exponentielles l'emportent sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes. Ce résultat, même s'il a l'air restrictif, permet de traiter toutes les bases et tous les cas de produits de fonctions du type précédent.*

Même si revenir à l'énoncé exact u théorème est un exercice de style, il faut savoir faire cette opération pour être convaincu de sa légitimité.

Exercice :
Étudier la limite en $+\infty$ de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-3x} x^4 \ln(x)^2 \end{cases}$$

Intuitivement, comme l'exponentielle l'emporte, la limite est 0. Cette rédaction est suffisante en pratique. Pour se ramener aux résultats précédents, il suffit d'écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = (\frac{\ln(x)}{x})^2 (x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})^6$. La proposition précédent assure alors le résultat.

29.5 En combinant toutes les fonctions...

Si f et g sont deux fonctions à variable réelle, la première étant à valeurs strictement positives. On peut considérer la fonction $x \mapsto f(x)^{g(x)}$.

Si f est constante, on est en présence d'une fonction exponentielle. Si g est constante, on est en présence d'une fonction puissance.

En dehors de ces deux cas, la fonction construite n'est ni une exponentielle, ni une puissance et ses propriétés peuvent être très diverses.

Remarque 29.5 La fonction précédente doit impérativement être écrite sous la forme $\mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}$ *avant toute manipulation : dérivation, intégration, recherche de limites...*

Exercice : Montrer que le graphe de la fonction

$$f : \begin{cases}]1,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^t + t - 1 \end{cases}$$

n'admet pas de tangente horizontale.

On remarque que pour tout $t \in]1,+\infty[$, $f(t) = \mathrm{e}^{t\ln(t)} + t - 1$. Sous cette forme, f est clairement dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'(t) = (\ln(t)+1)t^t + 1$$

Comme $f' > 0$, le graphe de f n'admet aucune tangente horizontale.

Chapitre 30

Fonctions trigonométriques

30.1 Équation trigonométrique

30.1.1 Outils de base

Changement de lignes trigonométriques

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\alpha \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin\alpha \\
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(\pi + \alpha) &= -\cos\alpha
\end{aligned}$$

Transformation de + vers ×

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin p - \sin q &= -2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Si p et q ne sont pas nuls, on pose $\lambda = \sqrt{p^2 + q^2}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{p}{\lambda}$ et $\sin\theta = \frac{q}{\lambda}$.

On a alors pour tout réel x :

$$p\sin x + q\cos x = \lambda \sin(x+\theta)$$

30.1.2 Équations trigonométriques

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sin a = \sin b \text{ ssi } a \equiv b[2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b[2\pi]$$

$$\cos a = \cos b \text{ ssi } a \equiv b[2\pi] \text{ ou } a \equiv -b[2\pi]$$

Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}\right)^2$,

$$\tan a = \tan b \text{ ssi } a \equiv b[\pi]$$

Exemple 30.1

- Résoudre l'équation (E_1) : $2\sin(2x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(E_1) \text{ ssi } \sin(2x) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ \text{ssi } 2x &\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]\\ \text{ssi } x &\equiv \frac{\pi}{12}[\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{12}[\pi]\end{aligned}$$

  Donc l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}\\ &= \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

- Résoudre l'équation (E_2) : $\sin(2x) - \cos(3x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(E_2) \text{ ssi } \sin(2x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)\\ \text{ssi } 2x &\equiv \frac{\pi}{2} - 3x[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{\pi}{2} + 3x[2\pi]\\ \text{ssi } x &\equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{\pi}{5}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

  Donc l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Résoudre l'équation (E_3) : $\sin x + \cos x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned}(E_3) \text{ ssi } & \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = 1 \\ \text{ssi } & \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x\right) = 1 \\ \text{ssi } & \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{ssi } & x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \\ \text{ssi } & x \equiv 0[2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$
  Donc l'ensemble des solutions de (E_3) est :
  $$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

30.1.3 Inéquations trigonométriques

On utilise par exemple :
- pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $\sin x > 0$ ssi $x \in]0, \pi[$
- pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x > 0$ ssi $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Exemple 30.2

- Résoudre (E_4) : $2\sin(2x-4) > 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Soit $x \in [2, \pi+2]$. On note que $2x - 4 \in [0, 2\pi]$
  $$\begin{aligned}(E_4) \text{ ssi } & \sin(2x-4) > \frac{1}{2} \\ \text{ssi } & 2x - 4 \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[\\ \text{ssi } & \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{ssi } & x \in \left]\frac{\pi}{12} + 2, \frac{5\pi}{12} + 2\right[\end{aligned}$$
  Donc, en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E_4), on a :
  $$\mathscr{S} \cap [2, \pi+2] = \left]\frac{\pi}{12} + 2, \frac{5\pi}{12} + 2\right[$$
  Comme la fonction $x \mapsto \sin(2x-4)$ est π-périodique,
  $$\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{12} + 2 + k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2 + k\pi\right[$$

- Résoudre (E_5) : $\sin x \geqslant \cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  $$\sin x - \cos(2x) = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

  En lisant sur un cercle trigonométrique, on note que :
  – pour tout $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$
  – pour tout $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0$
  – pour $x = \frac{3\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.
  De même, la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ s'annulle en $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$, prend des valeurs strictement positives sur $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ et strictement négatives sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sin x - \cos(2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

  En combinant les études, on en déduit que pour tout $x \in [0, 2\pi[$,

  $$(E_5) \text{ ssi } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$$

  Comme la fonction $x \mapsto \sin x - \cos(2x)$ est 2π périodique, l'ensemble des solutions de (E_5) est :

  $$\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}\right)$$

- Résoudre (E_6) : $6\sin x + 8\cos x \leqslant 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ et $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Soit $x \in \left]\frac{\pi}{6} - \alpha, \frac{13\pi}{6} - \alpha\right[$.

  $$\begin{aligned}6\sin x + 8\cos x \leqslant 5 &\text{ ssi } \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x \leqslant \frac{1}{2}\\ &\text{ ssi } \sin(\alpha + x) \leqslant \frac{1}{2}\\ &\text{ ssi } x \in \left]\frac{5\pi}{6} - \alpha, \frac{13\pi}{6} - \alpha\right]\end{aligned}$$

Comme $x \mapsto 6\sin x + 8\cos x$ est 2π-périodique, l'ensemble des solutions de (E_6) est :

$$\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{5\pi}{6} - \alpha + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} - \alpha + 2k\pi \right]$$

30.2 Réciproque de certaines restrictions des fonctions trigonométriques

30.2.1 Rappels

Soient (I, J) deux parties de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans J. On dit que f est bijective si et seulement si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

Si f est une bijection, l'application de J dans I, qui à chaque élément de J associe son antécédent par f s'appelle la réciproque de f, notée f^{-1}. f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

De plus, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$.

Remarque 30.1 *L'application f est bijective si et seulement si pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution.*

Exemple 30.3 On considère $f : x \mapsto 3x + 7$.

Soit $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \text{ ssi } 3x + 7 = y \text{ ssi } x = \frac{y-7}{3}$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc une unique solution. Donc f est bijective et $f^{-1} : x \mapsto \frac{x-7}{3}$.

<u>Théorème 30.1</u> *Soit I un intervalle, f une application définie sur I, continue et strictement monotone. On pose $J = \{f(x), x \in I\}$. L'application :*

$$\begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est une bijection.

<u>Théorème 30.2</u> *Soit I un intervalle, f une application définie sur I et dérivable. Si $f' \geqslant 0$, et si f' prend la valeur 0 un nombre fini de fois uniquement, f est strictement croissante.*

<u>Théorème 30.3</u> *Soient (I, J) deux intervalles et f une application de I dans J bijective. Si f est continue, f^{-1} est continue.*

Soit $b \in J$ tel que f soit dérivable en $f^{-1}(b)$. Si $f'(f^{-1}(b)) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en b. Dans le cas contraire, f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Remarque 30.2 *Soient (I, J) deux intervalles, f une application de I dans J dérivable, bijective telle que f' ne s'annule pas. On suppose de plus connaître une fonction h de J dans I telle que $f' = h \circ f$. Dans ce cas, $(f^{-1})' = \frac{1}{h}$.*

Démonstration. On pose :

$$\varphi : \begin{cases} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(f^{-1}(x)) - x \end{cases}$$

φ est dérivable et $\varphi = 0$ donc $\varphi' = 0$.
De plus, pour tout $x \in J$,

$$\varphi'(x) = (f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) - 1 = h(x) \times (f^{-1})'(x) - 1$$

Or $\varphi'(x) = 0$. Donc pour tout $x \in J$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{h(x)}$. ■

30.2.2 Étude de arccos

La restriction de la fonction cos sur $[0, \pi]$, (notée $\cos|_{[0,\pi]}$) à valeurs dans $[-1, 1]$ est bijective. Sa réciproque est appelée arccosinus et notée arccos.

Proposition 30.1
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Démonstration.
- La première propriété découle de la définition.
- Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos(x)) = 1$$

  Donc $|\sin(\arccos x)| = \sqrt{1 - x^2}$.
  Or $\arccos x \in [0, \pi]$ donc $\sin \arccos x \leqslant 0$.
  Finalement, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x = \cos \arccos x$$

  De plus, par définition, $\arccos(-x) \in [0, \pi]$ et $\pi - \arccos x \in [0, \pi]$.
  L'injectivité de $\cos|_{[0,\pi]}$ assure alors le résultat. ■

Remarque 30.3 *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On pose* $y = \arccos(\cos x)$. *On n'a pas* $y = x$, *on recherche* y *en étudiant l'équation* $\cos x = \cos y$ *d'inconnue* $y \in [0, \pi]$.

<u>THÉORÈME 30.4</u> $\arccos$ *est continue, elle n'est pas dérivable en* -1 *ni en* 1.

$\arccos|_{]-1,1[}$ *est dérivable et* $(\arccos|_{]-1,1[})' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration. Soit $x \in]0, \pi[$.

$\cos'(x) = -\sin x$ et $-\sin x \neq 0$ donc $\arccos|_{]-1,1[}$ est dérivable.

De plus, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ et $\sin x > 0$.

Donc $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ et $\cos'(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

On en déduit le résultat. ∎

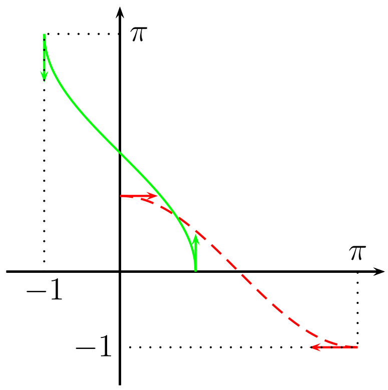


FIGURE 30.1 – Graphe de cos et arccos

30.2.3 Étude de arcsin

La restriction de la fonction sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, à valeurs dans $[-1, 1]$ est bijective (strictement croissante continue sur un intervalle). Sa réciproque est appelée arcsinus et notée arcsin.

Proposition 30.2

- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Remarque 30.4 *Soit* $x \in \mathbb{R}$. $\arcsin(\sin(x))$ *est l'unique solution de l'équation* $\sin(y) = \sin(x)$ *d'inconnue* $y \in [-frac\pi 2, \frac{pi}{2}]$, *ie l'unique élément* $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *tel que* $x - y$ *ou* $x + y - \pi$ *soit multiple de* 2π.

En particulier, on retrouve que $\arcsin(\sin(x)) = x$ *pour tout* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

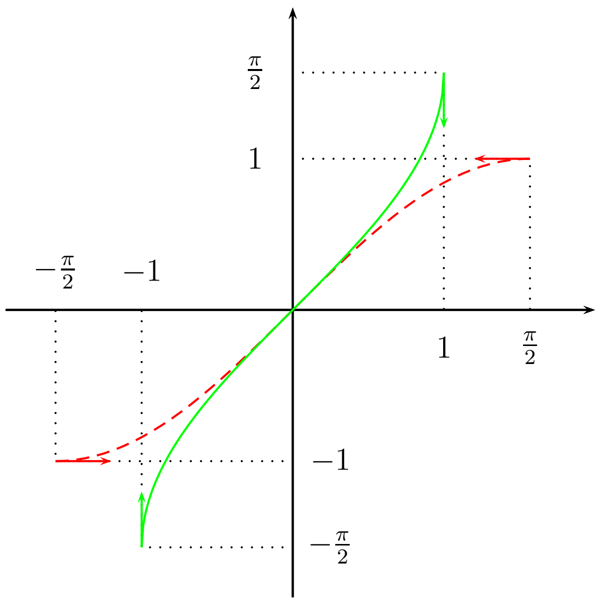


FIGURE 30.2 – Graphe de sin et arcsin

<u>THÉORÈME 30.5</u> $\arcsin$ *est continue, elle n'est pas dérivable en* -1 *ni en* 1.

$\arcsin|_{]-1,1[}$ *est dérivable et* $(\arcsin|_{]-1,1[})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

30.2.4 Étude de arctan

La restriction de la fonction tan sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bijective (strictement croissante continue sur un intervalle). Sa réciproque est appelée arctangente et notée arctan.

Proposition 30.3

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Remarque 30.5 *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$\arctan(\tan(x))$ *est l'unique élément* $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $x - y$ *soit multiple de* π.

En particulier, on retrouve que $\arctan(\tan(x)) = x$ *pour tout* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

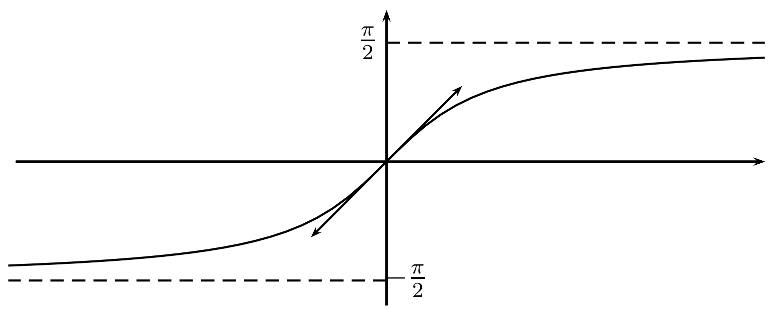


Figure 30.3 – Graphe de arctan

Théorème 30.6 arctan *est dérivable et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Chapitre 31

Fonctions hyperboliques

31.1 Fonctions hyperboliques directes

31.1.1 Définitions

Définition 31.1 On appelle sinus hyperbolique et on note sh la fonction :

$$\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{cases}$$

On appelle cosinus hyperbolique et on note ch la fonction :

$$\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{cases}$$

On appelle tangente hyperbolique et on note th la fonction :

$$\text{th} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \end{cases}$$

<u>Théorème 31.1</u> sh *et* th *sont impaires.* ch *est paire. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{4} = 1$$

■

Remarque 31.1 (recette de cuisine) Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à exprimer $\operatorname{ch}(2x)$ *en fonction de* $\operatorname{sh}(x)$*.*

- *On écrit la formule analogue de trigonométrie usuelle :*

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

- *On remplace* $\cos$ *par* ch*,* $\sin$ *par* $i \times \operatorname{sh}$ *et* $\tan$ *par* $i \times \operatorname{th}$.
- *On simplifie les complexes :*

$$\operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(x)$$

- *On démontre en remplaçant* ch*,* sh *et* th *par leur forme exponentielles.*

Proposition 31.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) = \mathrm{e}^x$ et $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

31.1.2 Linéarisation, factorisation et sommes

Linéarisation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^2(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\operatorname{sh}(3x)}{4} + \frac{\operatorname{sh}(x)}{4}\end{aligned}$$

Factorisation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{3x} = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^3 = \operatorname{ch}^3(x) + 3\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}(x) + 3\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}^3(x)$$

$$e^{-3x} = (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))^3 = \operatorname{ch}^3(x) - 3\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}(x) + 3\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{sh}^3(x)$$

Donc :

$$\operatorname{ch}(3x) = \operatorname{ch}^3(x) + 3\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^2(x)$$

Somme

Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k$$

Si $x = 0$, $S_n = n + 1$.
Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^0}{2(\mathrm{e}^x - 1)} + \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^0}{2(\mathrm{e}^{-x} - 1)} \\ &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

31.1.3 Dérivabilité et limites

<u>Théorème 31.2</u> sh *est dérivable et* $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.
ch *est dérivable et* $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
th *est dérivable et* $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.

<u>Théorème 31.3</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} = 1$$

Démonstration. ch est dérivable en tant que combinaison linéaire de fonctions qui le sont.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$ donc $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$
De même, sh et th sont dérivables et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{th}' = \frac{1}{ch} = 1 - \operatorname{th}^2$.
Par construction, $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} = +\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-2x})}$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} = 1$. ∎

31.2 Fonctions hyperboliques réciproques

31.2.1 Construction de Argch

La restriction de la fonction ch sur $\mathbb{R}^+$ est bijective (strictement croissante continue sur un intervalle) d'image $[1, +\infty[$. Sa réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée Argch.

Proposition 31.2
- Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argch} x) = x$.
- Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}(x)) = |x|$.

Démonstration.
- Définition de Argch.
- Soit $x \in [1, +\infty[$.
  $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch}(x)) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh}(x)) = 1$ donc $\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch}(x)) = x^2 - 1$. Comme $\operatorname{Argch}(x) \geqslant 0$ et $\operatorname{sh} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x| \geqslant 0$ donc $\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}(|x|)) = |x|$. La parité de ch assure alors $\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}(x)) = |x|$. ■

Proposition 31.3 Propriétés analytiques Argch est continue, dérivable en tout point de $]1, +\infty[$ mais pas en 1.

Pour $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$(\operatorname{Argch}|_{]1,+\infty[})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

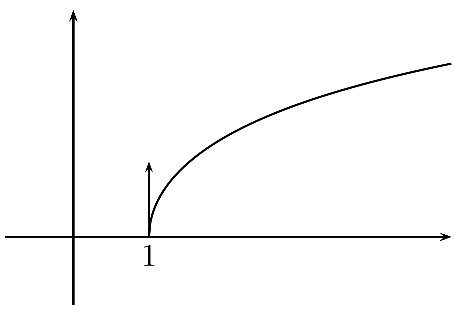


FIGURE 31.1 – Graphe de Argch

31.2.2 Construction de Argsh

La fonction sh est bijective (strictement croissante continue sur un intervalle) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée Argsh.

Proposition 31.4
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$.
- Argsh est impaire.

Proposition 31.5 Propriétés analytiques Argsh est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

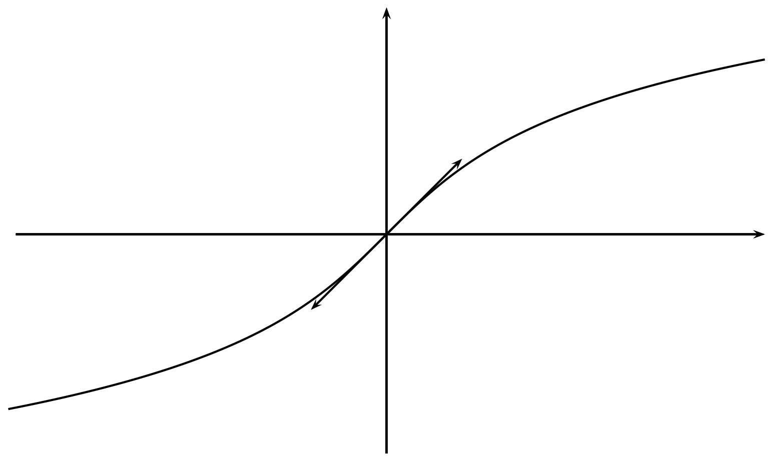


Figure 31.2 – Graphe de Argsh

31.2.3 Construction de Argth

La fonction th est bijective (strictement croissante continue sur un intervalle) de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. Sa réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et notée Argth.

Proposition 31.6

- Pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{th}(\operatorname{Argth} x) = x$.
- Pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argth} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{sh}(\operatorname{Argth} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argth}(\operatorname{th}(x)) = x$.
- Argsh est impaire.

Proposition 31.7 Propriétés analytiques Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

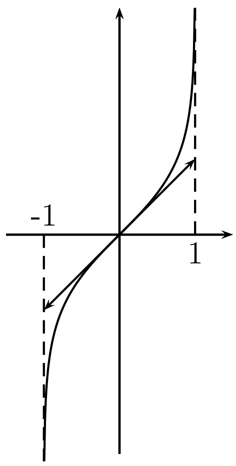


Figure 31.3 – Graphe de Argth

Chapitre 32

Suites

32.1 Vocabulaire sur les suites réelles

32.1.1 Vocabulaire

Définition 32.1 On étudie les suites réelles, ie les familles d'éléments de $\mathbb{R}$ dont l'ensemble, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est muni de deux lois de composition interne et d'une loi de composition externe à domaine d'opérateur $\mathbb{R}$, en posant, pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Proposition 32.1 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif. Les éléments inversibles pour la multiplication sont exactement les suites dont aucun terme n'est nul. Remarquons qu'il existe des suites réelles u et v non nulles telles que $uv = 0$.

Définition 32.2 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

1. croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
2. décroissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$
3. monotone ssi elle est croissante ou décroissante
4. strictement croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$
5. strictement croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$
6. strictement monotone ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante

Définition 32.3 On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

1. majorée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
2. minorée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant M$.
3. bornée ssi $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

32.1.2 Deux exemples

Définition 32.4 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle suite arithmétique de raison a et de premier terme b la suite $(b+na)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 32.2

$$\sum_{p=0}^{n}(b+pa) = (n+1)b + \frac{an(n+1)}{2}$$

Définition 32.5 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle suite géométrique de raison a et de premier terme b la suite $(ba^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 32.3 Si $a = 1$,

$$\sum_{p=0}^{n} ba^p = (n+1)b$$

Sinon,

$$\sum_{p=0}^{n} ba^p = \frac{b(a^{n+1}-1)}{a-1}$$

32.1.3 Propriétés locales

Les propriétés énoncées précédemment ne sont pas souvent utilisées sous cette forme. En effet, on étudie souvent les propriétés asymptotiques d'une suite : les premières valeurs de la suite n'interviennent pas.

Plutôt que tester une propriété sur tous les termes d'une suite réelle, on se contente souvent de la tester pour tous les indices assez grands.

Proposition 32.4 Une suite réelle est majorée (resp. minorée, bornée) à partir d'un certain rang ssi elle est majorée (resp. minorée, bornée).

Proposition 32.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si elle est majorée, elle l'est ultimement. Réciproquement, si elle est majorée à partir d'un certain rang, il existe $M \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant p$, $u_n \leqslant M$.

On sait alors que u est bornée par $\max(M, u_0, \cdots, u_{p-1})$.

On fait de même pour les cas minorée et bornée.

32.2 Notion de limite

32.2.1 Définition

Définition 32.6 On dit qu'une suite u converge vers un complexe L et on note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Remarque 32.1

- *Écrire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *signifie* u *admet une limite et icelle vaut* l.
- *modifier un nombre fini de termes d'une suite ne modifie pas sa convergence, ni son éventuelle limite.*

Définition 32.7 On dit que u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) ssi

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant M \quad (\text{resp. } \leqslant M)$$

THÉORÈME 32.1 *Soit* u *une suite qui converge vers* $l \in \mathbb{R}$. *Soit* $l' \in \mathbb{R}$.

Si $l' > l$, *alors à partir d'un certain rang,* $u_n < l'$.

Si $l' < l$, *alors à partir d'un certain rang,* $u_n > l'$.

Démonstration du premier point. Comme u converge vers l, $|u - l|$ converge vers 0.

Par définition, à partir d'un certain rang n_0,

$$|u_n - l| \leqslant \frac{l' - l}{2}$$

puisque $\frac{l'-l}{2} > 0$.

Donc $u_n - l \leqslant \frac{l'-l}{2}$ et $u_n \leqslant \frac{l'+l}{2} < l'$. ∎

Applications :

- Toute suite réelle admettant une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.
- Toute suite convergente est bornée (puisqu'à partir d'un certain rang, $l - 1 < u_n < l + 1$).

Remarque 32.2 *Une suite qui diverge vers* $+\infty$ *est non majorée et minorée.*

Une suite qui diverge vers $-\infty$ *est non minorée et majorée.*

THÉORÈME 32.2 *Une suite réelle admet au plus une limite.*

Remarque 32.3 Soit f une fonction algébrique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit u une suite et $v = f(u)$.

On peut passer les propriétés d'existence et de calcul de u vers v. Dans l'autre sens, seul le calcul passe.

Exemple 32.1 Soit u une suite ne prenant pas la valeur 4 et v définie par $v_n = \frac{2u_n-1}{u_n-4}$ pour tout n.

On suppose que v converge vers L.

Si $L \neq 2$, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 2$.

On a donc $u_n = \frac{4v_n-1}{v_n-2}$ et u converge vers $\frac{4L-1}{L-2}$.

Si $L = 2$, alors $u_n(v_n - 2) = 4v_n - 1$ donc u n'est pas bornée.

32.2.2 Formes indéterminées

Exemple 32.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n^3+n+1}{n^3+1}$.

On a $u_n = \frac{n^3(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^3(1+\frac{1}{n^3})}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

<u>Théorème 32.3</u> *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n\alpha}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n!} = 0$$

Démonstration. $(\frac{\mathrm{e}^\alpha}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc il existe p tel que pour tout $q > p$, $\frac{\mathrm{e}^\alpha}{q} < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p + 2$.

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n!} = \prod_{q=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{q} = \left(\prod_{q=1}^{p} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{q}\right) \underbrace{\left(\prod_{q=p+1}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{q}\right)}_{\leqslant 1} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{n}$$

Donc pour $n \geqslant p + 2$, $0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n!} \leqslant \left(\prod\limits_{q=1}^{p} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{q}\right) \frac{\mathrm{e}^\alpha}{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n!} = 0$. ∎

Exemple 32.3 Pour tout n, on pose $u_n = \frac{n\ln(n)+\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}}{n^7+3}$.

On a $u_n = \frac{\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}}{n^7} \times \frac{n\ln(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}+1}{1+\frac{3}{n^7}}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple 32.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{4}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = (n+1)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}\right) = (n+1)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \left(\frac{n^3}{(n+1)^4}\right)^{\frac{1}{12}}\right)$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 32.5 On pose $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

Soit $\varepsilon > 0$ et n tel que $n \geqslant E(\frac{1}{\varepsilon})$.

$E(\frac{1}{\varepsilon}) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $n + 1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Donc $\left|\frac{1}{n+1}\right| \leqslant \varepsilon$.

Donc pour tout $n \geqslant E(\frac{1}{\varepsilon})$, $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarque 32.4 *On montre de même que pour tout $a > 0$, $(n^a)_n$ diverge vers $+\infty$ et $(\frac{1}{n^a})_n$ converge vers 0.*

Pour tout $a > 1$, $(a^n)_n$ diverge vers $+\infty$ et $(a^{-n})_n$ converge vers 0.

32.3 Stabilité de la notion de limite

32.3.1 Théorème

<u>Théorème 32.4</u> *Si u converge vers L et v vers L' alors $u+v$ converge vers $L + L'$ et uv vers LL'.*

De plus, si $L \neq 0$, $\frac{1}{u}$ est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{1}{L}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$ et $|v_n - L'| \leqslant \varepsilon$.

$$|u_n + v_n - (L + L')| \leqslant |u_n - L| + |v_n - L'| \leqslant 2\varepsilon$$

Donc $u + v$ converge vers $L + L'$.

$$|u_n v_n - LL'| = |u_n(v_n - L') + L'(u_n - L)| \leqslant (|u_n| + L')\varepsilon$$

Or u converge donc elle est bornée.

D'où la convergence de uv vers LL'.

Si $L \neq 0$, $|u|$ converge vers $|L| \neq 0$ donc à partir d'un certain rang, $|u_n| \geqslant \frac{|L|}{2}$.

En particulier, à partir de ce rang $u_n \neq 0$.

Enfin à partir d'un certain rang,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|u_n - L|}{|u_n||L|} \leqslant \frac{\varepsilon}{|u_n||L|} \leqslant \frac{2\varepsilon}{|L|^2}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{L}$. ■

32.3.2 Récapitulatif

Limite d'une somme

Soit u et v convergeant vers L et L' dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On peut conclure quand à la convergence et la limite de $u+v$ ssi on peut sommer L et L' dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ie $|L| = |L'| = +\infty$ et $LL' = -\infty$).

$L' \backslash L$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indef.
$-\infty$	$-\infty$	indef.	$-\infty$

FIGURE 32.1 – Limite d'une somme

Remarque 32.5 *Si u converge et v diverge alors $u+v$ diverge.*

Limite d'un produit

On sait conclure sauf quand l'une des suite tend vers 0 et l'autre vers $\pm\infty$.

$L' \backslash L$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_-^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_+^*$	LL'	LL'	0	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_-^*$	LL'	LL'	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	indef.	indef.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indef.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	indef.	$-\infty$	$+\infty$

FIGURE 32.2 – Limite du produit

Remarque 32.6 *Si u et v sont des suites d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, pour étudier $(u_n^{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$, il faut impérativement étudier la suite $(v_n \ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et utiliser les propriétés de la fonction exponentielle.*

Sinon, on peut tomber sur des formes indéterminées du type 1^∞.

Limites d'un quotient

Si $L' \neq 0$, $\frac{u}{v}$ est bien définie à partir d'un certain rang et on sait conclure sauf quand les suites divergent vers $\pm\infty$.

$L' \backslash L$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_-^*$	$\frac{L}{L'}$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	indef.	indef.
$-\infty$	0	indef.	indef.

FIGURE 32.3 – Limites d'un quotient

On ne peut rien dire en général quand $L' = 0$ pour la suite $\frac{1}{v}$. Il n'est même pas certain que cette suite soit définie.

Si elle l'est à partir d'un certain rang, le seul point qu'on peut prouver est que $\frac{1}{|v|}$ diverge vers $+\infty$. (Prendre $v = (\frac{(-1)^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$).

Remarque 32.7 Si u converge vers une limite non nulle et v diverge alors uv diverge.

32.4 Comparaison asymptotique de suites

32.4.1 Définition et exemples

<u>Définition 32.8</u> Soit u et v deux suites telle que v ne s'annule pas.

- On dit que u est négligeable devant v et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u = o(v)$ ssi $\frac{u}{v}$ converge vers 0.
- On dit que u est dominée par v et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u = O(v)$ ssi $\frac{u}{v}$ est bornée.
- On dit que u et v sont équivalentes et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou $u \sim v$ ssi $\frac{u}{v}$ converge vers 1.

Remarque 32.8

- *Avec $l \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ssi $u \sim l$.*
- *Rien n'est équivalent à 0.*

Proposition 32.6

- Si $u \sim v$ alors $v \sim u$
- Si $u \sim v \sim w$ alors $u \sim w$
- Si $u \sim v$ et $v > 0$ ultimement, alors u aussi

Proposition 32.7 Soit u, v, w, z ne prenant pas la valeur 0 à partir d'un certain rang.

- Si $u \sim v$ et $w \sim z$ alors $uw \sim vz$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, si $u \sim v$ alors $u^\alpha \sim v^\alpha$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $u > 0$ et $v > 0$ ultimement et si $u \sim v$ alors $u^\alpha \sim v^\alpha$.

Proposition 32.8 Soit u convergeant vers 0 et $\alpha \neq 0$.

$$\begin{array}{r|c} \sin(u) \sim u & 1-\cos(u) \sim \frac{u^2}{2} \\ \ln(1+u) \sim u & \mathrm{e}^u - 1 \sim u \\ \mathrm{sh}(u) \sim u & \mathrm{ch}(u) - 1 \sim u \\ (1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u & \end{array}$$

Exemple 32.6 Pour tout n, on pose $u_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.

On a $u_n = n^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$.

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \sim \frac{1}{3n}$ donc $u_n \sim \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 32.9 $u \sim v$ *ssi* $u = v + o(v)$.

De plus, si $u = v + w$ *et* $w = o(v)$ *alors* $u \sim v$.

Exemple 32.7 Pour tout n, on pose $u_n = \cos(\frac{1}{n}) - 1 + \sin(\frac{1}{n})$.

On a $u_n = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n})$

Donc $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$.

32.4.2 Quelques usages courants

Soit u et v deux suites.

Si $u - v$ converge vers 0, $\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v \sim \mathrm{e}^v(u-v)$.

Si $\frac{u}{v}$ converge vers 1, $u^\alpha - v^\alpha \sim \alpha v^{\alpha-1}(u-v)$.

Exemple 32.8 Pour tout n, on pose $u_n = \frac{\mathrm{e}^{(n+\frac{1}{n})^2} - \mathrm{e}^{n^2+2}}{n^n+n^7+1}\cos(\frac{1}{n})$.

Pour tout n, $\mathrm{e}^{(n+\frac{1}{n})^2} - \mathrm{e}^{n^2+2} = \mathrm{e}^{n^2+2}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1)$.

Donc $u_n \sim \frac{\mathrm{e}^{n^2+2}}{n^{n+2}}$ car $\cos(\frac{1}{n}) \sim 1$ et $n^n + n^7 + 1 \sim n^n$.

De plus,

$$\frac{\mathrm{e}^{n^2+2}}{n^{n+2}} = \exp(n^2 + 2 - n\ln(n) - 2\ln(n))$$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 2 - n\ln(n) - 2\ln(n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

32.5 Stabilité vis à vis de l'ordre

Définition 32.9 On dit que $u \leqslant v$ ssi à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

Remarque 32.10 Ce n'est pas une relation d'ordre (antisymétrie).

Théorème 32.5 *Soit* u *et* v *telles que* $u \leqslant v$.

Si u *et* v *convergent alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration. Notons l la limite de u et l' celle de v.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe n_0 à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Il existe n_1 à partir duquel $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon$.

Il existe n_2 à partir duquel $u_n \leqslant v_n$.

Pour $n \geqslant n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, on a

$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant l' + \varepsilon$$

Donc $l - l' < 2\varepsilon$ et $l - l' \leqslant 0$. ■

Remarque 32.11 Les inégalité strictes ne passent pas à la limite.

<u>THÉORÈME 32.6</u> DES GENDARMES *Soit u, v, w des suites telles que $u \leqslant v \leqslant w$.*

Si u et w convergent vers L alors v aussi.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe n_0 à partir duquel $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$.

Il existe n_1 à partir duquel $|w_n - L| \leqslant \varepsilon$.

Il existe n_2 à partir duquel $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Pour $n \geqslant n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, on a

$$L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant L + \varepsilon$$

Donc $|v_n - L| \leqslant \varepsilon$ et v converge vers L. ■

COROLLAIRE 32.1 *Tout réel est limite d'une suite de rationnel.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout n, on pose $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$.

On a $10^n x - 1 < E(10^n x) \leqslant 10^n x$ donc $x - 10^{-n} \leqslant u_n \leqslant x$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$. ■

<u>THÉORÈME 32.7</u> *Soit u et v deux suites telles que $u \leqslant v$.*

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u = -\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v = +\infty$.

Démonstration. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, à partir d'un certain rang, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant M$.

Donc, par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. ■

Exemple 32.9 Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout n, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^\alpha}{n^2+k}$.

Déterminer la limite de u si elle existe.

Pour tout n,

$$n\frac{n^\alpha}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n\frac{n^\alpha}{n^2+1}$$

Donc si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Enfin, si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

32.6 Théorème d'existence de limites

32.6.1 Énoncés

<u>Théorème 32.8</u>

- *Toute suite réelle croissante et majorée converge.*
- *Toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*
- *Toute suite réelle décroissante et minorée converge.*
- *Toute suite réelle décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. Si u est croissante.

- On suppose u majorée.
  L'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Il admet donc une borne supérieure l.
  Soit $\varepsilon > 0$. $l - \varepsilon < l$ donc $l - \varepsilon$ ne majore pas cet ensemble.
  Il existe donc n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant l - \varepsilon$
  Pour $n > n_0$, on a donc $l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l$ (croissance).
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- On suppose u non majorée.
  Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant M$.
  Par croissance, on a le résultat.

Si u est décroissante, on applique le point précédent à $-u$. ∎

32.6.2 Suites adjacentes

<u>Définition 32.10</u> Soit u et v deux suites réelles.

u et v sont dites adjacentes ssi u croît, v décroît et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

Proposition 32.9 Si u et v sont adjacentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

Démonstration. On suppose qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$.

Pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$ et $v_{n_0} \geqslant v_n$.

Donc $u_n - v_n \geqslant u_{n_0} - v_{n_0} > 0$. Or $u - v$ converge vers 0.

Donc $0 > 0$. Contradiction. ∎

<u>THÉORÈME 32.9</u> *Deux suite adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration. On reprend les notations de la définition.

u est croissante majorée par v_0 donc converge.

v est décroissante minorée donc converge.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

D'où le résultat. ∎

Remarque 32.12 *u_n (resp. v_n) est une valeur approchée par défaut (resp. par excès) de la limite commune n avec une précision de $v_n - u_n$.*

COROLLAIRE 32.2 *Soit $(I_n)_n$ une suite de segments emboîtés dont le diamètre tend vers 0.*

Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

32.7 Notion de sous-suite

<u>Définition 32.11</u> On appelle sous-suite de u toute suite v telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

<u>THÉORÈME 32.10</u> *Si une suite u admet une limite l dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors toute sous-suite de u admet l comme limite.*

Démonstration.

Lemme 32.10.1

Soit φ strictement croissante. Alors pour tout n, $\varphi(n) \geqslant n$.

On suppose $l \in \mathbb{R}$ (les autres cas sont analogues).

Soit v une sous-suite de u. Notons φ l'extractrice associée.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u = l$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Si $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ donc $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$ et $\lim v = l$. ∎

Remarque 32.13 *En contraposant, on a un outils pour montre la divergence de suites.*

<u>THÉORÈME 32.11</u> DE BOLZANO-WEIERSTRASS *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

32.8 Suites complexes

32.8.1 Définitions générales

On munit l'ensemble des suites complexes des lois usuelles. $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif. Les éléments inversibles pour la multiplication sont exactement les suites dont aucun terme n'est nul. Remarquons qu'il existe des suites non nulles u et v telles que $uv = 0$.

Définition 32.12 Soit u une suite complexe. On appelle partie réelle (resp. partie imaginaire, conjuguée) de u et on note $\Re(u)$ (resp. $\Im(u)$, $\overline{u}$) la suite $(\Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$).

Définition 32.13 Une suite u est bornée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n| \leqslant M$.

32.8.2 Limite d'une suite complexe

Définition 32.14 On dit qu'une suite complexe u converge vers un complexe L et on note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Remarque 32.14

- *u converge vers L ssi $u - L$ converge vers 0.*
- *Une suite convergente est bornée*
- *On ne change pas la nature d'une suite ni la valeur de sa limite en changeant un nombre fini de termes de cette suite.*
- *Il y a unicité de la limite d'une suite convergente.*

Proposition 32.10 Soit u une suite complexe et $L \in \mathbb{C}$. La suite u converge vers L ssi $\Re(u)$ et $\Im(u)$ convergent vers $\Re(L)$ et $\Im(L)$ respectivement.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si u converge vers L, comme $|\Re(u)-\Re(L)| \leqslant |u-L|$ et $|\Im(u)-\Im(L)| \leqslant |u - L|$ et que $u - L$ converge vers 0, on a le résultat.

$\Leftarrow$ On a $u - L = \Re(u) - \Re(L) + i(\Im(u) - \Im(L))$ donc

$$|u - L| \leqslant |\Re(u) - \Re(L)| + |\Im(u) - \Im(L)|$$

D'où le résultat. ∎

Proposition 32.11 Si u converge vers L alors $|u|$ converge vers $|L|$.

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire, $||u|-|L|| \leqslant |u-L|$, ce qui assure le résultat. ■

Remarque 32.15 La contraposée est souvent utile pour prouver les divergences de suites complexes.

Exercice : Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la suite $u = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $|z| > 1$, la suite réelle $|u|$ diverge vers $+\infty$. La contraposée de la proposition précédente assure que u diverge.

Si $|z| < 1$, la suite réelle $|u|$ converge vers 0 donc par définition u converge vers 0.

Si $|z| = 1$, on a $|z^{n+1} - z^n| = |z^n||z-1| = |z-1|$ donc si u converge, alors $z = 1$. Réciproquement, si $z = 1$, u converge.

D'où a convergence ssi $z = 1$ ou $|z| < 1$.

Proposition 32.12 Les théorèmes de stabilité de la notion de limite se généralisent sans problème.

32.9 Suites récurrentes

32.9.1 Présentation

Soit $U \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

On définit une suite réelle par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On se pose trois problèmes :
- La définition est-elle licite ?
- Y a-t-il convergence ?
- Peut-on la calculer ?

32.9.2 Correction

Si f est à valeurs dans U alors u est correctement définie.

Exemple 32.10 Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la suite u vérifiant $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n-1}$ est correctement définie.
- Si $a = 1$, la suite n'est pas correctement définie.
- On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{cases}$$

On résout $f(x) = 1$ d'inconnue x.
Cette équation n'a pas de solution donc $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Si $a \neq 1$, la suite est donc correctement définie.

Exemple 32.11 On définit $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$.

Soit $a > 0$. On suppose qu'il existe u qui marche.

On définit x par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \exp(x_n) \end{cases}$.

Par convexité, $x_{n+1} \geqslant x_n + 1$ donc par récurrence, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

On en déduit que $\{p \in \mathbb{N}, a < x_p\}$ est non vide donc il admet un plus petit élément p. On a $x_{p-1} \leqslant a < x_p$.

Une récurrence finie assure que pour tout $q \in [\![0, p-1]\!]$, $x_{p-1-q} \leqslant u_q < x_{p-q}$.

En particulier, $u_{p-1} \in]0, 1[$ et $u_p < 0$. Contradiction.

32.9.3 Étude asymptotique

Existence puis calcul

Lemme 32.11.1
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

On pose u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Si pour tout $x \in A$, $f(x) \geqslant x$, alors u est croissante.
2. Si pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant x$, alors u est décroissante.
3. Si f est croissante, u est monotone.
4. Si f est décroissante, $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens contraire.

Démonstration.

1. Par récurrence.
2. Considérer $-f$.
3. On suppose $u_0 \leqslant u_1$. On a alors par récurrence la croissance de u. De même, si $u_0 \geqslant u_1$, on a sa décroissance.
4. Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante et les suites définie à l'aide de $f \circ f$ sont $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui sont alors l'objet de 3. ■

Remarque 32.16 Ce lemme permet de montrer l'existence d'une limite, qui se trouve parmi : les points de bord de A, les points de discontinuité de f et les points fixes de f.

Existence et calcul

<u>**Définition 32.15**</u> Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

- Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que f est M-lipschitzienne ssi pour tout $(x, y) \in A^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
- On dit que f est lipschitzienne ssi il existe M tel que f soit M-lipschitzienne.
- On dit que f est contractant ssi il existe $M \in]0, 1[$ tel que f soit M-lipschitzienne.

Remarque 32.17

- *Une fonction lipschitzienne est continue.*
- *L'ensemble des fonctions lipschitzienne est stable par addition, composition et multiplication par un scalaire.*

Proposition 32.13 Une fonction dérivable à dérivée bornée est lipschitzienne, de même qu'une fonction C^1 sur un segment.

Proposition 32.14 Si f est contractante, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge géométriquement vers un point fixe de f.

Démonstration. On a $|u_{n+1} - L| \leqslant M|u_n - L|$ donc $|u_n - L| \leqslant M^n|u_0 - L|$ avec L tel que $f(L) = L$. ■

Exemple 32.12 Soit I un intervalle, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et L tel que $f(L) = L$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$, la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers L.

- On pose $c = \frac{|f'(L)|+1}{2}$. Comme $|f'|$ est continue en L et $c > |f'(L)|$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$, $|f'(x)| \leqslant c$. Par inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$.
- Soit $x \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$.

$$|f(x) - L| = |f(x) - f(L)| \leqslant c|x - L| \leqslant c\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

  Donc $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ est stable par f.
- Soit $a \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$. On définit u comme précédemment.
  Comme $f([L - \varepsilon, L + \varepsilon]) \subset [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$, $u \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]^{\mathbb{N}}$.
  On montre comme précédemment que $|u_n - L| \leqslant c^n|a - L|$.
  Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

32.9.4 Deux exemples

Exemple 32.13 Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

On pose :

$$f : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2x+3} \end{cases}$$

- Soit $x \in I$.

$$f(x) = x \text{ ssi } x^2 = 2x + 3 \text{ et } x \geqslant 0 \text{ ssi } x = 3$$

  Comme f est continue sur un fermé, la seule limite possible est 3.
- On suppose $u_0 \in [-\frac{3}{2}, 3]$. Comme $f([-\frac{3}{2}, 3]) \subset [0, 3]$, $u \in [0, 3]^{\mathbb{N}}$.
  De plus, sur cet intervalle $f \geqslant \mathrm{Id}$ donc u est croissante majorée donc converge vers la seule limite possible ie 3.
- On suppose $u_0 \in [3, +\infty[$.
  Cet intervalle est stable par f et dessus, $f \leqslant \mathrm{Id}$ donc u est décroissante minorée donc converge encore vers 3.

Exemple 32.14 Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4 - u_n^2}{3} \end{cases}$$

On pose :

$$f : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4 - x^2}{3} \end{cases}$$

- Les limites finies potentielles sont -4 et 1.
- Si $u_0 \in]-\infty, -4[$.
  Comme $f(]-\infty, -4[) \subset]-\infty, -4[$ et que $f \leqslant \mathrm{Id}$ sur cet intervalle, u est décroissante donc admet une limite dans $[-\infty, u_0]$ avec $u_0 < 4$ donc $\lim u = -\infty$.
- Si $u_0 \in]-4, 0]$, on suppose que $u \in]-4, 0]^{\mathbb{N}}$ et $f \geqslant \mathrm{Id}$ sur cet intervalle, u est croissante donc converge vers un élément de $[u_0, 0]$. Or $1 \notin [u_0, 0]$ et $-4 \notin [u_0, 0]$ donc contradiction et il existe $u_n \notin]-4, 0]$.
  L'ensemble $\{p \in \mathbb{N}, u_p \notin]-4, 0]\}$ est non vide donc il admet un plus petit élément q ie $u_q \notin]-4, 0]$ et $u_{q-1} \in]-4, 0]$.

Or $f(]-4,0]) \subset]-4,\frac{4}{3}]$ donc $u_q \in [0,\frac{4}{3}] \subset [0,2]$. On se ramène donc aux cas suivants.

- On considère une suite $v \in [0,2]^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(f(v_n))$. Les points fixes de $f \circ f$ sont 1 et -4.
  $[0,2]$ est stable par f donc par $f \circ f$. $f \circ f$ est croissante sur $[0,2]$ donc v est monotone bornée donc converge vers la seule limite potentielle de $[0,2]$ ie 1.
- On suppose $u_0 \in [0,2]$. $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ vérifient les hypothèses du premier point donc convergent vers 1 et u converge vers 1.
- En notant que $f(]2,4[) \subset]-4,0[$ et $f(]4,+\infty[) \subset]-\infty,-4[$

Pour conclure,

- Si $|u_0| > 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- Si $|u_0| < 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
- Si $|u_0| = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$

Chapitre 33

Fonctions d'une variable réelle – Vocabulaire

33.1 Définitions générales

Définition 33.1 Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On appelle fonction réelle d'une variable réelle de domaine de définition E toute application de $E \to \mathbb{R}$.

Remarque 33.1 On rappelle que la donnée de l'ensemble de définition d'une fonction est aussi importante que la donnée de l'expression de la fonction, d'où les notions de restriction et prolongement d'une fonction.

Par la suite, on supposera les fonctions définies sur un espace non vide. Ainsi $E \neq \varnothing \neq F$.

33.1.1 Opérations sur les fonctions réelles

On munit $\mathbb{R}^E$ des lois $+, \cdot, \times$ définies par :

$$f+g : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{cases}, fg : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{cases} \text{ et } \lambda f : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{cases}$$

Proposition 33.1

- $(\mathbb{R}^E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et $(\mathbb{R}^E, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- Les fonctions inversibles pour la multiplication sont celles qui ne s'annulent pas.
- Il existe f et g non nulles telles que $fg = 0$.

Exemple 33.1 Soit f et g deux fonctions complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $f^2 = g^2$. Alors on ne peut pas déduire que $f = \pm g$ comme dans $\mathbb{R}$!

On peut seulement affirmer que $(f-g)(f+g)=0$, et on ne peut alors plus rien dire : $(\mathbb{R}^E,+,\times)$ n'est pas intègre.

Par exemple, $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto |x|$ vérifient $f^2 = g^2$ mais $f \neq \pm g$.

Définition 33.2 On définit la composition de deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$ avec E, F, G des parties de $\mathbb{R}$ par :

$$g \circ f : \begin{cases} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$$

Proposition 33.2 Soient f et g définies sur $E \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h : F \to E$.

- $(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$
- $(\lambda f) \circ h = \lambda (f \circ h)$
- $(fg) \circ h = (f \circ h)(g \circ h)$
- Si f ne s'annule pas, $(\frac{1}{f}) \circ h = \frac{1}{f \circ h}$

33.1.2 Relation d'ordre sur les fonctions réelles

Définition 33.3 On munit l'ensemble $\mathbb{R}^E$ d'une relation d'ordre partiel en posant, pour tout $f, g : E \to \mathbb{R}$, $f \leqslant g$ ssi pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Proposition 33.3 Cette relation d'ordre est compatible avec les lois $+$ et $\times$ ie pour tout $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ tel que $f \leqslant g$, $f + h \leqslant g + h$ et pour tout $f, g : E \to \mathbb{R}$ tel que $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$ alors $fg \geqslant 0$.

Remarque 33.2

- *La relation d'ordre étant partielle, le résultat de la comparaison de deux fonctions ne peut pas être un critère de discussion. Ainsi, si f et g sont deux fonctions réelles définies sur une partie E de $\mathbb{R}$ sur lesquelles on veut obtenir une propriété (P), prouver (P) lorsque $f \leqslant g$ puis lorsque $f \geqslant g$ ne sert à rien car il reste à traiter le cas où f et g ne sont pas comparables. L'expérience montre que prouver ce dernier cas prouve les deux premiers, rendant la discussion caduque.*
- *Contrairement à ce qui se passe sur $\mathbb{R}$, la négation de $f \leqslant g$ n'est pas $f > g$. En effet, on nie une assertion universelle : pour tout x, $f(x) \leqslant g(x)$ donc on obtient une assertion existentielle : il existe x tel que $f(x) > g(x)$.*

Définition 33.4 Soit f et g deux fonctions réelles définies sur E. On définit plusieurs fonctions par, pour tout $x \in E$,

$$\sup(f,g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\}, \quad \inf(f,g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

33.2 Problèmes de symétrie

Définition 33.5 Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Une fonction réelle f définie sur E est dite périodique de période T ou T-périodique ssi pour tout $x \in E$, $f(x+T) = f(x)$.

Remarque 33.3

- *Si f est périodique de période $T \neq 0$, son graphe, tracé dans un repère $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan est invariant par les translations de vecteurs de l'ensemble $\{kT\overrightarrow{i}, k \in \mathbb{Z}\}$.*
- *Pour tout $T \neq 0$, l'ensemble des fonctions T-périodiques est un sev et un sous-anneau de $\mathbb{R}^E$.*
- *On peut montrer qu'une fonction non constante périodique et continue admet une plus petite période strictement positive. Ce point est évidemment faux pour les fonctions constantes, et pour les fonctions continues, l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ fournit un parfait contre-exemple puisque tout élément de $\mathbb{Q}$ non nul est période d'icelle.*

Définition 33.6 Une fonction réelle f définie sur E est dite paire ssi pour tout $x \in E$, $-x \in E$et $f(-x) = f(x)$.

De même, elle est dite impaire ssi pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 33.4

- *Si f est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. L'ensemble des fonctions paires définies sur E est un espace vectoriel.*
- *Si f est impaire, son graphe est symétrique par rapport au centre du repère. L'ensemble des fonctions impaires définies sur E est aussi un espace vectoriel.*
- *Plus généralement, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $2a-x \in E$ et $f(2a-x) = f(x)$ alors le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équations $x = a$.*
- *De même, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $2a - x \in E$et $f(2a-x) = -f(x)$ alors les graphe de f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(a, 0)$.*

Exemple 33.2 Réduire le domaine d'étude de $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \geqslant \cos(4x)$.

La fonction $f : x \mapsto \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - \cos(4x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, π-périodique et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\frac{\pi}{4} - x) = -f(x)$.

Son graphe, tracé dans le repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donc invariant par translation de vecteur $\pi\overrightarrow{i}$ et présente un centre de symétrie au point de coordonnées $(\frac{\pi}{8}, 0)$. On peut donc étudier l'équation sur $[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}]$.

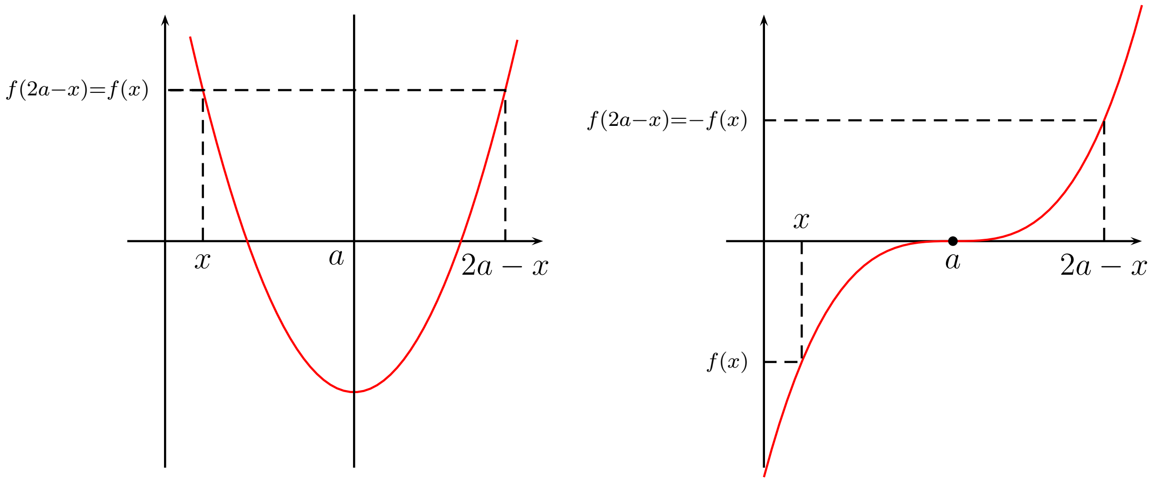


FIGURE 33.1 – Parité et imparité

Exemple 33.3 On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln\left(\dfrac{t+1}{t-4}\right) \end{cases}$$

Pour tout t où cela a un sens, calculer $f(3-t)$ et donner un domaine d'étude de f.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus [-1,4]$. Pour tout t dans cette union d'intervalles, on a $f(3-t) = -f(t)$. Il s'ensuit que le graphe de f, tracé dans un repère orthonormé admet un centre de symétrie en $(\frac{3}{2}, 0)$.

On étudie donc f sur $]4,+\infty[$.

33.3 Variations d'une fonction

<u>Définition 33.7</u> Soit f une fonction réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f est croissante (resp. décroissante) ssi pour tout $x, y \in E$, tel que $x \leqslant y$, $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$).
- On dit que f est monotone ssi elle est croissante ou décroissante.
- On dit que f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi pour tout $x, y \in E$, tel que $x < y$, $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).
- On dit que f est strictement monotone ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition 33.4 Soit f et g deux fonctions réelles définie sur E et F tel que $f(E) \subset F$.

Si f et g ont même sens de variation (resp. des sens de variations opposés), alors $g \circ f$ est croissante (resp. décroissante).

33.4 Extrema des fonctions

Définition 33.8 Soit f une fonction réelle définie sur E. On dit que cette fonction est :

- majorée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$.
- minorée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant M$.
- bornée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

Proposition 33.5 L'ensemble des fonctions de $E \to \mathbb{R}$ bornées est un sous-anneau et un sev de $\mathbb{R}^E$. Ce n'est pas le cas des fonctions majorées ou minorées : en toute généralité, seule la somme de fonctions majorée est majorée et idem pour la minoration.

Définition 33.9 Soit f une fonction réelle définie sur E est majorée (resp. minorée). La borne supérieure (resp. borne inférieure) de $f(E)$ existe et est appelée borne supérieure (reps. inférieure) de f et notée $\sup\limits_E f$ ou $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ (resp. $\inf\limits_E f = \inf\limits_{x \in E} f(x)$).

Définition 33.10 Soir $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) en $a \in E$ ssi pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). On dit que f admet un extremum en a ssi elle admet un maximum ou un minimum en a.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$. f admet un maximum (resp. minimum) ssi $f(E)$ admet un plus grand (resp. plus petit) élément. Cet élément est appelé maximum (resp. minimum) de f et on note $\max\limits_E f = \max\limits_{x \in E} f(x)$ (resp. $\inf\limits_E f = \inf\limits_{x \in E} f(x)$).

Remarque 33.5 Sur les schémas ci-dessous, la nature de l'ensemble V (borné, ouvert, fermé, connexe,...) des valeurs de f ne semble pas dépendre de celle de l'intervalle I de définition.

On constate de plus que f admet une borne supérieure ssi V en a une et f admet un maximum ssi V admet une borne supérieure qui est atteinte : il existe $a \in I$ tel que $f(a) = \sup_I f$. On a les mêmes résultats pour les bornes inférieures et les minima.

Définition 33.11 Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en un point $a \in E$ ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in E \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).

On dit que f admet un extremum local en a ssi elle admet un maximum local ou un minimum local en a.

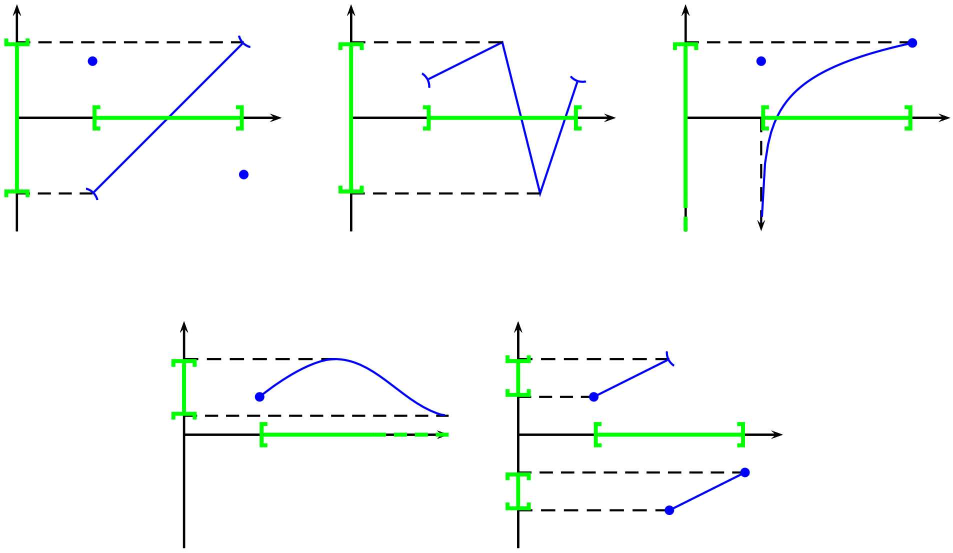


FIGURE 33.2 – Images d'intervalles

33.5 Problèmes de quantification

Lorsqu'on manipule des fonctions, il faut faire attention à la quantification, ie à l'introduction des variables. Écrire une identité fonctionnelle, c'est écrire que pour tout x dans un ensemble, l'égalité est vraie en x.

Par convention, quand un réel apparait dans une telle formule, il désigne la fonction constante qui lui est égale, définie sur un intervalle convenable.

Une identité fonctionnelle est donc une assertion universelle, que le « pour tout » soit présent ou non. Par exemple, ces trois phrases sont équivalentes, pour $f : I \to \mathbb{R}$:

- f est majorée par 2 (aucune variable n'apparaît)
- $f \leqslant 2$ (idem)
- pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant 2$ (on utilise x qui n'a de sens que dans la phrase écrite).

Il est essentiel de se souvenir que la quantification fait partie des définitions. Par exemple, la définition de la parité est *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et non pas $f(-x) = f(x)$, car x n'y est pas définie.

De plus, quand on quantifie en une variable introduite par « soit », elle disparaît, et n'a plus de sens à partir du moment où on a quantifié.

La plupart des erreurs viennent du fait qu'on oublie la quantification : variables indéfinies, problèmes de négation d'assertions,...

Chapitre 34

Limite d'une fonction réelle

34.1 Notion de limite

34.1.1 Limite d'une fonction réelle en un point de $\mathbb{R}$

On travaille sur des intervalles non vides et non réduits à un point.

Définition 34.1 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\overline{I}$ la réunion de I et de ses extrémités finies.

Définition 34.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $L \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet L comme limite en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 34.1 Pour généraliser facilement la notion de limite en $\pm\infty$, il faut donner une idée de ce que peut être un point proche de $\pm\infty$.

Ainsi, f admet une limite égale à $+\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$ ssi $f(x)$ est supérieur à tout réel fixé dès que x est assez proche de a.

Définition 34.3 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

On dit que f admet $+\infty$ comme limite au point a ssi

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

Remarque 34.2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une limite L en $a \in I$.

- *L ne peut être infinie. Supposons le contraire.*
  On a alors l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant f(a) + 1$.
  En particulier $|a - a| = 0 < \eta$ donc $f(a) \geqslant f(a) + 1$. Contradiction.
- *Soit $\varepsilon > 0$. Comme $L \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.*
  On a donc $|f(a) - L| \leqslant \varepsilon$ donc $f(a) = L$.

Donc si f admet une limite en $a \in I$, cette limite vaut $f(a)$.

34.1.2 Notion de limites partielles

Définition 34.4 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $I \cap]a, +\infty[\neq \varnothing$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet L comme limite à droite au point a ssi la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet L comme limite au point a.

Lorsque cette limite existe, elle est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

Définition 34.5 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $I \cap]-\infty, a[\neq \varnothing$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet L comme limite à gauche au point a ssi la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ admet L comme limite au point a.

Lorsque cette limite existe, elle est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Remarque 34.3 Même si f admet une limite à droite et à gauche en $a \in I$, rien n'assure que f admette une limite en a. En fait, f admet une limite en $a \in I$ ssi f admet une limite à droite et à gauche, toutes deux égales à $f(a)$ en a.

34.1.3 Limite d'une fonction réelle en $\pm\infty$

La généralisation à $\pm\infty$ impose seulement l'interdiction de l'étude de ce genre de limite si on ne peut pas s'approcher de $\pm\infty$.

Par exemple, pour introduire la notion de limite en $+\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, il faut s'assurer que pour tout $M \in \mathbb{R}$, $[M, +\infty[\cap I \neq \varnothing$ (afin de pouvoir calculer $f(x)$ pour des valeurs de x aussi grandes que voulues), ie que I est non majoré.

Définition 34.6 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I non majoré et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f admet L comme limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant N \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

Définition 34.7 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I non majoré. On dit que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ssi

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant N \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

Définition 34.8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I non majoré. On dit que f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ssi

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant N \Rightarrow f(x) \leqslant M$$

<u>Définition 34.9</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I non minoré et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f admet L comme limite en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant N \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

<u>Définition 34.10</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I non minoré. On dit que f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ssi

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant N \Rightarrow f(x) \geqslant M$$

<u>Définition 34.11</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I non minoré. On dit que f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ssi

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant N \Rightarrow f(x) \leqslant M$$

34.2 Extension

34.2.1 Notion de voisinage

<u>Définition 34.12</u> Soit I un intervalle. On note $\mathcal{A}(I)$ la réunion de I et de ses extrémités finies ou non.

<u>Définition 34.13</u> Pour tout $a \in I$, on appelle voisinage de a toute partie V de $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $\eta > 0$ vérifiant $V =]a - \eta, a + \eta[$. L'ensemble des voisinages de a est noté

$$\mathcal{V}(a) = \{]a - \eta, a + \eta[, \eta > 0\}$$

Par convention :

$$V(+\infty) = \{]M, +\infty[, M \in \mathbb{R}\} \text{ et } V(-\infty) = \{]-\infty, M[, M \in \mathbb{R}\}$$

Application :

La notion de voisinage permet de localiser les propriétés. Par exemple, on dit que f vérifie une propriété au voisinage de a ssi il existe $V \in \mathcal{V}(a)$, $f|_V$ vérifie cette propriété.

Remarque 34.4 *Soit I un intervalle, $a \in \mathcal{A}(I)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

f admet l comme limite en a ssi pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$, il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in I$, $x \in W \Rightarrow f(x) \in V$.

Ce qui est équivalent à $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(I \cap W) \subset V$.

34.2.2 Propriétés

<u>THÉORÈME 34.1</u> *Soit I un intervalle, $a \in \mathcal{A}(I)$ et $L \in \mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.*

Soit $L' < L$. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V \cap I$, $f(x) > L'$.

Soit $L' > L$. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V \cap I$, $f(x) < L'$.

Démonstration. Soit $L' < L$. Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V \cap I$, $|f(x) - L| \leqslant \frac{L-L'}{2}$.

Soit $x \in V \cap I$. $f(x) - L \geqslant \frac{L'-L}{2}$ donc $f(x) \geqslant \frac{L+L'}{2} > L'$.

D'où le résultat. ■

Remarque 34.5 Ce lemme s'applique à la notion de limite partielle.

Application : Soit I un intervalle, $a \in \mathcal{A}(I)$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

Si f admet une limite strictement positive en a, elle prend des valeurs strictement positives au voisinage de a.

Remarque 34.6 Soit I un intervalle, $a \in \mathcal{A}(I)$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- *Si f admet une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.*
- *Si f tend vers $+\infty$ en a, elle est minorée et non majorée au voisinage de a.*
- *Si f tend vers $-\infty$ en a, elle est majorée et non minorée au voisinage de a.*

<u>THÉORÈME 34.2</u> *Soit I un intervalle, $a \in \mathcal{A}(I)$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

Si f admet une limite en a, icelle est unique.

34.3 Problèmes de composition

34.3.1 Image d'une suite par une fonction

<u>THÉORÈME 34.3</u> *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et u une suite réelle. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l' \in \mathcal{A}(I)$.*

Si u est à valeurs dans I, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$ et $\lim\limits_{x\to l'} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$.

Comme $\lim\limits_{x\to l'} f(x) = l$, il existe $W \in \mathcal{V}(l')$ tel que $f(W \cap I) \subset V$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $u_n \in W$.

Pour tout n, $u_n \in W \cap I$ donc $f(u_n) \in V$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$. ■

Remarque 34.7 *Ça marche avec les limites partielles.*

Exemple 34.1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} = 2$ et $f(1) = 2$.

Pour tout n, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Comme $f|_{]1,+\infty[}$ admet 2 comme limite en 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et pour tout n, $u_n \in]1, +\infty[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 2$.

Remarque 34.8 *Le théorème précédent permet de montrer que certaine fonctions n'ont pas de limite en un point.*

Exemple 34.2 cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Si cos converge vers l en $+\infty$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\pi n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos(2\pi n) = l$.

Donc $l = 1$.

De même $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = l$ donc $l = 0$.

D'où la divergence de cos.

34.3.2 Composition de fonctions

<u>Théorème 34.4</u> *Soit I, J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{A}(I)$, $b \in \mathcal{A}(J)$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Si $f(I) \subset J$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{V}(c)$.

Comme $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, il existe $W \in \mathcal{V}(b)$ tel que $g(W \cap I) \subset V$.

Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap I) \subset W$.

Si $x \in U \cap I$, on sait que $f(x) \in W$ et $f(x) \in J$ donc $f(x) \in W \cap J$ et $g(f(x)) \in V$.

Donc $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$. ■

Exemple 34.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x^2 = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $x^2 > 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x^2) = 0$.

Exemple 34.4 On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \text{ si } x \neq 0 \\ w & \mapsto & 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On étudie la limite en 0 de f, g et $g \circ f$.

g n'a pas de limite en 0. Cependant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

On ne peut pas appliquer le théorème et on démontre que $g \circ f$ n'a pas de limite.

Application : Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{A}(I)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On pose :

$$g : \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}, a + x \in I\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(a+x) \end{cases}$$

f admet l comme limite en a ssi g admet l comme limite en 0.

34.4 Propriétés algébriques

34.4.1 Stabilité

Présentation

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant comme limites respectives L et L' dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \mathcal{A}(I)$ (resp. à droite en $a \in \overline{I}$, à gauche en $a \in \overline{I}$, épointée en $a \in \overline{I}$). Alors pour certaines valeurs de L et L', on sait que $f+g$, λf, fg et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et admettent une limite (resp. à droite, à gauche, épointée) en a, qu'on peut exprimer en fonction de L et L'.

Sachant que les limites partielles sont des limites totales pour des restrictions convenables, ce cas seul est à traiter.

Remarque 34.9 Les résultats de stabilité algébrique sont des résultats d'existence avant d'être des résultats de calcul.

Par exemple connaissant $f : I \to \mathbb{R}$ et définissant g par $g = H \circ f$ avec H ne mettant en jeu que des opérations algébriques, on peut déterminer les propriétés asymptotiques de g existentielles et calculatoires. En revanche, si on définit g implicitement par $H \circ g = f$, on ne peut déduire que des propriétés de calcul sur g.

Exemple 34.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ minorée par -1 telle que $f^2 + 2f - 8$ admette 0 comme limite en 0. Que peut-on dire de f en 0 ?

On pose $g = f^2 + 2f - 8$, qui admet 0 comme limite en 0. On peut seulement dire que si f converge vers L en 0 alors $L^2 + 2L - 8 = 0$. Cette équation permet de trouver les valeurs potentielles de L, mais pas de montrer l'existence d'une telle limite.

Pour aller plus loin, on essaie de trouver une expression explicite de f en fonction de g. On remarque que $(f+1)^2 = g + 9$ donc, comme f est minorée par -1, $f = \sqrt{g+9} - 1$. Il est alors clair que f admet une limite en 0 et qu'icelle est 2.

Limite de $f+g$

Pour les sommes de fonctions réelles, on peut conclure dès que L et L' sont sommables dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dans le cas contraire, on ne peut rien dire sur l'existence de la limite. On peut alors tracer le même tableau que pour les suites réelles.

Limite de fg

De même, si le produit de L par L' est défini dans $\overline{\mathbb{R}}$, la limite de fg existe et vaut LL'. Dans le cas contraire, on ne peut rien dire sur l'existence de la limite de fg.

On peut aussi remarquer que l'étude de fg résout le cas de λf en prenant g constante égale à λ.

Remarque 34.10 *Pour étudier $x \mapsto f(x)^{g(x)}$, il faut impérativement passer par l'étude de $g \ln \circ f$ puis utiliser les propriétés de* exp *et le théorème de composition des limites.*

Exemple 34.6 Calculer si elle existe, la limite en 0 de $f : x \mapsto \cos(x)^{\frac{1}{x}}$.

La fonction est correctement définie sur un voisinage de 0 puisque le cosinus prend des valeurs strictement positives sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $x \neq 0$ dans cet intervalle, on a

$$\ln(f(x)) = \frac{\ln(\cos(x)) - \ln(\cos(0))}{x - 0}$$

qui tend quand $x \to 0$ vers $(\ln \circ \cos)'(0)$ ie 0. Finalement $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Remarque 34.11 *Si f admet une limite en a, il en est de même de $-f$. On en déduit que si f admet une limite finie en a et si g n'admet pas de limite en a alors $f+g$ n'admet pas de limite en a. En effet, sinon, $f+g-f = g$ en admettrait une.*

Limite de $\frac{f}{g}$

On suppose que $L' \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et on sait conclure dans tous les cas sauf quand les deux fonctions admettent $\pm\infty$ comme limite en a. On peut alors tracer le même tableau que pour les suites réelles.

En général, on ne peut rien dire quand $L' = 0$ pour la fonction $\frac{1}{g}$. Elle n'est pas nécessairement définie au voisinage de a. Si elle l'est, on peut seulement prouver que $\lim_a \frac{1}{|g|} = +\infty$, ce qui n'est pas le cas de $\frac{1}{g}$ en général.

Exemple 34.7 La fonction $x \mapsto (-1)^{E(\frac{1}{x})}x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ admet 0 comme limite en 0. Même si elle ne s'annule pas, son inverse n'admet pas de limite en 0.

Remarque 34.12 Si f admet une limite finie non nulle en a et si g n'admet pas de limite en a alors fg n'admet pas de limite en a.

En effet, dans le cas contraire, $\frac{fg}{f} = g$ serait bien définie et admettrait une limite.

Quelques preuves

Démonstration.

- Si I est non majoré, $a = +\infty$ et $(L, L') \in \mathbb{R}^2$, montrons que $f + g \to L + L'$ en $+\infty$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(N, N') \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in I$, si $x \geqslant N$, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ et si $x \geqslant N'$ alors $|g(x) - L'| \leqslant \varepsilon$.
  Soit $x \in I$ tel que $x \geqslant \max\{N, N\}$.

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L + L')| &= |(f(x) - L) + (g(x) - L')| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - L'| \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

  D'où $\lim\limits_a f + g = L + L'$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $L, L' \in \mathbb{R}$, montrons que $fg \to LL'$ en a.
  Comme f admet une limite finie en a, elle est bornée par M au voisinage de a, ie il existe $\eta_0 > 0$ et $M \geqslant 0$ tel que $f|_{]a-\eta_0, a+\eta_0[}$ soit bornée par M.
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leqslant \eta_1$, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ et si $|x - a| \leqslant \eta_2$, $|g(x) - L'| \leqslant \varepsilon$.
  Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \min\{\eta_0, \eta_1, \eta_2\}$.

$$\begin{aligned} |fg(x) - LL'| &= |f(x)(g(x) - L') + L'(f(x) - L)| \\ &\leqslant M|g(x) - L'| + |L'||f(x) - L| \\ &\leqslant (M + |L'|)\varepsilon \end{aligned}$$

  D'où le résultat.
- Si I est non minoré, $a = -\infty$, $(L, L') \in \mathbb{R}^2$ avec $L' \neq 0$. Montrons que $\frac{f}{g}$ admet $\frac{L}{L'}$ comme limite en a.
  L'étude précédent assure qu'on peut supposer $f = 1$ et $L = 1$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N, N' tel que pour tout $x \in I$, si $x \leqslant N$, $|g(x) - L'| \leqslant \varepsilon$ et si $x \leqslant N'$, $|g(x)| \geqslant \frac{|L'|}{2}$ (lemme 34.1).

D'où $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de $-\infty$. De plus, pour tout $x \in I$ tel que $x \leqslant \min\{N, N'\}$, on a :

$$\left|\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{L'}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|L'g(x)|} \leqslant \frac{2\varepsilon}{|L'|^2}$$

D'où le résultat.

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $L = +\infty = -L'$.
  Soit $M > 0$. Il existe $\eta_0 > 0$ tel que $f|_{]a-\eta_0,a+\eta_0[}$ soit minorée par M et il existe $\eta_1 > 0$ tel que $g|_{]a-\eta_1,a+\eta_1[}$ soit majorée par -1.
  Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \min\{\eta_0, \eta_1\}$. On a $f(x) \geqslant M$ et $-g(x) \geqslant 1$ donc $-f(x)g(x) \geqslant M$ et $fg(x) \leqslant -M$.
  Donc $\lim\limits_{a} fg = -\infty$. ■

Remarque 34.13 On peut remarquer que, dans le dernier point, on n'a pas utilisé le fait que $L' = -\infty$, mais juste le fait que cette fonction est minorée par un réel strictement négatif au voisinage de a.

En fait, comme dans le cadre des suites, les résultats faisant intervenir des limites égales à $\pm\infty$ ne sont pas optimaux. On les généralisera plus tard quand on parlera de relation d'ordre.

34.4.2 Formes indéterminées

<u>THÉORÈME 34.5</u> *Soit $\alpha > 0$.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{\alpha x} = 0$$

Démonstration. Soit $x \in]1, +\infty[$.

Pour tout $t \in]1, x[$, $0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Donc :

$$\int_1^x 0\,dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

Et :

$$0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2(\sqrt{x} - 1)$$

Par conséquent,

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = +\infty$.

En composant par exp, $\cdot^{-1}$ et $-\cdot$, on obtient le reste. ■

Remarque 34.14 *On en déduit le résultat analogue sur les suites.*

34.5 Comparaison asymptotique

34.5.1 Présentation

<u>Définition 34.14</u> Soit I un intervalle, $a \in \mathcal{A}(I)$, f et $g : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ ssi
$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I \cap V, |f(x)| \leqslant K|g(x)|$$
- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ ssi
$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V \cap I, |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$$
- On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ssi
$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V \cap I, |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$$

Remarque 34.15

- *Par définition,* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *ssi* $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$.
- *Soit* $l \neq 0$. $f(x) \underset{x\to a}{l}$ *ssi* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Proposition 34.1 Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, alors :

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ssi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ ssi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ ssi $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Remarque 34.16 *Soit* g *définie sur* I*, nulle en* a *et telle qu'il existe un voisinage* V *de* a *tel que pour tout* $x \in (V \setminus \{a\}) \cap I$, $g(x) \neq 0$.

On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *ssi* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *et* $f(a) = g(a) = 0$.

De plus, $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *ssi* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *et* $f(a) = g(a) = 0$.

Proposition 34.2 Soient f, g, h, k définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ssi $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g > 0$ au voisinage de a alors $f > 0$ au voisinage de a

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$ alors $fh \underset{x\to a}{\sim} gk$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $f^n(x) \underset{x\to a}{\sim} g^n(x)$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $n \in \mathbb{R}$ et si f prend des valeurs positives au voisinage de a, $f^n(x) \underset{x\to a}{\sim} g^n(x)$.

Proposition 34.3 Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$, f, f_1 définies au voisinage de a.

Soit g une fonction définie au voisinage de b telle que $\lim\limits_{x\to b} g(x) = a$.

Si on n'a pas de problème d'inclusion et $f \underset{x\to a}{\sim} f_1$ alors $f(g(x)) \underset{x\to b}{\sim} f_1(g(x))$.

Remarque 34.17 La notion d'équivalent peut être généralisée en équivalent à gauche, à droite et épointé.

34.5.2 Équivalents à connaître

<u>THÉORÈME 34.6</u>

$$\begin{array}{c|c} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x & 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \\ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x & e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \\ \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x & \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x & \end{array}$$

Remarque 34.18 Ce théorème permet de montrer celui analogue sur les suites.

Exemple 34.8 Soit u qui converge vers 0. À partir d'un certain rang, $u_n > -1$.

On pose $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

L'équivalent assure que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$ donc $\ln(1+u) \sim u$.

Exemple 34.9 Trouver un équivalent de sin en π.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$.

Donc $\sin(x) \underset{x\to \pi}{\sim} \pi - x$.

34.6 Propriété vis à vis de l'ordre

<u>THÉORÈME 34.7</u> *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g définies au voisinage de a admettant chacune une limite (finie) en a.*

Si $f \geqslant g$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Démonstration. Voir celle sur les suites. ∎

<u>Théorème 34.8</u> *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g, h définies au voisinage de a telle que f et h admettent la même limite finie l en a et que $f \leqslant g \leqslant h$.*

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Application : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g définies au voisinage de a. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et g est bornée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

<u>Théorème 34.9</u> *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g définies au voisinage de a telle que $f \leqslant g$.*

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

34.7 Existence de limites

34.7.1 Résultat général

<u>Théorème 34.10</u> *Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante.*

Alors f admet une limite L en a. Si f est minorée, icelle est finie, sinon $L = -\infty$.

De même f admet une limite L' en b. Si f est majorée, icelle est finie, sinon $L' = +\infty$.

Corollaire 34.1 *Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ décroissante.*

Alors f admet une limite L en b. Si f est minorée, icelle est finie, sinon $L = -\infty$.

De même f admet une limite L' en a. Si f est majorée, icelle est finie, sinon $L' = +\infty$.

Démonstration.

- On travaille en a et on suppose f minorée.
  $f(]a, b[)$ est non vide minorée donc admet une borne inférieure l.
  Soit $\varepsilon > 0$. Comme $l + \varepsilon > l$, $l + \varepsilon$ ne minore pas $f(]a, b[)$ donc il existe $y = f(t_0)$ tel que $y < l + \varepsilon$.
  Comme f est croissante, pour tout $t \leqslant t_0$, $f(t) \leqslant f(t_0)$ donc $l \leqslant f(t) \leqslant l + \varepsilon$.
  Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
- On fait de même quand f est non minorée.
- Si f est croissante majorée, on pose $h : x \mapsto -f(a + b - x)$ qui est croissante minorée donc h admet une limite en a notée L.
  On en déduit $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -L$. ■

Application : Si f est monotone, elle admet une limite à droite et à gauche en tout point où cela a un sens.

Exemple 34.10 Soit f une fonction définie au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ croissante.

f admet une limite à gauche et à droite en a et :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$$

34.7.2 Image d'un intervalle

Proposition 34.4 Soit $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}$ $(a<b)$ et $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ croissante.

On a $f(]a,b[)\subset[\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)]$.

Démonstration. Soit $y\in f(]a,b[)$. On a $y=f(x)$.

Comme f est croissante, pour tout $t\in]x,b[$, $f(t)\geqslant f(x)$. De plus, f a une limite à gauche en b et à droite en a.

Donc $f(x)\leqslant \lim\limits_{t\to b^-} f(t)$ et $f(x)\geqslant \lim\limits_{t\to a^+} f(t)$.

Donc $y\in[\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)]$. ∎

Remarque 34.19 Si une des limites est infinie, on ouvre la borne correspondante.

On a un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ tel que $a<b$ et $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ croissante.

On montre que $f([a,b[)\subset[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)]$.

En revanche, $f(]a,b[)\subset[\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)]$.

Proposition 34.5 Soit $a,b\in\overline{\mathbb{R}}^2$ avec $a<b$ et $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ strictement croissante.

On a $f(]a,b[)\subset]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$.

Démonstration. Soit $y\in f(]a,b[)$, $y=f(x)$.

On note que pour tout $t\in[\frac{x+b}{2},b[$, $f(t)\geqslant f(\frac{x+b}{2})$.

De plus, f a une limite en b donc $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)\geqslant f(\frac{x+b}{2})$.

Or $x<\frac{x+b}{2}$ donc $f(x)<f(\frac{x+b}{2})$.

Donc $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)>f(x)$, et de même, $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)<f(x)$.

D'où $y\in]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$. ∎

Chapitre 35

Fonctions d'une variable réelle – Régularité

35.1 Continuité

35.1.1 Définition

Définition 35.1 Soit I un intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est continue en a ssi elle admet une limite en a.

On dit que f est continue à droite en a ssi f admet une limite à droite en a égale à $f(a)$.

Remarque 35.1

- *Si f continue en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *Pour montrer que f n'est pas continue en a, il suffit de trouver une suite u à valeurs dans I telle que u converge vers a et $f(u)$ n'admette pas $f(a)$ comme limite.*

Définition 35.2 Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue ssi elle est continue en tout point de I. On note $C^0(I, \mathbb{R})$ leur ensemble.

Définition 35.3 Soit I un intervalle, $a \in \overline{I} \setminus I$, $f : I \to \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a, la fonction :

$$g : \begin{cases} I \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \text{ si } x \neq a \\ a & \mapsto & l \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f en a.

g est continue en a par construction.

Remarque 35.2

- *La continuité est une propriété locale. Pour étudier la continuité de f en a, on peut restreindre f au voisinage de a.*
- *$f|_{[1,2]}$ est continue signifie que f est continue sur $]1,2[$, continue à droite en 1 et à gauche en 2.*

35.1.2 Propriétés de stabilité

<u>THÉORÈME 35.1</u> *Soit I, J deux intervalles, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$.*

Soit $a \in I$. Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Si f est continue sur I et g sur J, $g \circ f$ est continue sur I.

COROLLAIRE 35.1 *Si f est continue en a, $|f|$ l'est en a.*

<u>THÉORÈME 35.2</u> *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *Soit $a \in I$. Si f et g sont continues en a, $f+g$, fg et λf sont continues en a*
- *Si $f \in C^0(I)$ et $g \in C^0(I)$ alors $f+g$, fg et λf appartiennent à $C^0(I)$.*

<u>THÉORÈME 35.3</u> *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *Soit $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$ et f soit continue en a. Alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et est continue en a.*
- *Si f est continue sur I et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, $\frac{1}{f} \in C^0(I)$.*

<u>Définition 35.4</u> Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$. On note $\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$.

Proposition 35.1 Si f et g sont continues, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues.

Démonstration. On s'occupe de $\sup(f,g)$.

Soit $x \in I$. Si $f(x) \geqslant g(x)$, $\sup(f,g)(x) = f(x)$ donc $\sup(f,g)$ est continue en x.

Si $f(x) < g(x)$, $\sup(f,g)(x) = g(x)$ et ça marche aussi. ∎

35.2 Dérivabilité

35.2.1 Définition

<u>Définition 35.5</u> Soit I un intervalle, $a \in I$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On pose :

$$\varphi : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

On dit que f est dérivable (resp. dérivable à gauche, dérivable à droite) en a ssi φ admet une limite finie (resp. à gauche, à droite) en a.

Le cas échéant, on appelle nombre dérivé (resp. à gauche, à droite) de f en a et on note $f'(a)$ (resp. $f'_g(a)$, $f'_d(a)$) la limite de φ (resp. à gauche, à droite) en a.

Remarque 35.3 *f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Définition 35.6 On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a ssi il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(a) + L(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$.

Proposition 35.2 Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

f est dérivable en a ssi f admet un développement limité à l'ordre 1 en a

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si f est dérivable en a, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{o}(1)$$

Donc $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{o}(x-a)$.

Or ceci reste vrai en a donc f admet un DL à l'ordre 1 en a.

$\Leftarrow$ S'il existe L tel que $f(x) = f(a) + L(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L + \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{o}(1)$$

Donc φ admet une limite finie en a donc f est dérivable en a. ∎

Proposition 35.3 Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Application : Soit $a \in \mathbb{R}$, f définie au voisinage de a. Si f est dérivable et $f'(a) \neq 0$,

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

Définition 35.7 Soit I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$.

Si f est dérivable en a la droite dont une équation cartésienne est $y = f(a)+f'(a)(x-a)$ dans un repère orthonormé du plan est tangente au graphe de f au point a tracé dans le même repère.

Définition 35.8 Soit I un intervalle et f définie sur I.

On dit que f est dérivable (resp. à gauche, à droite) sur I ssi elle est dérivable (resp. à gauche, à droite) en tout point de I. Le cas échéant, la fonction $I \to \mathbb{R}$, qui à a associe $f'(a)$ (resp. $f'_g(a)$, $f'_d(a)$) est appelée fonction dérivée de f et se note f' (resp. f'_g, f'_d).

L'ensemble des fonctions dérivables sur I se note $D^1(I, \mathbb{R})$.

Remarque 35.4 *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $a < b < c$.

Soit $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. *Montrer que* $f|_{[a,b]}$ *et* $f|_{[b,c]}$ *sont dérivables ne suffit pas pour prouver* f *dérivable.*

35.2.2 Composition de fonctions

<u>Théorème 35.4</u> *Soit* I, J *deux intervalles,* $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$. *On suppose* $f(I) \subset J$.

Si f *est dérivable en* a *et* g *en* $f(a)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* a *et* $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Démonstration.

- On pose :

$$h : \begin{cases} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{g(x) - g(f(a))}{x - f(a)} \text{ si } x \neq f(a) \\ f(a) & \mapsto & g'(f(a)) \end{cases}$$

  h est définie sur $f(I)$, on a $\lim\limits_{x \to f(a)} h(x) = g'(f(a))$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Donc $\lim\limits_{x \to a} h(f(x)) = g'(f(a))$.
- Soit $x \in I \setminus \{a\}$.
  Si $f(x) \neq f(a)$,
  $$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
  Si $f(x) = f(a)$,
  $$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = 0 = h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
  Donc pour tout $x \neq a$,
  $$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
  Or f est dérivable en a donc :
  $$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) f'(a)$$ ■

Corollaire 35.2 *Soit* I, J *deux intervalles,* $f \in D^1(I)$, $g \in D^1(J)$.

Si $f(I) \subset J$ *alors* $g \circ f \in D^1(I)$ *et* $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

35.2.3 Stabilité algébrique

<u>Théorème 35.5</u> *Soit I un intervalle, $a \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

On suppose f et g dérivables en a.

- *$f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
- *λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$*
- *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*

<u>Théorème 35.6</u> *Soit I un intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$.*

On suppose que f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$.

Alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a, dérivable en a et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

Corollaire 35.3 *On peut réécrire tous les théorèmes en quantifiant en a.*

35.3 Diverses classes de fonctions

35.3.1 Présentation

<u>Définition 35.9</u> Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f est une fois dérivable ssi elle est dérivable. Sa dérivée est notée $f^{(1)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est $n+1$ fois dérivable ssi f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est dérivable. On note $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Par convention, toute fonction est 0 fois dérivable et $f^{(0)} = f$.

Remarque 35.5 Définir cette notion en un point pose problème : soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f est deux fois dérivable en a ssi il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V\cap I}$ soit dérivable et $(f|_{V\cap I})'$ soit dérivable en a.

Remarque 35.6 Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Si f est $p+q$ fois dérivable, alors

$$f^{(p+q)} = (f^{(p)})^{(q)}$$

<u>Définition 35.10</u> Soit I un intervalle.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C^n(I, \mathbb{R})$ ou $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur I, n fois dérivables à dérivée n-ième continue.
- On note $C^\infty(I) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C^n(I)$.
- On note $D^n(I)$ l'ensemble des fonction réelles définies sur I dérivables n fois.

Remarque 35.7
- *Les notations ne sous-entendent rien : si $f \in C^3(\mathbb{R})$, il est possible que $f \in D^{12}(\mathbb{R})$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n(I)$. f est n fois dérivable et pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est continue.*
- *Si $f \in C^1(I)$, on dit qu'elle est continûment dérivable.*

Remarque 35.8

$$C^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq D^{n+1}(I) \subsetneq C^n(I) \subsetneq D^n(I) \subsetneq \cdots \subsetneq C^1(I) \subsetneq D^1(I) \subsetneq C^0(I)$$

$D^1(\mathbb{R}) \subsetneq C^0(\mathbb{R})$ est stricte car $x \mapsto |x| \in C^0(\mathbb{R}) \setminus D^1(\mathbb{R})$.

$C^1(\mathbb{R}) \subsetneq D^1(\mathbb{R})$ est stricte car $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ prolongée par 0 en 0 est dérivable non C^1.

35.3.2 Dérivées à connaître

Proposition 35.4
- $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)} = x \mapsto \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.
- $\cos \in C^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(n)} = x \mapsto \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $f : x \mapsto x^k$.
  $f \in C^\infty$ et pour tout $n \in [\![0, k]\!]$, $f^{(n)} = x \mapsto \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$
  Pour tout $n > k$, $f^{(n)} = 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x^k}$. f est C^∞ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^{(n)} = x \mapsto \frac{(-1)^n(k+n-1)!}{(k-1)!x^{k+n}}$$

Démonstration. Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : « $\sin \in C^n$ et $\sin^{(n)} = x \mapsto \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ ».

$\sin' = \cos$ donc $\sin \in C^1(\mathbb{R})$ et pour tout x, $\sin'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie.

On a $\sin^{(n)} \in C^1(\mathbb{R})$ donc $\sin \in C^{n+1}(\mathbb{R})$.

De plus, $\sin^{(n+1)} = x \mapsto \cos(x + \frac{n\pi}{2}) = x \mapsto \sin(x + \frac{(n+1)\pi}{2})$.

Le principe de récurrence conclut. ∎

35.3.3 Propriétés de stabilité

<u>THÉORÈME 35.7</u> *Soit I, J deux intervalles, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I)$ tel que $f(I) \subset J$.*

Si $g \in C^n(J)$, alors $g \circ f \in C^n(I)$.

Démonstration.

- Pour tout n, on pose H_n : « $\forall f,g \in C^n(I) \times C^n(J)$ tel que $f(I) \subset J$, on a $g \circ f \in C^n(I)$ ».
- Soit $f,g \in C^1(I) \times C^1(J)$ tel que $f(I) \subset J$.
  f et g sont dérivables donc $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Par hypothèse, $g' \in C^0(I)$ et $f \in C^0(I)$ donc $g' \circ f \in C^0(I)$.
  De plus, $f' \in C^0(I)$ donc $f' \times (g' \circ f) \in C^0(I)$ donc H_1 est vraie.
- Soit n tel que H_n soit vraie.
  Soit $f,g \in C^{n+1}(I) \times C^{n+1}(J)$ tel que $f(I) \subset J$.
  Par hypothèse, $g \circ f \in D^1(I)$ et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
  Or $g \in C^{n+1}(J)$ donc $g' \in C^n(J)$ et $f \in C^n(I)$.
  H_n assure que $g' \circ f \in C^n(I)$. De plus, $f' \in C^n(I)$ donc H_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence conclut. ■

<u>Théorème 35.8</u> *Soit I un intervalle, $(f,g) \in C^n(I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *$f+g \in C^n(I)$ et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$*
- *$\lambda f \in C^n(I)$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$*
- *$fg \in C^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (Leibniz)*
- *Si f ne s'annule pas, $\frac{1}{f} \in C^n(I)$*

Démonstration de la formule de Leibniz.

- Pour tout n, on pose H_n : « $\forall f,g \in C^n(I)^2, fg \in C^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».
- H_0 est triviale.
- Soit n tel que H_n soit vraie et $f,g \in C^{n+1}(I)^2$.
  Par hypothèse, f et g sont dérivables donc fg aussi. $(fg)' = f'g + g'f$ est donc C^n par H_n.

Donc :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k+1)}g^{(n-k)}+f^{(k)}g^{(n-k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n-k+1)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)} \\ &= fg^{(n+1)}+f^{(n+1)}g+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie.

- Le principe de récurrence conclut. ■

Démonstration du dernier point.

- Pour tout n, on pose H_n : « Pour tout $f \in C^n(I, \mathbb{R}^*)$, $\frac{1}{f} \in C^n(I)$ ».
- H_0 est triviale.
- Soit n tel que H_n soit vraie et $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R}^*)$.
  f est dérivable et ne s'annule pas donc $\frac{1}{f}$ est dérivable et $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$.
  Comme $f \in C^n(I)$, $f^2 \in C^n(I)$ et $f^2 \neq 0$ donc $\frac{1}{f^2} \in C^n(I)$.
  Or $f \in C^{n+1}(I)$ donc $f' \in C^n(I)$. On en déduit que $\frac{f'}{f^2} \in C^n(I)$.
  Donc $\frac{1}{f} \in C^{n+1}(I)$ et H_{n+1} est vraie
- Le principe de récurrence conclut. ■

Remarque 35.9 La formule de Leibniz est utile en pratique quand l'une des fonctions est un polynôme de degré faible.

Exemple 35.1 On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+2)\mathrm{e}^x \end{cases}$$

Déterminer la dérivée de f à tout ordre.

On a $f' = x \mapsto \mathrm{e}^x(x^2+2x+2)$.

Soit $n > 1$. La formule de Leibniz assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (x^2+2)\mathrm{e}^x + 2nx\mathrm{e}^x + n(n-1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x^2+2+2nx+n(n-1))$$

Chapitre 36

Fonctions d'une variable réelle – Résultats généraux

36.1 Théorème des valeurs intermédiaires

36.1.1 Énoncé

<u>THÉORÈME 36.1</u> DES VALEURS INTERMÉDIAIRES *Soit I un intervalle, $f \in C^0(I)$, $y \in \mathbb{R}$.*

On suppose que f prend une valeur plus grande que y et un valeur plus petite que y.

Alors f prend la valeur y.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leqslant b$ et $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$.

On se place dans le premier cas. On définit deux suites a et b de I en posant :

- $a_0 = a$, $b_0 = b$
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant y$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geqslant y$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$

La construction est correcte car I est un intervalle.

Par récurrence, on montre que $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$ puisque $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$.

On remarque que $b \geqslant a$, d'où la croissance de a et la décroissance de b.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ donc a et b sont adjacentes et convergent donc vers la même limite $l \in [a,b] \subset I$.

$l \in I$ donc f est continue en l. Les suites $f(a)$ et $f(b)$ convergent vers $f(l)$ et par le théorème des gendarmes, comme pour tout n, $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$, on a $y = f(l)$. ∎

Remarque 36.1 *On peut remplacer l'hypothèse « il existe $b \in I$ tel que $f(b) \geqslant y$ » par « il existe $c \in \mathcal{A}(I)$ tel que $\lim\limits_{x \to c} f(x) > y$ ». L'application du lemme 34.1 permet de se ramener au théorème.*

Exemple 36.1 $\arctan(0) < \frac{3}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) > \frac{3}{2}$ donc arctan prend des valeurs strictement supérieures à $\frac{3}{2}$ et arctan est continue sur *l'intervalle* $\mathbb{R}$.

Donc arctan prend la valeur $\frac{3}{2}$.

36.1.2 Étude d'équations

Exemple 36.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in C^0([a, b])$ tel que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe.

On pose $g = f - \mathrm{Id}$. On a $f(a) \in [a, b]$ donc $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$. De même $g(b) \leqslant 0$.

Comme g est continue sur $[a, b]$, le théorème 36.1 assure que g s'annule donc que f a un point fixe.

Exemple 36.3 Résoudre (E) : $\arctan(x) + \arctan(3x) = \arctan(5x)$.

En raisonnant par condition nécessaire, on trouve les solutions potentielles $\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{15}}\}$.

0 est solution de (E). On pose $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(3x) - \arctan(5x)$.

On vérifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant 0$ et que $f(\frac{1}{10}) \leqslant 0$. Comme f est continue sur $[\frac{1}{10}, +\infty[$, f s'annule sur cet intervalle.

Donc $\frac{1}{\sqrt{15}}$ est solution. Par imparité, $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ aussi.

36.1.3 Études d'inéquations

Soit $f \in C^0(I)$. Pour résoudre $f(x) > 0$, il suffit de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = 0$.

Soit $a, b \in \mathscr{S}^2$ tel que $]a, b[\cap \mathscr{S} = \varnothing$. La connaissance d'une valeur prise par f sur $]a, b[$ donne le signe de $f|_{]a,b[}$.

36.1.4 Calcul numérique

La méthode de la preuve s'appelle dichotomie. C'est une méthode pratique de calcul numérique d'une solution d'une équation.

Avec les notations de la preuve, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - l| \leqslant \frac{b-a}{2^n}$, ce qui permet de déterminer la valeur explicite d'un entier n_0 pour que a_{n_0} soit une valeur approchée de l avec une précision fixée.

36.2 Images d'intervalles

36.2.1 Résultat général

<u>Théorème 36.2</u> *Soit I un intervalle, $f \in C^0(I)$. $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in f(I)^2$ tel que $x \leqslant y$.

Il existe $a \in I$ tel que $x = f(a)$ et $b \in I$ tel que $y = f(b)$.

Soit $z \in [x, y]$, on a $f(a) \leqslant z \leqslant f(b)$.

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $z \in f(I)$. Donc $[x, y] \subset f(I)$ qui en devient un intervalle. ∎

Remarque 36.2 Les formes des intervalles ne sont pas conservées.

Application : Si f est strictement monotone et continue sur un intervalle I, on sait calculer $f(I)$.

Par exemple, si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ tel que $a < b$. Si $f \in C^0([a, b[)$ est strictement décroissante, alors

$$f([a, b[) =]\lim_{x \to b^-} f(x), f(a)]$$

36.2.2 Image d'un segment

<u>Théorème 36.3</u> *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in C^0([a, b])$.*

La fonction f est bornée et il existe $(u, v) \in [a, b]^2$ tel que $\sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(u)$ et $\inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(v)$.

Corollaire 36.1 *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Démonstration. On suppose f non bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| > n$.

Par Bolzano-Weierstraß, on a $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $x \circ \varphi$ converge vers l.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \in [a, b]$, on a $l \in [a, b]$, donc f est continue en l.

Donc $(f(x_{\varphi(n)}))_n$ converge. Or $|f(x_{\varphi(n)})| \geqslant \varphi(n) \geqslant n$ donc contradiction.

Donc f est bornée.

On va montrer que f atteint son sup. La preuve pour l'inf est identique.

Il existe $(x_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

$(x_n)_n$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite convergeant vers l via une extractrice φ.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$ (continuité) et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \sup f$.
Donc $\sup f = f(l)$ qui est donc atteint. ∎

Application : Une inégalité fonctionnelle stricte basée sur une fonction continue sur un segment peut être améliorée.

Soit S un segment, $f \in C^0(S)$, $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in S$, $f(x) < a$.

On peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in S$, $f(x) < b$ et $b < a$.

Exemple 36.4 Soit $(f,g) \in C^0([0,1])^2$ tel que $0 < f < g$.

Soit $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Déterminer la limite de $((\frac{f(u_n)}{g(u_n)})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe.

Comme $\frac{f}{g}$ est continue sur un segment, elle est majorée et il existe $c \in [0,1]$ tel que $\frac{f(c)}{g(c)} = \sup\limits_{x\to[0,1]} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < (\frac{f(u_n)}{g(u_n)})^n \leqslant (\frac{f(c)}{g(c)})^n$.

Or $\frac{f(c)}{g(c)} < 1$ donc, par le théorème des gendarmes, la limite recherchée existe et vaut 0.

36.3 Liens entre continuité, injectivité et monotonie

<u>Théorème 36.4</u> *Une fonction strictement monotone est injective.*

Démonstration. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ strictement décroissante.

Soit $(x,y) \in A^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

Si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$, ce qui est absurde.

De même si $x > y$, donc $x = y$ et f est injective. ∎

Corollaire 36.2 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f strictement monotone sur A.*

$$g : \begin{cases} A & \to & f(A) \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

est bijective. Pour décrire $f(A)$, on utilise la continuité, la stricte monotonie ou le fait que A soit un intervalle.

<u>Théorème 36.5</u> *Soit I un intervalle, $f \in C^0(I)$ injective. Alors f est strictement monotone.*

Démonstration. On suppose que f n'est pas strictement monotone.

Il existe donc $(x,y,z) \in I^3$ tel que $x < y < z$ et :

$$\begin{cases} f(x) \geqslant f(y) \\ f(z) \geqslant f(y) \end{cases} \text{ou} \begin{cases} f(x) \leqslant f(y) \\ f(z) \leqslant f(y) \end{cases}$$

On ne traite que le premier cas, le deuxième étant analogue. On a alors $f(z) \leqslant f(x)$ ou $f(z) \geqslant f(x)$. On suppose la première inégalité, l'autre cas étant similaire.

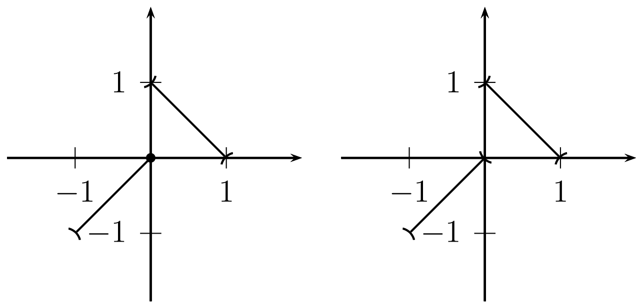
On a $f(z) \in [f(y), f(x)]$ et f est continue sur $[x, y]$. Le TVI assure qu'il existe $t \in [x, y]$ tel que $f(t) = f(z)$. Or $t \leqslant y$ et $y < z$ donc $t \neq z$ et f n'est pas injective.

En contraposant, on a le résultat. ■

Remarque 36.3 *On se sert du résultat sous la forme : soit I un intervalle, $f \in C^0(I)$. Si f n'est pas strictement monotone, elle n'est pas injective.*

Cela permet de trouver les plus grands domaines où la restriction de f est bijective.

Exemple 36.5 On pose f et g :



f est bijective, définie sur un intervalle mais f n'est pas strictement monotone.

g est injective, continue mais pas strictement monotone.

36.3.1 Régularité de la réciproque d'une bijection

<u>Théorème 36.6</u> *Soit I et J deux intervalles, f une bijection de I sur J (ie $f(I) = J$) continue.*

Alors $f^{-1} \in C^0(J, I)$.

<u>Théorème 36.7</u> *Soit I et J deux intervalles, f une bijection de I sur J.*

Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a et $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Démonstration. On pose :

$$g : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-a}{f(x)-f(a)} \end{cases}$$

Par hypothèse, g tend vers $\frac{1}{f'(a)}$ en a. De plus, f^{-1} est continue en a et $f^{-1}(J \setminus \{f(a)\}) \subset I \setminus \{a\}$.

Donc $g \circ f^{-1}$ admet $\frac{1}{f'(a)}$ comme limite en $f(a)$ et on a alors le résultat. ■

<u>THÉORÈME 36.8</u> *Soit I, J deux intervalles, f une bijection de I sur J continue. Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a et $f'(a) = 0$. Alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.*

COROLLAIRE 36.3 *Soit I, J deux intervalles et f une bijection de I sur J dérivable dont la dérivée ne s'annule pas.*

Alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple 36.6 Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ et $J = f(I)$. On suppose f bijective et que f' ne s'annule pas. Montrer que $f \in C^2(J)$.

- $f \in D^1(I)$ et f' ne s'annule pas donc $f^{-1} \in D^1(J)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
- $f^{-1} \in D^1(J, I)$ et $f' \in C^1(I, \mathbb{R}^*)$ donc $f' \circ f^{-1} \in D^1(J, \mathbb{R}^*)$ donc $(f^{-1})' \in D^1(J)$ ie $f^{-1} \in D^2(J)$.
- En réitérant, on trouve que $(f^{-1})' \in C^1(J)$ donc $f^{-1} \in C^2(J)$.

36.4 Extremum d'une fonction

36.4.1 Condition suffisante d'extremum

<u>THÉORÈME 36.9</u> *Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $f : [a - \alpha, a + \alpha] \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Si f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. On suppose que f admet un maximum en a. Pour tout $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Donc pour tout $x \in [a - \alpha, a[$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ donc $f'(a) \geqslant 0$.

De même, pour tout $x \in]a, a + \alpha]$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$ donc $f'(a) \leqslant 0$.

Donc $f'(a) = 0$. ■

Remarque 36.4

- *La réciproque est fausse.*
- *Ce résultat ne s'applique que pour les points intérieurs.*

36.4.2 Étude des extrema

Soit E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$. On cherche les extrema locaux de f.

On appelle F l'ensemble des points de E en lesquels le théorème ne s'applique pas, ie les points où f n'est pas dérivable et des points non intérieurs à l'intervalle de définition.

On résout $(f|_{E\setminus F})'(x) = 0$ d'inconnue $x \in E \setminus F$ et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions, ie l'ensemble des réels de $E \setminus F$ où f peut atteindre un extremum.

Pour tout $x_0 \in \mathscr{S}$, on étudie le signe de $f(x) - f(x_0)$ au voisinage de x_0. En pratique, on cherche un équivalent de $f(x) - f(x_0)$ au voisinage de x_0.

36.5 Théorème des accroissements finis

36.5.1 Énoncé

Théorème 36.10 de Rolle *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$*.*

Si $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$*.*

Démonstration. Si f est constante, $f'(\frac{a+b}{2}) = 0$.

Sinon, comme f est continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe $x, y \in [a, b]^2$ tel que $f(x) = \max(f)$ et $f(y) = \min(f)$.

Par hypothèse, on a x ou y dans $]a, b[$. Il est loisible de supposer que c'est x.

On sait que f admet un maximum en x qui est intérieur à $[a, b]$ et où f est dérivable. Donc $f'(x) = 0$. ■

Corollaire 36.4 TAF *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$*.*

Il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$*.*

Démonstration. Si $f(a) \neq f(b)$, on pose

$$g : \begin{cases} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{cases}$$

g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

On a $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, d'où le résultat. ■

Remarque 36.5 On peut trouver une version symétrique du théorème :

Soit $a \in \mathbb{R}$*,* $\alpha > 0$*,* $f : [a - \alpha, a + \alpha] \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable sur* $]a - \alpha, a + \alpha[$*.*

Pour tout $h \in]-\alpha, \alpha[$*, il existe* $\lambda \in]0,1[$ *tel que* $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\lambda h)$*.*

Corollaire 36.5 Inégalité des accroissements finies *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$*. Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*. On suppose qu'il existe* $m, M \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $m \leqslant (f|_{]a,b[})' \leqslant M$*.*

Alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$*.*

Application : Calcul de sommes.

Soit $f \in D^1(\mathbb{R}^+)$ tel que f' soit monotone. On veut une expression de $\sum\limits_{k=0}^{n} f'(k)$ sans $\sum$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On applique le TAF sur $[k, k+1]$. Il existe $c \in]k, k+1[$ tel que $f(k+1) - f(k) = f'(c)$.

Si f' est croissante, on a $f'(k) \leqslant f(k+1) - f(k) \leqslant f'(k+1)$ donc $f(k) - f(k-1) \leqslant f'(k) \leqslant f(k+1) - f(k)$. On a une formule analogue dans le cas contraire.

On peut donc encadrer $\sum\limits_{k=0}^{n} f'(k)$.

Exemple 36.7 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \sim \frac{3}{2}\sqrt[3]{n^2}$.

- On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

  Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  On note que $f|_{[k,k+1]}$ est dérivable. Par le TAF, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que $f(k+1) - f(k) = f'(c)$.
  Or $k \leqslant c \leqslant k+1$ donc $\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}$.
  Donc pour tout k, $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \leqslant f(k+1) - f(k) \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.
- Pour tout k, on a $f(k+1) - f(k) \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \leqslant f(k) - f(k-1)$. Donc

$$\frac{3}{2}(n+1)^{\frac{2}{3}} - 3 \times 2^{-\frac{1}{3}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \leqslant \frac{3}{2}(n^{\frac{2}{3}} - 1)$$

  En divisant,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{3n^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{2}{3n^{\frac{2}{3}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \leqslant 1 - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

  Par le théorème de gendarmes, le terme du milieu tend vers 1. D'où l'équivalent.

36.5.2 Décompte a priori du nombres de solutions d'une équation

Proposition 36.1 Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \geqslant p+1$. Soit I un intervalle et $f \in D^p(I)$.

Si f possède au moins n points d'annulation, alors $f^{(p)}$ admet au moins $n-p$ points d'annulation.

Proposition 36.2 Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \geqslant 1$. Soit I un intervalle et $f \in D^p(I)$.

Si $f^{(p)}$ admet au plus n points d'annulation, alors f admet au plus $n+p$ points d'annulation.

Application : Une fonction polynômiale de degré n s'annule au plus n fois.

Exemple 36.8 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = ax^2+bx+c$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet au plus trois solutions.

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x - ax^2 - bx - c \end{cases}$$

f est deux fois dérivable et $f'' = x \mapsto \mathrm{e}^x - 2a$, qui s'annule au plus une fois.

On suppose que f' s'annule 3 fois. Le théorème de Rolle assure, sachant que f' est dérivable, que f'' s'annule deux fois. Contradiction.

Donc f' s'annule au plus 2 fois. De même, f s'annule au plus trois fois.

36.6 Étude de variations

<u>THÉORÈME 36.11</u> *Soit I un intervalle et $f \in D^1(I)$.*
- *f est croissante ssi $f' \geqslant 0$*
- *f est décroissante ssi $f' \leqslant 0$*
- *f est constante ssi $f' = 0$*

Démonstration du premier point.

$\Rightarrow$ Soit $x \in I$. Pour tout $y \in I \setminus \{x\}$, on a $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geqslant 0$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ et $f' \geqslant 0$.

$\Leftarrow$ On suppose $f' \geqslant 0$. Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.
Comme $f|_{[a,b]}$ est dérivable, le TAF assure qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
Or $b - a > 0$ et $f'(c) \geqslant 0$ donc $f(b) \geqslant f(a)$ et f est croissante. ■

<u>THÉORÈME 36.12</u> *Soit I un intervalle, f dérivable sur I.*

1. *f est strictement croissante ssi*

- $f' \geqslant 0$
- $\{x \in I, f'(x) = 0\}$ *ne contient aucun intervalle non vide et non réduit à un point.*

2. *f est strictement décroissante ssi*
   - $f' \leqslant 0$
   - $\{x \in I, f'(x) = 0\}$ *ne contient aucun intervalle non vide et non réduit à un point.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si f est strictement croissante, f est croissante donc on a le premier point.
Soit J un intervalle non vide et non réduit à un point et inclus dans I. Si $(f|_J)' = 0$ alors $f|_J$ est constante donc f n'est pas strictement croissante.
Donc $(f|_J)' \neq 0$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, on sait que f est croissante.
Si f n'est pas strictement croissante, il existe donc $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $f(x) \geqslant f(y)$.
Soit $z \in [x, y]$. On a $x \leqslant z \leqslant y$. Comme f est croissante, $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(z) \leqslant f(x)$.
Donc $f(z) = f(x)$ et $f|_{[x,y]} = f(x)$ et $(f|_{[x,y]})' = 0$. Or $[x, y]$ est non vide et non réduit à un point. Contradiction.
Donc f est strictement croissante. ■

Remarque 36.6 Si $f' \geqslant 0$ et f' s'annule un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante.

36.7 Théorème de prolongement C^1

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. On suppose que $f|_{]0,1]}$ est dérivable.
f est-elle dérivable en 0 ? $(f|_{]0,1]})'$ est-elle continue ?

Exemple 36.9

- Soit

$$f_1 : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 3 \end{cases}$$

f_1 n'est pas continue mais f_1' est prolongeable par 0 en 0.

- On pose
$$f_2 : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{cases}$$
f_2 est dérivable en 0 mais f_2' n'a pas de limite en 0.

<u>Théorème 36.13</u> *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

On suppose que f est continue sur $[a,b]$, que $f|_{]a,b]}$ est dérivable et que $(f|_{]a,b]})'$ admet une limite finie l en a.

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Corollaire 36.6 *Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $f : [a-\alpha, a+\alpha] \to \mathbb{R}$.*

On suppose que f est continue, que f est dérivable sur $[a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$ et que sa dérivée ait une limite finie l en a.

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0, b-a]$ tel que pour tout $x \in]a, a+\eta]$, $|f'(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Soit $t \in]a, a+\eta]$. f est continue sur $[a,t]$ et dérivable sur $]a,t[$.

Le TAF assure l'existence de $x \in]a,t[$ tel que $f'(x) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$.

On a donc :
$$\left| \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - l \right| = |f'(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$. ∎

Remarque 36.7

- *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
  On suppose que $f|_{]a,b]}$ est dérivable et que $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f'(t) = \pm\infty$.
  Alors f n'est pas dérivable en a. En effet, si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable. Sinon, en reprenant la preuve précédente, on voit que f n'est pas dérivable en a.
- *Le théorème ne donne aucune information sur la dérivabilité de f en a si $(f|_{]a,b]})'$ n'a pas de limite en a.*

<u>Théorème 36.14</u> de prolongement C^1 *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f|_{]a,b]}$ soit dérivable et admette une limite finie l en a.*

Alors $f \in C^1([a,b])$ et $f'(a) = l$.

Chapitre 37

Convexité

37.1 Définition

Définition 37.1 Soit I un intervalle et f une fonction réelle définie sur I. On dit que f est convexe (resp. concave) ssi pour tout $(\lambda, x, y) \in [0,1] \times I^2$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)$$
$$(\text{resp. } f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x))$$

Remarque 37.1 Il est clair qu'une fonction est convexe ssi son opposé est concave. On étudie donc seulement les fonctions convexes.

Proposition 37.1 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe ssi pour tout $(a_1, \cdots, a_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

Démonstration.

- L'implication $\Leftarrow$ est claire. L'autre se fait par récurrence sur $n \geqslant 2$.
- Supposons f convexe. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose P_n : « pour tout $(a_1, \cdots, a_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) \text{ »}$$

- P_2 est la définition de convexité donc est vraie.

- Soit $n \geqslant 2$ tel que P_n soit vraie.

  Soit $(a_1, \cdots, a_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

  Si $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, le résultat est évident. Supposons $\sigma \neq 0$.

  Comme I est un intervalle, $\frac{\lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_n a_n}{\sigma} \in I$ (barycentre). Par définition de σ, $\sigma + \lambda_{n+1} = 1$. P_2 assure alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i\right) \sigma f\left(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) + \lambda_{n+1} f(a_{n+1})$$

  Par définition de σ, $\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{\sigma} = 1$, P_n permet de conclure.

  Donc P_{n+1} est vraie et le principe de récurrence assure le résultat. ■

37.2 Propriétés géométriques

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$.

On appelle A, B et C les points du graphe de f d'abscisses respectives, x, y et z, et M le point de la corde $[AC]$ de même abscisse que B.

Comme $y \in]x, z[$, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda) z$.

L'ordonnée du point M est alors $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(z)$, donc M est situé au dessus du point B ssi f est convexe.

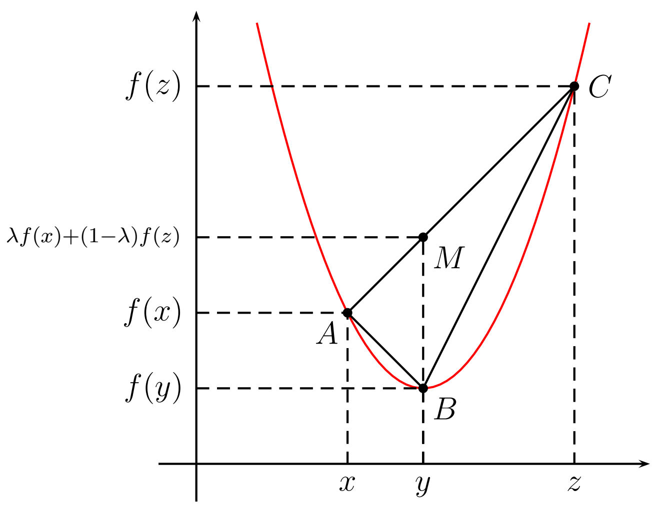


FIGURE 37.1 – Convexité

Proposition 37.2 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ de graphe Γ.

f est convexe ssi pour tout couple (A, B) de points de Γ, l'arc de Γ délimité par A et B est situé sous la corde $[AB]$.

Proposition 37.3 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ de graphe Γ.

Pour tout $x \in I$, on note A_x le point de Γ d'abscisse x.

f est convexe ssi pour tout $A \in \Gamma$, la fonction qui à tout $x \in I$ privé de l'abscisse de A, associe la pente de (AA_x) est croissante.

Plus simplement, ssi pour tout $(x, y, z) \in I^3$ tel que $y < z$ et $y \neq x \neq z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

37.3 Conditions suffisantes de convexité

<u>Théorème 37.1</u> *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable est convexe ssi f' est croissante.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons f est convexe. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

Par la proposition 37.3, pour tout $x \in]a, b[$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ et } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

La fonction f étant dérivable en a et b, on conclut directement que

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b)$$

Donc f' est croissante.

$\Leftarrow$ Si f' est croissante, soit $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$.

Comme f est dérivable sur $[x, y]$ et sur $[y, z]$, le théorème des accroissements finis assure l'existence de $\alpha \in]x, y[$ et $\beta \in]y, z[$ tel que

$$f'(\alpha) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ et } f'(\beta) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Comme $\alpha \leqslant \beta$, $f'(\alpha) \leqslant f'(\beta)$.

D'où $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$. On conclut alors avec la proposition 37.3. ∎

Proposition 37.4 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe est dérivable.

Le graphe de la fonction f est situé au-dessus de ses tangentes.

Remarque 37.2 L'intérêt de connaître la convexité d'une fonction est de pouvoir démontrer très rapidement des inégalités mettant en jeu cette fonction.

Exemple 37.1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

La fonction exponentielle est convexe (sa dérivée est clairement croissante) donc sont graphe est situé au-dessus de sa tangente en 0, ie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant \exp'(0)x + \exp(0) = 1 + x$.

Exemple 37.2 Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

La restriction de sin à $[0, \frac{\pi}{2}]$ est concave puisque sa dérivée seconde est négative. Il s'ensuit que le graphe de cette fonction est situé en dessous de sa tangente à l'origine dont une équation est $y = x$, et au-dessus de sa corde qui relie les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$, dont une équation est $y = \frac{2x}{\pi}$.

D'où le résultat.

Chapitre 38

Fonctions complexes d'une variable réelle

38.1 Algèbre des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Définition 38.1 Soit $E \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition E toute application de $E \to \mathbb{C}$.

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On munit l'ensemble des fonctions complexes définies sur E des lois usuelles, qui font de $\mathbb{C}^E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un anneau commutatif.

Proposition 38.1 Les éléments inversibles pour la multiplication sont exactement les fonctions ne s'annulant pas sur E.

Comme dans le cas des fonctions réelles, il existe des diviseurs de 0.

Définition 38.2 Soit $g \in \mathbb{C}^E$. On associe à g des fonctions $E \to \mathbb{C}$ en posant pour tout $x \in E$:

$$\Re(f)(x) = \Re(f(x)), \quad \Im(f)(x) = \Im(f)(x) \text{ et } \overline{g}(x) = \overline{g(x)}$$

Définition 38.3 On dit qu'une fonction $E \to \mathbb{C}$ est bornée ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

38.2 Limites des fonctions complexes

Définition 38.4 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- On dit que f admet L comme limite en $a \in \overline{I}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

- Si I est non majorée, on dit que f admet L comme limite en $+\infty$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant N \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

- Si I est non minoré, on dit que f admet L comme limite en $-\infty$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant N \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 38.1 Les notations utilisées sont les mêmes que dans le cas réel, et les propriétés élémentaires de la limite restent vraies.

En particulier, il y a toujours unicité de la limite si elle existe. De même, si f admet une limite en $a \in \mathbb{R}$, elle est bornée au voisinage de a.

Proposition 38.2 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathcal{A}(I)$ et $L \in \mathbb{C}$.

Si f admet L comme limite en a alors $|f|$ admet $|L|$ comme limite en a.

Remarque 38.2 Comme dans le cas des suites complexes, la contraposée du résultat précédent sert souvent pour prouver qu'une fonction complexe n'admet pas de limite en un point.

Proposition 38.3 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathcal{A}(I)$ et $L \in \mathbb{C}$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ssi $\lim\limits_{x \to a} \Re(f)(x) = \Re(L)$ et $\lim\limits_{x \to a} \Im(f)(x) = \Im(L)$.

Remarque 38.3 Lorsqu'on dit qu'une fonction réelle admet une limite en un point, on ne préjuge pas de son caractère réelle ou appartenant à $\{\pm\infty\}$. En revanche, pour une fonction complexe, une limite est nécessairement complexe.

Cette dissymétrie du vocabulaire peut conduire à des erreurs lorsqu'on s'intéresse aux problèmes d'existence. Par exemple, bien que Id *et* $-\mathrm{Id}$ *admettent des limites en $+\infty$, ce n'est pas le cas de* $(1 - i)\,\mathrm{Id}$.

Les théorèmes de stabilité algébrique de la notion de limite se généralisent sans problème : si $f, g : I \to \mathbb{C}$ tendent en $a \in \mathcal{A}(I)$ vers L et L' et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + g$, fg, λf tend vers $L + L'$,LL' et λL. De plus si $L' \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et tend vers $\frac{L}{L'}$.

Si $L' = 0$, on peut seulement dire que $\frac{1}{|f|}$ est définie au voisinage de a et admet $+\infty$ comme limite en a.

38.3 Continuité

Définition 38.5 Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue en $a \in I$ ssi f admet une limite en a (nécessairement égale à $f(a)$).

On dit que f est continue si elle est continue en tout point de I. On note $C^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $I \to \mathbb{C}$.

Proposition 38.4 Une fonction complexe est continue en un point a de sont domaine de définition ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

De plus, si f est continue en a, $|f|$ aussi.

38.4 Dérivation

Définition 38.6 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. La fonction f est dite dérivable en a ssi la limite en a de

$$\begin{cases} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

existe. Quand c'est le cas, elle est appelée nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

La fonction f est dite dérivable ssi elle l'est en tout point de I. Dans ce cas, la fonction $a \mapsto f'(a)$ est appelée dérivée de f et notée f'.

Remarque 38.4 *Les propriétés élémentaires de la notion de dérivée sont toujours vraies.*

En particulier, la dérivabilité en un point assure la continuité en ce point, la réciproque étant fausse.

On peut aussi définir, lorsqu'elles existent les dérivées successives d'une fonctions, puis les classes $C^n(I, \mathbb{C})$ et $C^\infty(I, \mathbb{C})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et I intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Proposition 38.5 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont. Le cas échéant, $f' = \Re(f)' + i\Im(f)'$.

De même $f \in C^n(I)$ ssi $\Re(f), \Im(f) \in C^n(I)^2$ et, le cas échéant, $f^{(n)} = \Re(f)^{(n)} + i\Im(f)^{(n)}$.

Remarque 38.5 *On retrouve toutes les formules de calculs de dérivées (n^e ou non) d'une somme ou d'un produit (la formule de Leibniz reste vraie). Attention au théorème de Rolle qui devient faux.*

Exemple 38.1 On considère :

$$g : \begin{cases} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{it} \end{cases}$$

On sait que g est indéfiniment dérivable et $g(0) = g(2\pi)$.

Si le théorème de Rolle s'appliquait, on aurait $c \in]0, 2\pi[$ tel que $i\mathrm{e}^{ic} = 0$, ce qui est absurde.

On admet le résultat suivant, dont les hypothèses ne sont pas optimales, mais suffisantes pour l'usage qu'on en aura.

THÉORÈME 38.1 *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$ *et* $M \in \mathbb{R}$. *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *dérivable telle que* $|f'| \leqslant M$ *vérifie*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b - a)$$

COROLLAIRE 38.1 *Toute fonction définie et dérivable sur un intervalle est constante ssi sa dérivée est nulle.*

Chapitre 39

Intégrale au sens de Riemann

39.1 Fonctions définies par morceaux

39.1.1 Introduction

Motivation

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f définie sur $[a, b]$; qu'on suppose continue et positive.

L'objectif est d'associer à f un réel représentant l'aire comprise entre l'axe des abscisses, le graphe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ dans le repère de travail. Pour ce faire, on partitionne $[a, b]$ en segments sur lesquels on remplace f par une fonction constante bien choisie.

Une approximation du réel cherché est la somme des aires des rectangles figurant sur le schéma. Il est aussi raisonnable de penser que plus le diamètre des intervalles de la subdivision est petit, meilleure est l'approximation, encore faut-il bien choisir les hauteurs des rectangles de la construction !

Subdivisions d'un segment

Définition 39.1 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute suite strictement croissante finie de points de $[a, b]$ donc le premier terme est a et le dernier b.

Si σ et σ' sont deux subdivisions du segment $[a, b]$, on dit que σ est plus fine que σ' ssi tout point de σ' est un point de σ.

Proposition 39.1 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

Il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que σ et σ'.

Démonstration. On a $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ et $\sigma' = (y_0, \cdots, y_m)$

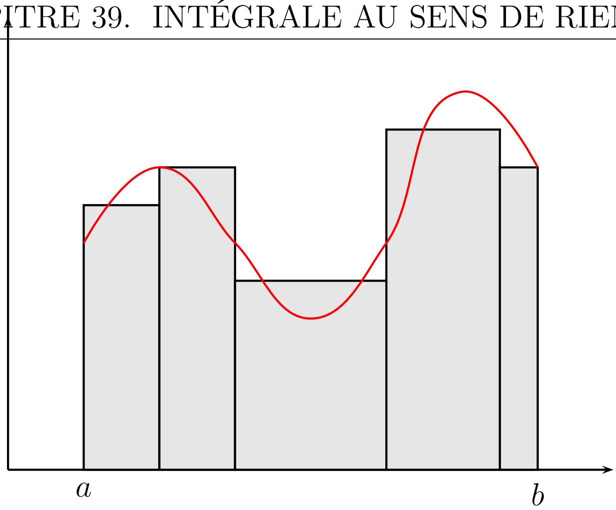


FIGURE 39.1 – Approximation

On pose $S_\sigma = \{x_0, \cdots, x_n\}$ et $S_{\sigma'} = \{y_0, \cdots, y_m\}$.

On pose aussi $E = S_\sigma \cup S_{\sigma'}$. On a alors $E = \{z_1, \cdots, z_r\}$ avec $z_1 < \cdots < z_r$.

$(z_1, \cdots, z_r)$ est alors une subdivision plus fine que σ et σ'. ■

Définition 39.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $(x_0, \cdots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$.

On appelle pas d'une telle subdivision le réel $\delta = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i - x_{i-1}|$.

On dit qu'une subdivision est régulière ssi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\delta = |x_i - x_{i-1}|$. On a alors pour tout i, $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$.

39.1.2 Fonctions en escalier

Présentation

Définition 39.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On dit que f est en escaliers ssi il existe une subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ de $[a, b]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ soit constante.

Une telle subdivision adaptée à la fonction f.

Proposition 39.2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à f est adaptée à f.

Démonstration. Soit σ adaptée à f. On peut se limiter au cas où σ' vaut σ plus un point y.

On pose $A = \{i \in [\![0, n]\!], x_i < y\}$ qui est non vide majoré donc qui admet un plus grand élément j.

On a $x_j < y < x_{j+1}$. f est constante sur $]x_j, x_{j+1}[$ donc sur $]x_j, y[$ et $]y, x_{j+1}[$, d'où le résultat. ■

Remarque 39.1 Si $\mathcal{F}$ est une famille finies de fonctions en escalier, il existe une subdivision adaptée à tous les éléments de $\mathcal{F}$.

Proposition 39.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f, g en escalier sur $[a, b]$.

Les fonctions $|f|$, $f + g$ et fg sont en escalier sur $[a, b]$. Si de plus f ne s'annule pas, $\frac{1}{f}$ est en escalier sur $[a, b]$.

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 39.4 Soit f en escalier sur $[a, b]$ et $(x_0, \cdots, x_n)$ une subdivision adaptée à f.

Pour tout i, on note $\lambda_i = f|_{]x_{i-1}, x_i[}$. Le réel

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

est indépendant de σ.

Démonstration.

- On note momentanément $I_\sigma(f)$ le réel introduit.
  Soit $\sigma' = \sigma \cup \{y\}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{\sigma'}(f) &= \sum_{i=1}^{j} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) + \lambda_{j+1}(y - x_j) + \lambda_{j+1}(x_{j+1} - y) + \sum_{i=j+2}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{j} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) + \lambda_{j+1}(x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+2}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= I_\sigma(f) \end{aligned}$$

  Donc, si σ' est plus fine que σ, $I_{\sigma'} = I_\sigma$.
- Soient σ et σ' deux subdivisions. Il existe σ'' plus fine que σ et σ'.
  On a vu que $I_\sigma(f) = I_{\sigma''}(f)$ et $I_{\sigma'}(f) = I_{\sigma''}(f)$, d'où le résultat. ■

<u>Définition 39.4</u> Le réel $I(f)$ précédent est appelé intégrale de f au sens de Riemann.

Remarque 39.2 $I(f)$ ne change pas quand on change un nombre fini de points de f.

Proposition 39.5 I est linéaire : pour tout (λ, f, g) en escalier, $I(\lambda f + g) = \lambda I(f) + I(g)$.

Proposition 39.6 Si f et g sont en escalier et si $f \leqslant g$ alors $I(f) \leqslant I(g)$.

Proposition 39.7 Si f est en escalier, $|I(f)| \leqslant I(|f|)$.

39.1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 39.5 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux ssi elle est continue sauf en un nombre fini de points où elle admet une limite à gauche et à droite.

Remarque 39.3 *Une fonctions est dite continue par morceaux ssi il existe une subdivision (dite adaptée) telle que f restreinte à chaque intervalle de la subdivision soit continue et admette une limite finie en chacun des points de la subdivision.*

Proposition 39.8 Une fonction continue par morceaux est bornée.

Démonstration. Il existe une subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ adaptée à f.

$f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ admet une limite à droite en x_i et à gauche en x_{i+1} donc se prolonge en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ donc bornée.

Ainsi, f est bornée. ∎

Proposition 39.9 L'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a, b]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau commutatif.

39.2 Approximation uniforme d'une fonction

39.2.1 Uniforme continuité

Définition 39.6 Soit I un intervalle et $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que f est uniformément continue si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$ vérifiant $|x - y| \leqslant \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 39.4 *Toute fonction uniformément continue est continue. Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

THÉORÈME 39.1 *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.*

39.2.2 Application à l'approximation uniforme de fonctions

THÉORÈME 39.2 *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.*

Il existe φ et ψ deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ tel que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Démonstration.

- On suppose f continue.

– Comme f est continue sur un segment, elle est uniformément continue. Donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$ vérifiant $|x-y| \leqslant \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \eta$. On définit g en escalier sur $[a, b]$ par :
– Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $g|_{[a+i\frac{b-a}{n}, a+(i+1)\frac{b-a}{n}[} = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$.
– $g(b) = f(b)$.
– On vérifie que $|f - g| \leqslant \varepsilon$.
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $x \in \left[a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right[$.
Par définition, $\left|x - \left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \eta$.
Donc $\left|f(x) - f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$.
Donc $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$.
Donc $|f|_{[a,b[} - g|_{[a,b[}| \leqslant \varepsilon$.
De plus, $f(b) - g(b) = 0$ donc $|f(b) - g(b)| \leqslant \varepsilon$.
Finalement, $|f - g| \leqslant \varepsilon$.
– On a $g - \varepsilon \leqslant f \leqslant g + \varepsilon$. $g - \varepsilon$ et $g + \varepsilon$ sont en escalier et leur différence est plus petite que ε.

• On ne suppose plus f continue.
Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose :

$$h_i : \begin{cases} [x_i, x_{i+1}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \quad \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}[\\ x_i & \mapsto & \lim\limits_{x_i^+} f \\ x_{i+1} & \mapsto & \lim\limits_{x_{i+1}^-} f \end{cases}$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. h_i est continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$. Il existe donc deux fonctions φ_i et ψ_i en escalier sur $[x_i, x_{i+1}]$ telles que $\varphi_i \leqslant h_i \leqslant \psi_i$ et $\psi_i - \varphi_i \leqslant \varepsilon$.
On définit alors φ par :
– pour tout $i \in [\![0, n-1$
$rbracket$, $\varphi|_{]x_i, x_{i+1}[} = \varphi_{i]x_i, x_{i+1}[}$.
– pour tout $i \in [\![0, n$
$rbracket$, $\varphi(x_i) = f(x_i)$.
On définit ψ de même.
On remarque que φ et ψ sont en escalier, que $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ et $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$. ■

39.3 Intégrale de Riemann

39.3.1 Présentation

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ continue par morceaux.
On note $\mathscr{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.
On pose $\mathscr{A} = \{\varphi \in \mathscr{E}([a, b]), \varphi \leqslant f\}$.
On pose $\mathscr{I} = \{I(\varphi), \varphi \in \mathscr{A}\}$.

- On sait qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m \leqslant f \leqslant M$.
  - $m \in \mathscr{A}$ et $m(b - a) \in \mathscr{I}$ donc $\mathscr{A}$ et $\mathscr{I}$ ne sont pas vides.
  - Soit $x \in \mathscr{I}$.
    Il existe $\varphi \in \mathscr{A}$ tel que $x = \mathscr{I}(\varphi)$.
    $\varphi \in \mathscr{E}([a, b])$ et $\varphi \leqslant f$.
    Or $f \leqslant M$ donc $\varphi \leqslant M$.
    Donc $I(\varphi) \leqslant M(b - a)$. Donc $x \leqslant M(b - a)$.
    Donc $\mathscr{I}$ est majoré par $M(b - a)$.
  - $\mathscr{I}$ admet donc une borne supérieure notée S.
  - On pose $\mathscr{B} = \{\varphi \in \mathscr{E}([a, b]), f \leqslant \varphi\}$ et $\mathscr{J} = \{I(\varphi), \varphi \in \mathscr{B}\}$.
    On montre de même que $\mathscr{J}$ admet une borne inférieure notée I.
    On dit qu'une fonction est intégrable si et seulement si $S = I$. C'est le cas pour les éléments de $\mathscr{E}([a, b])$ mais pas pour toutes les fonctions bornées.
- Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a, b])$ tel que $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$.
  - Par construction, $\varphi - \varepsilon \leqslant f$.
    En particulier, $\varphi - \varepsilon \in \mathscr{A}$ donc $I(\varphi - \varepsilon) \in \mathscr{I}$.
    Donc $I(\varphi - \varepsilon) \leqslant S$ donc $I(\varphi) \leqslant S - \varepsilon(b - a)$.
  - Par construction $f \leqslant \varphi + \varepsilon$.
    Soit $\psi \in \mathscr{A}$. On a $\psi \leqslant f$ donc $\psi \leqslant \varphi - \varepsilon$.
    Donc $I(\psi) \leqslant I(\varphi) + \varepsilon(b - a)$.
    Donc $\mathscr{I}$ est majoré par $I(\varphi) + \varepsilon(b - a)$.
    Donc $S \leqslant I(\varphi) + \varepsilon(b - a)$.
  - Finalement, $|S - I(\varphi)| \leqslant \varepsilon(b - a)$.
- Le réel S est appelé intégrale de f et noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque 39.5

- *Si on prend $\varepsilon \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $\varphi \in (\mathscr{E}([a, b]))^{\mathbb{N}}$ tel que :*
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
  - *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f - \varphi_n| \leqslant \varepsilon_n$.*

  Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I(\varphi_n) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
- *Soit $\varepsilon \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.*

Il existe $\varphi \in (\mathscr{E}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f - \varphi_n| \leqslant \varepsilon_n$. *On peut même imposer à* φ *de vérifier : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \leqslant f$, *ou pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geqslant f$.

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on introduit* $b_n \in (\mathscr{E}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ *définie par :*
  – *Pour tout* $i \in [\![0, n-1]\!]$, $b_n|_{[a+i\frac{b-a}{n}, a+(i+1)\frac{b-a}{n}[} = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$.
  – $b_n(b) = f(b)$.
  La preuve du théorème et la première remarque assurent que $(I(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\int_a^b f(t)\,dt$ *quand* f *est continue.*

<u>Théorème 39.3</u> *Soit* $f \in C^0([a,b])$.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Remarque 39.6

- *Le théorème est juste si la somme est indicée par* $[\![1, n]\!]$.
- *Le théorème permet de calculer des limites de suites.*

Exercice : Calculer, si elle existe, la limite de $S = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On note que :

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{cases}$$

est continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$$

Le théorème de Riemann assure que $\lim_{+\infty} S = \int_0^1 f(t)\,dt = \ln(2)$.

39.3.2 Propriétés de l'intégrale

<u>Théorème 39.4</u> *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues par morceaux sur* $[a,b]$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,d \int_a^b g(t)\,dt$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n \in \mathscr{E}([a,b])$ tel que $|f - \varphi_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\psi_n \in \mathscr{E}([a,b])$ tel que $|g - \psi_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

On note que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda f + g - (\lambda\varphi_n + \psi_n)| \leqslant \frac{|\lambda|-1}{n}$.

Comme $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, $(I(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, $(I(\psi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ et $(I(\lambda\varphi_n+\psi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,dt$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I(\lambda\varphi_n + \psi_n) = \lambda I(\varphi_n) + I(\psi_n)$.

Donc $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$. ∎

<u>Théorème 39.5</u> *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, c]$.*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

<u>Théorème 39.6</u> *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ telles que $f \leqslant g$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

Démonstration.

- Soit h une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b]$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n \in \mathscr{E}([a, b])$ tel que $|h-\varphi_n| \leqslant \frac{1}{n}$ et $h \leqslant \varphi_n$.
  Comme $h \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \geqslant 0$ donc $(I(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.
  Comme $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, $(I(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int abh(t)\,dt$.
  Donc $\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt \geqslant 0$.
- $g - f \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b (g - f)(t)\,dt \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$. ∎

Corollaire 39.1 *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Démonstration. $|f| - f \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,dt$.

$|f| + f \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt \geqslant -\int_a^b f(t)\,dt$.

Donc $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt \geqslant \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$. ∎

Application : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

$$\left|\int ab(fg)(t)\,dt\right| \leqslant (\sup_{[a,b]}|g|)\int_a^b |f(t)|\,dt$$

Démonstration. On note que $|g| \leqslant \sup\limits_{[a,b]}|g|$.

Donc $|fg| \leqslant (\sup\limits_{[a,b]}|g|)|f|$.

Donc :

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leqslant (\sup_{[a,b]}|g|)\int_a^b |f(t)|\,dt$$

On en déduit le résultat. ∎

Remarque 39.7 En particulier,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt\right| \leqslant \sup_{[a,b]}|g|$$

COROLLAIRE 39.2 *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in C^0([a, b])$ positive.*

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \text{ ssi } f = 0$$

Remarque 39.8 Cela implique que, si f est continue, positive et non nulle, son intégrale est strictement positive.

Démonstration.

- Si $f = 0$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$
- Si $f \neq 0$, il existe un point de $[a, b]$ où f prend une valeur strictement positive notée λ.
  Comme f est continue, il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < c < d < b$ et $f|_{[c,d]} \geqslant \frac{\lambda}{2}$.
  On a :
  $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt + \int_d^b f(t)\,dt$$
  Comme $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_d^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
  Comme $f|_{[c,d]} \geqslant \frac{\lambda}{2}$ donc $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt \geqslant \frac{\lambda}{2}(d-c)$.
  Finalement,
  $$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \frac{\lambda}{2}(d-c) > 0$$
  Donc :
  $$\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$$ ∎

39.3.3 Extension de la notation $\int$

Soit I un intervalle et $f \in C^0(I)$. Soit $(a,b) \in I^2$.
Par convention,
- Si $a < b$, $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f(t)\,dt$.
- Si $a = b$, $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.
- Si $a > b$, $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$.

Seules restent vraies la linéarité de l'intégrale, et le relation similaire à celle de Chasles.

39.4 Calcul numérique d'intégrales

39.4.1 Objectif

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

On introduit la subdivision régulière de $[a,b]$ en n pas $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et on remplace f sur $[a_i, a_{i+1}[$ par une fonction P_i dont on sait calculer une primitive et dont le graphe est proche de celui de f.

On estime alors l'intégrale de f comme la somme des intégrales des prolongements par continuité des P_i sur $[a_i, a_{i+1}]$ notés $\widetilde{P_i}$.

Autrement dit, on approxime l'intégrale de f par

$$J_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{P_i}$$

L'objectif est de montrer que la suite J_n converge vers l'intégrale de f et de donner une majoration de l'erreur commise.

39.4.2 Méthode des rectangles

Ici, on prend P_i la fonction constante égale à $f(a_i)$ sur $[a_i, a_{i+1}[$.

On a $J_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$.

<u>THÉORÈME 39.7</u> *Si $f \in C^1([a,b])$, on a :*

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{[a,b]} |f'|$$

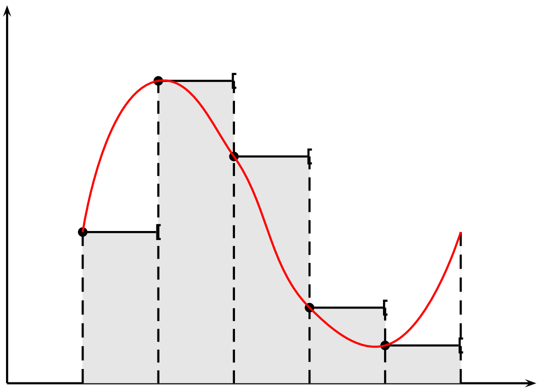


FIGURE 39.2 – Méthode des rectangles

Démonstration. On estime l'erreur commise sur chaque intervalle. On note donc :

$$E_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f - \frac{b-a}{n} f(a_i)$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Comme f est C^1, une intégration par parties assure :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f = [(t-a_{i+1})f(t)]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} (t-a_{i+1})f'(t)\,dt$$

Donc

$$\begin{aligned}
|E_i| &= \left| - \int_{a_i}^{a_{i+1}} (t-a_{i+1})f'(t)\,dt \right| \\
&\leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} (a_{i+1}-t)|f'(t)|\,dt \\
&\leqslant \sup_{[a,b]} |f'| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (a_{i+1}-t)\,dt \\
&\leqslant \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sup_{[a,b]} |f'|
\end{aligned}$$

En sommant, on a le résultat. ■

39.4.3 Méthode des trapèzes

Ici, on prend P_i la fonction affine coïncidant avec f en a_i et a_{i+1}.
Ici,

$$J_n = \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) + \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$$

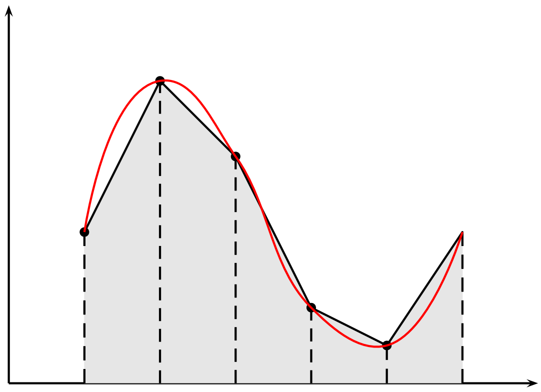


FIGURE 39.3 – Méthode des trapèzes

THÉORÈME 39.8 *Si f est C^2,*

$$\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{[a,b]}|f''|$$

Démonstration. On pose

$$E_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f - \frac{b-a}{2n}(f(a_i)+f(a_{i+1}))$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Comme f est C^2, on mène deux intégrations par parties, dont une avec une constante C à fixer ultérieurement.

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f = \left[\left(t - \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right) f(t)\right]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(t - \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right) f'(t)\,dt$$

Donc

$$E_i = -\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(t - \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right) f'(t)\,dt$$

Puis, par IPP,

$$E_i = -\left[\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)^2 + C\right) f'(t)\right]_{a_i}^{a_{i+1}} + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)^2 + C\right) f''(t)\,dt$$

On cherche une valeur de C pour que le crochet soit nul. On trouve que $C = -\frac{(a_{i+1}-a_i)^2}{8}$ convient.

Avec cette valeur de C, on a, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}]$,

$$\frac{1}{2}\left(t - \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)^2 + C = \frac{(t-a_i)(t-a_{i+1})}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned}|E_i| &= \left|\frac{1}{2}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(t-a_i)(t-a_{i+1})f''(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(t-a_i)(a_{i+1}-t)|f''(t)|\,dt \\ &\leqslant \frac{\sup_{[a,b]}|f''|}{2}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(t-a_i)(a_{i+1}-t)\,dt \\ &\leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^3}\sup_{[a,b]}|f''(t)|\end{aligned}$$

En sommant, on obtient le résultat. ■

Remarque 39.9 Si $f(b)=f(a)$, on revient à la méthode des rectangles.

39.5 Intégration complexe

39.5.1 Intégration d'une fonction à valeurs complexes

Définition 39.7 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle intégrale de f le complexe

$$\int_a^b f = \int_a^b \Re(f) + i\int_a^b \Im(f)$$

Remarque 39.10 On peut prolonger au cas où $a\geqslant b$. Les propriétés de l'intégrale sur les fonctions réelles assurent de plus que la propriété de Chasles et l'invariance de l'intégrale d'une fonction f continue par morceaux par modification d'un nombre finie de ses valeurs restent vraies.

Théorème 39.9 *Soit f et $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ continues par morceaux et $\mu\in\mathbb{C}$.*

$$\int_a^b (f+\mu g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt$$

Remarque 39.11 L'application qui à une fonction continue par morceaux associe son intégrale est une forme linéaire.

Proposition 39.10 Soit a,b tel que $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a b|f(t)|\,dt$$

Remarque 39.12 La démonstration n'est pas la même que dans $\mathbb{R}$.

39.5.2 Liens entre intégration et dérivation

<u>Théorème 39.10</u> *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$.*

$$F : \begin{cases} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{cases}$$

est l'unique primitive de f nulle en a.

Remarque 39.13 Les formules d'IPP et de changement de variables sont encore valables.

Exemple 39.1 Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Calculer une primitive $t \mapsto \frac{1}{t-\alpha}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On pose $\alpha = a + ib$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{t-\alpha} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + \frac{ib}{(t-a)^2+b^2}$$

Or

$$\int \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,dt + i\int \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,dt = \frac{\ln((t-a)^2+b^2)}{2} + i\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + K$$

En revenant aux notations de départ,

$$\int \frac{1}{t-\alpha}\,dt = \ln|t-\alpha| + i\arctan\left(\frac{t-\Re(\alpha)}{\Im(\alpha)}\right) + K$$

<u>Théorème 39.11</u> Taylor avec reste intégral *Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1}. Pour tout $a, b \in I^2$, on a :*

$$f(b) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

En particulier, on retrouve l'inégalité de Taylor-Lagrange, ie, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

Remarque 39.14

- *Ce théorème se démontre comme dans le cas des fonctions réelles.*
- *On retrouve l'inégalité des accroissements finis*
- *On rappelle que l'égalité est fausse dans $\mathbb{C}$.*

Chapitre 40

Développements limités

40.1 Présentation

Définition 40.1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de a à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a ssi il existe $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} \lambda_k (x-a)^k}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{\underset{x \to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)}_{\text{reste}}$$

Remarque 40.1 Si f admet un développement limité à l'ordre n alors elle en admet un à tout ordre $m \leqslant n$.

De plus, il existe des fonctions sans développement limité à un ordre donné en un point donné.

Exemple 40.1

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \ln(|x|) \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{cases}$$

Si f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 alors il existe a, b, c tel que $f(x) = a + bx + cx^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} a + bx + cx^2 = a$ donc $a = 0$.

D'où $\frac{f(x)}{x} = b + cx + \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\mathrm{o}}(x)$ et on a aussi $b = 0$.

Enfin, $\frac{f(x)}{x^2} = c + \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\mathrm{o}}(1)$ donc $c = -\infty$, ce qui est absurde.

<u>THÉORÈME 40.1</u> FORMULE DE TAYLOR-YOUNG *Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, f définie sur un voisinage V de a à valeurs dans $\mathbb{K}$ et C^{n+1}.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$$

Démonstration. Il existe $\eta > 0$ tel que $[a-\eta, a+\eta] \subset V$. $|f^{(n+1)}|$ est continue donc bornée sur ce segment par M.

Soit $x \in [a-\eta, a+\eta] \setminus \{a\}$.

$$\left| \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} \right| \leqslant \frac{M|b-a|}{(n+1)!}$$

D'où le résultat. ∎

Remarque 40.2

- *Ceci est vrai pour les fonctions C^n ou D^n.*
- *f admet un développement limité à l'ordre 0 en a ssi elle est continue en a*
- *f admet un développement limité à l'ordre 1 en a ssi elle est dérivable en a*
- *Si $f \in D^n$ alors f a un développement limité à l'ordre n en a. La réciproque est fausse.*

Exemple 40.2 On pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{cases}$$

f a un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Remarque 40.3 La formule n'est pas utilisable en pratique, mais elle permet de trouver les développement limité en 0 des fonctions exp, sin, cos, sh, ch et $\ln(1+\cdot)$.

40.2 Stabilité algébrique

On obtient les sommes, différences et produits de développement limité par simples opérations algébriques qui permettent le calcul effectif et la preuve d'existence. On ne perd jamais de précision dans un calcul de développement limité. On appliquera les règles suivantes :

- toujours écrire les termes des développement limité par ordre de précision croissante
- pour une partie régulière donnée, privilégier le reste le plus précis possible

Exemple 40.3 Trouver un développement limité de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{1-x}$ à l'ordre 4 en 0.

On a $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^4)$ et $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^4)$.

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{1-x} &= x + x^2 + x^3 + x^4 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\\ &= x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\end{aligned}$$

Les mêmes règles s'appliquent pour le calcul de développement limité d'une composée, mais les développement limité intermédiaires ne sont pas tous calculés aux mêmes points.

Exemple 40.4 Trouver un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\exp \circ \cos$.

$$\begin{aligned}\exp(\cos(x)) &= \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\\ &= \mathrm{e}\exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\end{aligned}$$

On peut se ramener à des calculs en 0 via des translations.

Exemple 40.5 Trouver le développement limité de sin en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 2.

Pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{\sin(x)}{2}$.

Donc

$$\begin{aligned}\sin(\frac{\pi}{3}+x) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)+\frac{1}{2}(x+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\end{aligned}$$

Donc $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}((x-\frac{\pi}{3})^2)$.

Proposition 40.1 Soit g définie au voisinage de $a\in\mathbb{R}$ tel que $g(a)\neq 0$ et que g admette un développement limité en a à l'ordre $n\neq 0$.

Il existe $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0)=0$et $g(x)=g(a)+P(x-a)+\underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$.

Alors $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(a)}\times\frac{1}{1+\frac{P(x-a)}{g(a)}+\underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)} \\ &= \frac{1}{g(a)}\sum_{i=0}^{n}\frac{(P(x-a))^i}{g(a)^i}+\underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)\end{aligned}$$

Exemple 40.6 Trouver le développement limité de tan à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)^{-1} \\ &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) \\ &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) \\ &= x+\frac{x^3}{2}+\frac{5x^5}{24}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5) \\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\end{aligned}$$

40.3 Développement limité des solutions d'une équation fonctionnelle

40.3.1 Présentation

Soit (E) une équation fonctionnelle, $(a,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ et f une solution de (E). On cherche un développement limité de f en a à l'ordre n.

Il faut travailler en trois étapes :

- On introduit un développement limité pour f avec des cœfficients inconnus
- On injecte le développement limité dans (E) et on passe tout d'un côté
- On identifie les cœfficients, ce qui donne des relations sur les inconnues

Remarque 40.4 On a besoin :

- *d'une existence a priori*
- *d'un théorème d'unicité (qui suit)*
- *de savoir calculer les développement limité de dérivées et primitives*

<u>THÉORÈME 40.2</u> *Soit $a \in \mathbb{R}$, f définie sur un voisinage de a, $n \in \mathbb{N}$.*

f admet au plus un développement limité à l'ordre n en a.

Démonstration. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n, \mu_0, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{2n+2}$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}((x-a)^n)$$

On pose $\mathcal{E} = \{k \in [\![0,n]\!], \lambda_k \neq \mu_k\}$ supposé non vide. Il admet un plus petit élément k_0.

On a alors :

$$\lambda_{k_0} - \mu_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)(x-a)^{k-k_0} = \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\mathrm{o}}((x-a)^{n-k_0})$$

La somme tend vers 0, de même que le membre de droite, donc $\lambda_{k_0} = \mu_{k_0}$. D'où $\mathcal{E} = \varnothing$. ∎

Remarque 40.5 Ce théorème et la formule de Taylor permettent de calculer les dérivées successives d'une fonction en un point si elles existent.

40.3.2 Deux exemples classiques

Exemple 40.7 Soit f une fonction définie au voisinage de 0 paire. On suppose qu'elle admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Il existe $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

On a $f = f \circ (-\operatorname{Id})$ donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(1-(-1)^k)x^k = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

D'où, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k(1-(-1)^k) = 0$ donc $\lambda_{2k+1} = 0$.

Donc si f est paire, les développement limité en 0 de f ne comportent que des monômes de puissance paire. De même, si f est impaire, les développement limité en 0 de f ne comportent que des monômes de puissance impaires.

On peut trouver les développement limité de réciproques de fonctions bijectives en utilisant l'équation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ ou $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Exemple 40.8 On considère

$$f : \begin{cases}]-1, \mathrm{e}-1[& \to & \left]-\infty, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[\\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \end{cases}$$

1. f est bijective. En effet, elle est dérivable à dérivée strictement positive, donc strictement monotone.
2. $f' \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable et on exploite $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ pour obtenir que f^{-1} est C^3.
3. On cherche un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0.
   - En utilisant $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.
     Comme f^{-1} est C^3 et $f^{-1}(0) = 0$, il existe a, b, c tel que $f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.
     Or $f(x) = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.
     De plus, pour tout $x \in]-1, \mathrm{e}-1[$, $f^{-1}(f(x)) = x$.
     Donc
     $$\begin{aligned} x &= af(x) + bf^2(x) + cf^3(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(f^3(x)) \\ &= a\left(x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6}\right) + b(x^2 - 3x^3) + cx^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) \end{aligned}$$
     Donc $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$ et $c - 3b + \frac{11}{6} = 0$ donc $c = \frac{8}{3}$.
     D'où $f^{-1}(x) = x + \frac{3x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.
   - En utilisant $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$.
     Comme précédemment, il existe (a, b, c) tel que $f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.
     Pour tout $x \in]-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}}[$, on a $\frac{\ln(1+f^{-1}(x))}{1+f^{-1}(x)} = x$ donc $\ln(1 + f^{-1}(x)) = x(1 + f^{-1}(x))$.

Donc $\ln(1+ax+bx^2+cx^3+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)) = x(1+ax+bx^2+cx^3+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3))$
Donc

$$ax + bx^2 + cx^3 - \frac{a^2x^2 + 2abx^3}{2} + \frac{a^3x^3}{3} = x + ax^2 + bx^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$$

Enfin,

$$x(a-1) + x^2\left(b - \frac{a^2}{2} - a\right) + x^3\left(c - ab + \frac{a^3}{3} - b\right) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$$

On obtient $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{8}{3}$.
Enfin, $f^{-1}(x) = x + \frac{3x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

40.3.3 Développement limité de primitives et dérivées

Soit $a \in \mathbb{R}$, f C^n sur un voisinage de a.

Si f a un développement limité à l'ordre n en a, f' à l'ordre $n-1$ en a et $\int f$ à l'ordre $n+1$ en a, alors, en appliquant Taylor-Young, on obtient que la partie régulière du développement limité de f' à l'ordre $n-1$ en a, on dérive celle du développement limité de f à l'ordre n en a.

De même, on trouve que la partie régulière du développement limité d'une primitive F de f est obtenue en primitivant celle du développement limité de f. Attention à ne pas oublier $F(a)$.

Remarque 40.6 Il existe des fonctions dérivables admettant un développement limité en a à un ordre n donné tel que f' n'ait pas de développement limité en a à l'ordre $n-1$.

On peut retrouver rapidement les développement limité en 0 de arcsin, arccos*,* arctan*,* Argsh*,* Argch *et* Argth.

De plus, si f admet un développement limité à l'ordre n en a, ses primitives en admettent un à l'ordre $n+1$.

Exemple 40.9 Trouver le développement limité de tan à l'ordre 8 en 0.

tan est solution de $f' = 1 + f^2$. Elle est de plus C^∞ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc tan et $\tan'$ admettent des développement limité à tout ordre en 0.

De plus, tan est impaire et $\tan'(0) = 1$ donc il existe a, b, c tel que $\tan(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^8)$.

En utilisant la relation, on trouve les relations $3a = 1$, $5b = 2a$, $7c = a^2 + 2b$, ie $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{15}$, $c = \frac{17}{315}$.

Exemple 40.10 Calculer le développement limité de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0 à l'ordre n.

On remarque que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ et $f(0) = 1$.

Comme f est C^∞, il existe, $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

$$\begin{aligned}
&(1+x)\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} - \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{n-1}) = 0\\
\text{donc } &\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}x^i + \sum_{i=1}^{n} i a_i x^i - \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{n-1}) = 0\\
\text{donc } &\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}x^i + \sum_{i=1}^{n-1} i a_i x^i - \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{n-1}) = 0\\
\text{donc } &\sum_{i=0}^{n-1}((i+1)a_{i+1} + (i-\alpha)a_i)x^i + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

Donc pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $a_{i+1} = \frac{(\alpha - i)a_i}{i+1}$.
Comme $a_0 = 0$, une récurrence finie permet d'achever le calcul.

Chapitre 41

Primitive d'une fonction réelle

41.1 Lien entre primitive et intégrale

<u>Théorème 41.1</u> *Soit I un intervalle, $f \in C^0(I)$ et $a \in I$.*
f admet une primitive nulle en a et cette primitive est :

$$F : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{cases}$$

Démonstration. Soit $x \in I$. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + h \in I$.

$$\begin{aligned} \Delta_h &= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt - hf(x)\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \end{aligned}$$

Donc $|\Delta_h| \leqslant \frac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt$.

Donc $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme f est continue en x, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[x, x+\eta] \subset I$ et pour tout $t \in [x, x+\eta]$, $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $h \in]0, \eta]$. On note que $[x, x+h] \subset [x, x+\eta]$.

Donc, pour tout $t \in [x, x+h]$, $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Donc :

$$\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leqslant \int_x^{x+h} \varepsilon\, dt$$

Donc $|\Delta_h| \leqslant \varepsilon h$.

On a montré que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \Delta_h = 0$ donc F est dérivable à droite en x et $F_d'(x) = f(x)$.

De même, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \Delta_h = 0$ donc F est dérivable à gauche en x et $F_g'(x) = f(x)$.

Donc $F \in D^1(I)$ et $F' = f$.

De plus, $F(a) = 0$. ■

Remarque 41.1

- *Avant d'intégrer une inégalité i sur un domaine I, on écrit : « pour tout $t \in I$, $i(t)$. »*
- *Une fonction continue admet une primitive.*
- *La continuité est suffisante mais pas nécessaire. En effet, il existe $f_0 \in D^1(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$.*
  f_0' n'est pas continue mais admet une primitive f_0.
- *Il existe des fonctions sans primitive, par exemple :*

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{cases}$$

  On suppose que f admet une primitive F.
  Par définition, F est dérivable sr $[0,1]$ et $F' = f$.
  En particulier $(F|_{[0,1[})' = 0$.
  Donc $F|_{[0,1[}$ est constante, notée C.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x) = C \text{ et } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} F(x) = F(1)$$

  F est continue donc $C = F(1)$.
  Donc F est constante. Donc $f = 0$. Donc f n'admet pas de primitive.
- *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.*
  Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On pose :

$$F : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \end{cases}$$

  Si f est continue, F est dérivable et $F' = f$. Dans le cas général, F n'est pas forcément dérivable, et même si elle l'est, on n'a pas forcément $F' = f$.

COROLLAIRE 41.1 *Soit I un intervalle, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(I)$ et $a \in I$.*

$$\left(F : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{cases}\right) \in C^{k+1}(I)$$

COROLLAIRE 41.2 *Soit I un intervalle, $f \in C^1(I)$ et $(a,b) \in I^2$.*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Démonstration. On pose :

$$\alpha : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt \end{cases} \text{ et } \beta = f - f(a)$$

$\alpha(a) = 0 = \beta(a)$.
β est dérivable et f' est continue donc α est dérivable.

$$\beta' = f' = \alpha'$$

Donc $\alpha = \beta$.
En particulier, $\alpha(b) = \beta(b)$. ■

41.2 Changement de variables

41.2.1 Énoncé

<u>THÉORÈME 41.2</u> *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.*
Soit $\varphi \in C^1([a,b])$ et $f \in C^0(\varphi([a,b]))$.

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

Démonstration. On pose :

$$\alpha : \begin{cases} [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \end{cases} \text{ et } \alpha : \begin{cases} [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt \end{cases}$$

$\alpha(a) = 0 = \beta(a)$.
De plus, $\varphi \in C^1([a,b])$ donc $\varphi' \in C^0([a,b])$ et $f \circ \varphi \in C^0([a,b])$.
Donc $(f \circ \varphi)\varphi' \in C^0([a,b])$ donc α est dérivable.

On pose :

$$\gamma : \begin{cases} \varphi([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{x} f(t)\,dt \end{cases}$$

$f \in C^0(\varphi([a,b]))$ donc γ est dérivable et $\gamma' = f$. Or φ est dérivable donc $\gamma \circ \varphi$ est dérivable donc β est dérivable.

On a $\alpha' = \varphi'(f \circ \varphi) = \beta'$.

On a finalement $\alpha = \beta$. En particulier, $\alpha(b) = \beta(b)$. ∎

41.2.2 Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}}$$

On pose :

$$\varphi : \begin{cases} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t+1}{2} \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$$

$\varphi \in C^1([-1,1])$ et $g \in C^0([0,1])$ donc :

$$I = \int_{-1}^{1} g(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{0}^{1} g(t)\,dt = [\ln(t+\sqrt{t^2+1})]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

41.2.3 Cas à mémoriser

Trinômes du second degré

On utilise un changement de variables affine (forme canonique).

Fractions rationnelles

On essaie de baisser les degrés d'une fraction rationnelle à l'aide d'un changement de variable de type puissance.

Exemple 41.1 On cherche la primitive de :

$$f : \begin{cases}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3}{(x^2-1)(x^4+1)} \end{cases}$$

On pose $u = x^2,\ du = 2x\,dx$. On a :

$$\begin{aligned}\int f(t)\,dt &= \int \frac{x^3\,dx}{(x^2-1)(x^4+1)}\\ &= \int \frac{u\,du}{2(u-1)(u^2+1)}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u-1} + \frac{1}{4}\int \frac{1-u}{u^2-1}\,du\\ &= \frac{\ln|u-1|}{4} - \frac{\ln|u^2+1|}{8} + \frac{\arctan(u)}{4} + C\\ &= \frac{\ln|x^2-1|}{4} - \frac{\ln|x^4+1|}{8} + \frac{\arctan(x^2)}{4} + C\end{aligned}$$

41.2.4 Propriétés géométriques de l'intégrale

Théorème 41.3 *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^0([-a,a])$.*

- *Si f est paire,*
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$
- *Si f est impaire,*
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

Les résultats sont valables pour les fonctions continues par morceaux.

Démonstration. On pose $u = -t$ et $du = -\,dt$

$$\int_0^a f(t)\,dt = -\int_0^{-a} f(-u)\,du = \int_{-a}^{0} f(-u)\,du$$

Si f est paire, $\int_0^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(t)\,dt$.
Donc :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$

Si f est impaire, $-\int_0^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(t)\,dt$.
Donc :

$$0 = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt$$

■

Théorème 41.4 *Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ T-périodique. Soit $a \in \mathbb{R}$.*

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

Démonstration. On a :

$$\int_0^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt$$

On pose $u = t - T$ et $du = dt$.

Donc :

$$\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

Finalement :

$$\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$ ■

<u>THÉORÈME 41.5</u> *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in C^0([a,b])$.*

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\int_0^1 f((b-a)t+a)\,dt$$

41.3 Intégration par parties

41.3.1 Énoncé

<u>THÉORÈME 41.6</u> *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $(f,g) \in (C^1([a,b]))^2$.*

$$\int_a^b (fg')(t)\,dt = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b (f'g)(t)\,dt$$

Démonstration. On pose :

$$F : \begin{cases} [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b (fg')(t)\,dt + \int_a^b (f'g)(t)\,dt - [fg]_a^x \end{cases}$$

On note que $fg \in C^1([a,b])$.

Donc, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x (fg' + f'g)(t)\,dt - [fg]_a^x \\ &= \int_a^x (fg)'(t)\,dt - [fg]_a^x \\ &= 0 \end{aligned}$$ ■

41.3.2 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

<u>THÉORÈME 41.7</u> *Soit I un intervalle et $(a, b) \in I^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{n+1}(I)$.*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Démonstration.

- Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose H_k :

$$\text{´}\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\ \text{ˇ}$$

- Comme $f \in C^1(I)$, $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$ donc H_0 est vraie.
- Soit $k \in \llbracket 0, n-1$ telle que H_k soit vraie. On pose :

$$v : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\dfrac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} \end{cases}$$

  $v \in C^1(I)$. On note que $k+2 \leqslant n+1$ donc $f \in C^{k+2}(I)$ donc $f^{(k+1)} \in C^1(I)$.
  Une intégration par parties conduit à :

$$\int_a^b v'(t) f^{(k+1)}(t)\,dt = [v(t) f^{(k+1)}(t)]_a^b - \int_a^b v(t) f^{k+2}(t)\,dt$$

  Donc :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(t)\,dt$$

  Donc :

$$f(b) = \sum_{p=0}^{k+1} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(t)\,dt$$

  Donc H_{k+1} est vraie.
- Le principe de récurrence finie assure que H_n est vraie. ■

COROLLAIRE 41.3 (INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE) *Soit I un intervalle, $(a, b) \in I^2$, $M \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{n+1}(I)$ tel que $|f^{(n+1)}|$ soit majorée par M.*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Si $a = b$, $0 \leqslant 0$.

On suppose $b < a$ (les calculs sont les mêmes si $a < b$).

Pour tout $t \in [b, a]$, $\frac{|b-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)| \leqslant \frac{M|b-t|^n}{n!}$.

Donc :

$$\int_b^a \frac{|b-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\,dt \leqslant M\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\,dt$$

Donc :

$$\int_b^a \left|\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right|\,dt \leqslant M\left[\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_b^a$$

Donc :

$$\left|\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leqslant M\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Finalement,

$$\left|\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leqslant M\frac{|a-b|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On en déduit le résultat. ∎

Application : On peut trouver des estimations polynômiales globales de fonction. Par exemple, avec $n = 3$, $f = \cos$, $M = 1$, $a = 0$ et $b = 1$, on a :

$$\left|{}^{c}os - 1 + \frac{\mathrm{Id}^2}{2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{Id}^4}{24}$$

Application : Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On écrit l'inégalité de Taylor à l'ordre n entre les points 0 et 1 pour la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t) \in C^{n+1}([0,1])$ et telle que $f^{(n+1)}$ est bornée sur le segment $[0,1]$:

$$\left|\ln(2) - \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right| \leqslant \frac{\sup\limits_{[0,1]}|f^{(n+1)}|}{(n+1)!}$$

On a déjà montré que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $f^{(p)} : t \mapsto \frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(1+t)^p}$.

Donc :

$$\left|\ln(2) + \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\right| \leqslant \frac{n!}{(n+1)!}$$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\right) = -\ln(2)$.

Chapitre 42

Calcul de primitives

42.1 Introduction

42.1.1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 42.1 Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.

On note $\Re(f)$ la fonction $x \mapsto \Re(f(x))$, $\Im(f) = x \mapsto \Im(f(x))$ et $\overline{f} = x \mapsto \overline{f(x)}$.

On dit que f est continue ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.

f est dérivable ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont. On a alors $f' = \Re(f)' + i\Im(f)'$.

Proposition 42.1 Soit $f : E \to \mathbb{C}$ dérivable. $\overline{f}$ est dérivable et $\overline{f}' = \overline{f'}$.

Exemple 42.1 Soit $f : E \to \mathbb{C}$. On définit $\varphi : E \to \mathbb{C}$ par $\varphi = \mathrm{e}^f$.

φ est dérivable et $\varphi' = f'\mathrm{e}^f$.

42.1.2 Notion de primitive

Définition 42.2 Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{K}$.

On appelle primitive de f toute fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que $F' = f$.

Théorème 42.1 *Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Si f admet une primitive F, l'ensemble des primitives de f est$\{F + k, k \in \mathbb{K}\}$.*

On note $F = \displaystyle\int f(x)\,dx + c$.

42.2 Outils de base

Proposition 42.2 Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$. On suppose que f et g admettent des primitives F et G.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $F+G$ est une primitive de $f+g$ et λF de λf.

Exemple 42.2 Calculer $\int \sin^3(t)\,dt$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^3(t) = \frac{3\sin(t)}{4} - \frac{3\sin(3t)}{4}$$

On a donc :

$$\int \sin^3(t)\,dt = -\frac{3\cos(t)}{4} + \frac{\cos(3t)}{12} + c$$

Exemple 42.3 Calculer une primitive de $f : t \mapsto \operatorname{sh}^2(t)\operatorname{ch}^2(t)$.

Pour tout t, $f(t) = \frac{\operatorname{ch}(4t)-1}{8}$ donc :

$$\int f(t)\,dt = \frac{\operatorname{sh}(4t)}{32} - \frac{t}{8} + c$$

Exemple 42.4 Soit A une fonction polynômiale à valeurs dans $\mathbb{R}$, B affine.

Il existe Q polynômiale et $r \in \mathbb{R}$ tel que $A = QB + r$. On a ;

$$\int \frac{A}{B}(x)\,dx = \int Q(x)\,dx + r\int \frac{1}{B}(x)\,dx$$

Par exemple, avec $A = t \mapsto t^3 + t + 1$ et $B = t \mapsto t + 2$. On a $Q = t \mapsto t^2 - 2t + 5$ et $r = 9$ donc

$$\int f(t)\,dt = \frac{t^3}{3} - t^2 + 5t - 9\ln(t+2) + c$$

Proposition 42.3 Si $f = a + ib$ et si A et B sont des primitives de a et b, alors $A + iB$ est une primitive de f.

Exemple 42.5 Calculer une primitive de $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\cos(t)$.

Pour tout t, $f(t) = \mathrm{e}^t\Re(\mathrm{e}^{it}) = \Re(\mathrm{e}^{(1+i)t})$.

Donc $\int f(t)\,dt = \Re\left(\int \mathrm{e}^{(1+i)t}\,dt\right) = \Re(\frac{\mathrm{e}^{(1+i)t}}{i+1}) + c$.

D'où

$$\int f(t)\,dt = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + c$$

42.3 Intégration par parties

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ dérivables. On suppose que $f'g$ et fg' admettent chacune une primitive notée F et G.

Alors $(F+G)' = f'g + fg' = (fg)'$.

Donc

$$\int (f'g)(x)\,dx = f(x)g(x) - \int (fg')(x)\,dx$$

Exemple 42.6 Calculer une primitive de $f : t \mapsto t^2 \mathrm{e}^{-3t}$.
Deux intégrations par parties conduisent à :

$$\begin{aligned}\int f(t)\,dt &= -\frac{t^2\mathrm{e}^{-3t}}{3} + \frac{2}{3}\int t\mathrm{e}^{-3t}\,dt \\ &= -\frac{t^2\mathrm{e}^{-3t}}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{t\mathrm{e}^{-3t}}{3} + \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3}\,dt\right) \\ &= -\frac{t^2\mathrm{e}^{-3t}}{3} - \frac{2t\mathrm{e}^{-3t}}{9} - \frac{2\mathrm{e}^{-3t}}{27} + c\end{aligned}$$

Exemple 42.7 Calculer une primitive de $f : t \mapsto t\,\mathrm{ch}^3(t)$.
Pour tout t, on a $f(t) = \frac{t}{4}(\mathrm{ch}(3t) + 3\,\mathrm{ch}(t))$.
Par IPP, on a :

$$\int f(t)\,dt = \frac{t}{4}\left(\frac{\mathrm{sh}(3t)}{3} + 3\,\mathrm{sh}(t)\right) - \frac{\mathrm{ch}(3t)}{36} - \frac{3\,\mathrm{ch}(t)}{4} + c$$

Exemple 42.8 Calculer une primitive de $f : t \mapsto (t^2+t+1)\mathrm{e}^{-t}\sin(t)$.
On a $f(t) = \Im((t^2+t+1)\mathrm{e}^{(i-1)t})$. Par IPP,

$$\int f(t)\,dt = \Im\left((t^2+t+1)\frac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{i-1} - \int (2t+1)\frac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{i-1}\,dt\right)$$

Après une deuxième IPP et des calculs,

$$\int f(t)\,dt = -\frac{\mathrm{e}^{-t}((t^2+3t+3)\cos(t) + (t^2+t)\sin(t))}{2} + c$$

42.4 Changement de variables

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ admettant une primitive F. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
On pose $J = \{x \in \mathbb{R}, ax+b \in I\}$ et

$$G : \begin{cases} J & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dfrac{F(ax+b)}{a} \end{cases}$$

G est dérivable et $G'(x) = f(ax+b)$ pour tout x.

Exemple 42.9 Calculer une primitive de $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2+2x+4}$.
Pour tout x, $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2+3}$. Donc :

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{u+1}{u^2+3}\,du = \frac{\ln(u^2+3)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + c$$

D'où :

$$\int f(x)\,dx = \frac{\ln(x^2+2x+4)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Exemple 42.10 Calculer une primitive de :

$$f : \begin{cases}]-3,1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}} \end{cases}$$

Pour tout $x \in]-3,1[$, $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{4-(1+x)^2}}$.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{u+2}{\sqrt{4-u^2}}\,du = -\sqrt{4-u^2} + 2\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) + c$$

Et

$$\int f(x)\,dx = -\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

Exemple 42.11 Calculer une primitive de :

$$f : \begin{cases} [5,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3+x+1}{x^2-4x-1} \end{cases}$$

Pour tout $x \in [5,+\infty[$, $x^3+x+1 = (x+4)(x^2-4x-1) + 18x+5$ donc

$$f(x) = x+4+\frac{18x+5}{(x-2)^2-5}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\int \frac{18x+5}{(x-2)^2-5}\,dx &= \int \frac{18u+41}{u^2-5}\,du \\ &= 9\ln(u^2-5) - \frac{41}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right| + c \\ &= 9\ln(x^2-4x-1) - \frac{41}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x-2}{\sqrt{5}-x-2}\right| + c\end{aligned}$$

Donc

$$\int f(x)\,dx = 9\ln(x^2-4x-1) - \frac{41}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x-2}{\sqrt{5}-x-2}\right| + \frac{x^2}{2} + 4x + c$$

Chapitre 43

Équations différentielles

On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

43.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

43.1.1 Présentation

Définition 43.1 Soient (a, b) deux fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On veut étudier l'ensemble des solutions de (E) : $y' = ay + b$ d'inconnue y définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, dérivables.

On a deux problèmes : l'existence et la recherche explicite d'une ou de toutes les fonctions convenables.

Définition 43.2 À (E), on associe l'équation différentielle (H) $y' = ay$ sur I, dite équation homogène associée à (E).

On notera $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H) et $\mathscr{S}_E$ celui de (E).

Théorème 43.1 (Admis) *Toute fonction continue, définie sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{K}$ admet une primitive.*

43.1.2 Propriétés des ensembles de solutions

Théorème 43.2 *On suppose connaître une solution φ_0 de (E). Alors :*

$$\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \varphi_0(x) + \varphi(x) \end{cases}, \varphi \in \mathscr{S}_H \right\}$$

Démonstration. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable.

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{S}_E & \text{ ssi } f' = af + b \\ & \text{ ssi } f' - af = b \\ & \text{ ssi } f' - af = \varphi_0' - a\varphi_0 \\ & \text{ ssi } f' - \varphi_0' = a(f - \varphi_0) \\ & \text{ ssi } f - \varphi_0 \in \mathscr{S}_H \\ & \text{ ssi } f \in \{\varphi_0 + \varphi, \varphi \in \mathscr{S}_H\} \end{aligned}$$ ■

<u>Théorème 43.3</u> *Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et b_1, b_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Si φ_1 est solution de $y' = ay + b_1$ et φ_2 solution de $y' = ay + b_2$.

Alors $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est une solution de $y' = ay + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Corollaire 43.1 *Si φ et ψ sont deux solutions de (H), $\varphi + \psi$ est une solution (H).*

De plus, si φ est une solution de (H) et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\varphi$ est une solution de (H).

43.1.3 Résolution de (E)

Proposition 43.1 Comme a est continue, elle admet une primitive A.

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & c\mathrm{e}^{A(x)} \end{cases}, c \in \mathbb{K} \right\}$$

Démonstration. Soit f dérivable.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (H) & \text{ ssi } f' = af \\ & \text{ ssi } \forall x \in I, \mathrm{e}^{-A(x)} f'(x) - a\mathrm{e}^{-A(x)} f(x) = 0 \\ & \text{ ssi } (\mathrm{e}^{-A} f)' = 0 \\ & \text{ ssi } \exists c \in \mathbb{K}, \forall x \in I, \mathrm{e}^{-A(x)} f(x) = c \\ & \text{ ssi } \exists x \in \mathbb{K}, \forall x \in I, f(x) = c\mathrm{e}^{A(x)} \end{aligned}$$ ■

<u>Théorème 43.4</u> *Comme $b\mathrm{e}^{-A}$ est continue, elle admet une primitive V.*

$$\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{A(x)}(V(x) + c) \end{cases}, c \in \mathbb{K} \right\}$$

Méthode de variation de la constante. Soit $u : I \to \mathbb{K}$ dérivable. Soit $f = u\mathrm{e}^A$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } & f' = af + b \\ \text{ssi } & \forall x \in I, u'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + a(x)u(x)\mathrm{e}^{A(x)} = a(x)u(x)\mathrm{e}^{A(x)} + b(x) \\ \text{ssi } & \forall x \in I, u'(x) = b(x)\mathrm{e}^{-A(x)} \end{aligned}$$

Donc $V\mathrm{e}^A$ est solution particulière de (E). Le théorème 43.2 et la proposition 43.1 concluent. ∎

<u>Théorème 43.5</u> *Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (H) vérifiant $f(x_0) = y_0$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{S}_E$ telle que $f(x_0) = y_0$.

Il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $f = \mathrm{e}^A(V + c)$.

Comme $f(x_0) = y_0$, on a $c = \mathrm{e}^{-A(x_0)}y_0 - V(x_0)$.

Donc $f = \mathrm{e}^A(V(x) - V(x_0) + \mathrm{e}^{-A(x_0)}y_0)$.

Réciproquement, cette fonction convient. ∎

Exemple 43.1 Résoudre :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

- Comme ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, l'ensemble des solutions homogènes est :
$$\left\{ \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & cx \end{cases}, c \in \mathbb{R} \right\}$$
- Tester les fonctions constantes → ça marche pas !
- Soit u dérivable. On pose :
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xu(x) \end{cases}$$

  On trouve que u doit être une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$ ie $\frac{\ln^2(x)}{x} + c$.
  Donc :
$$\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & cx + \dfrac{x\ln^2(x)}{2} \end{cases}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- On veut $f(1) = 3$ et on trouve $c = 3$.
  Donc l'unique solution est :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x + \dfrac{x\ln^2(x)}{2} \end{cases}$$

43.1.4 Résolution numérique (Méthode d'Euler)

Soit a, b continues et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
On considère $y' = ay + b$ avec $y(x_0) = y_0$.
Soit $h > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = x_0 + nh$ et $y_{n+1} = y_n + h(a(x_n)y_n + b(x_n))$.
On espère que $(x_n, y_n)_n$ sont proches du graphe de la solution cherchée.
Il y a trois sources d'erreur :

- Confusion courbe/tangente
- Confusion entre deux courbes de condition initiale très proche.
- Erreurs d'arrondis sur ordinateur

43.2 Équations différentielle du second ordre

43.2.1 Présentation

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq 0$ et h définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue.

On recherche l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, deux fois dérivables et vérifiant $af'' + bf' + cf = h$. On dit alors qu'on veut résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = h(x)$ qu'on notera (E) dans la suite.

L'écriture précédente est conventionnelle : y et x n'ont aucun sens.

On associe à (E) l'équation homogène (H) : $ay'' + by' + cy = 0$ et on note $\mathscr{S}_H$ et $\mathscr{S}_E$ les ensembles de solutions correspondants.

On appelle parfois (H) équation complète associée à (E).

Proposition 43.2 Si φ est solution de (E) alors $\mathscr{S}_E = \{\varphi + \psi, \psi \in \mathscr{S}_h\}$.

Proposition 43.3 Principe de superposition des solutions Soit h_1 et $h_2 : I \to \mathbb{K}$ continues et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

Soit φ_1 (resp. φ_2) une solution de $ay'' + by' + cy = h_1$ (resp. $ay'' + by' + cy = h_2$).

La fonction $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est une solution de $ay'' + by' + cy = \lambda_1 h_1 = \lambda_2 h_2$.

En particulier, la somme de deux solutions de (H) et le produit d'une solution de (H) par un élément de $\mathbb{K}$ sont des solutions de (H).

Théorème 43.6 *Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$. Il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.*

43.2.2 Description des solutions de (H)

On introduit le polynôme $aX^2 + bX + c$ qu'on note Δ et qu'on appelle polynôme caractéristique de (H) (ou de (E)).

On admet alors les trois résultats suivants, le troisième n'ayant de sens que lorsqu'on cherche les solutions réelles d'une équation différentielle.

Théorème 43.7 *On suppose que Δ admet deux racines distinctes α et β dans $\mathbb{K}$.*

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

Théorème 43.8 *On suppose que Δ admet une racine double $\alpha \in \mathbb{K}$.*

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu) e^{\alpha x} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

Théorème 43.9 *On travaille dans $\mathbb{R}$. On suppose que Δ a deux racines non réelles $\alpha \pm i\beta$ avec $\beta \neq 0$.*

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

43.2.3 Cas particulier de second membre

On considère l'équation $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\gamma x}$ avec P un polynôme. On pose $\Delta = aX^2 + bX + c$.

1. Si $\Delta(\gamma) \neq 0$, on cherche la solution sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{\gamma x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
2. Si γ est une racine simple de Δ, on cherche la solution sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{\gamma x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ tel que $Q(0) = 0$.
3. Si γ est une racine double de Δ, on cherche la solution sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{\gamma x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ tel que $Q(0) = Q'(0) = 0$.

Exemple 43.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

On a :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ae^x + be^{2x} \end{cases}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$.
f est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x(2ax + b + ax^2 + bx) = e^x(ax^2 + (2a + b)x + b)$$

$$f''(x) = e^x(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)$$

f est une solution de (E) ssi $-2a = 1$ et $2a - b = 0$ ssi $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -1$.
En particulier, $x \mapsto -(\frac{x^2}{2} + x)e^x$ est une solution particulière de (E) et :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(a - x - \dfrac{x^2}{2}\right) e^x + b e^{2x} \end{array} \right., (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemple 43.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y'' - 4y' + 4y = x^2 \operatorname{ch}^2(x) + 1$.
On a :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (ax + b)e^{2x} \end{array} \right., (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

De plus,

$$x^2 \operatorname{ch}^2(x) + 1 = \frac{x^2 e^{2x}}{4} + \frac{x^2 e^{-2x}}{4} + 1 + \frac{x^2}{2}$$

On résout les équations :

$$\begin{aligned} (E_1)&\colon y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x} \\ (E_2)&\colon y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} \\ (E_3)&\colon y'' - 4y' + 4y = x^2 \\ (E_4)&\colon y'' - 4y' + 4y = 1 \end{aligned}$$

On résout de même que précédemment, les solutions particulières sont :

$$\begin{aligned} f_1&\colon x \mapsto \frac{x^4}{12} e^{2x} \\ f_2&\colon x \mapsto \left(\frac{x^2}{16} + \frac{x}{16} + \frac{3}{128}\right) e^{-2x} \\ f_3&\colon x \mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \\ f_4&\colon x \mapsto \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Par le principe de superposition, les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{16}+\left(\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{x}{64}+\dfrac{3}{512}\right)\mathrm{e}^{-2x}+\left(\dfrac{x^4}{48}+ax+b\right)\mathrm{e}^{2x} \end{cases}, (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Proposition 43.4 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable deux fois et a, b, c réels.

Si φ est solution de $ay''+by'+cy=f$ alors $\Re(\varphi)$ est solution de $ay''+by'+cy=\Re(f)$ et $\Im(\varphi)$ est solution de $ay''+by'+cy=\Im(f)$.

Démonstration. On montre que si φ est solution $\overline{\varphi}$ aussi et on utilise, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\Re(z)=\frac{z+\overline{z}}{2} \text{ et } \Im(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

■

Exemple 43.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y''-y=\sin(x)\operatorname{sh}(x)$.

$$\mathscr{S}_H=\left\{\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{-x} \end{cases}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sin(x)\operatorname{sh}(x)=\frac{\Im(\mathrm{e}^{(i+1)x})}{2}-\frac{\Im(\mathrm{e}^{(i-1)x})}{2}$$

Une solution complexe de $y''-y=\mathrm{e}^{(i+1)x}$ est $x\mapsto \frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{2i-1}$

De même une solution de $y''-y=\mathrm{e}^{(i-1)x}$ est $x\mapsto\frac{\mathrm{e}^{(i-1)x}}{-2i-1}$.

D'où :

$$x\mapsto\frac{1}{2}\Im\left(\frac{\mathrm{e}^{(i+1)x}}{2i-1}+\frac{\mathrm{e}^{(i-1)x}}{2i+1}\right)=x\mapsto-\frac{2\operatorname{sh}(x)\cos(x)}{5}-\frac{\operatorname{ch}(x)\sin(x)}{5}$$

est solution particulière.

In fine,

$$\mathscr{S}_E=\left\{\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{2\operatorname{sh}(x)\cos(x)}{5}-\dfrac{\operatorname{ch}(x)\sin(x)}{5} \end{cases}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Chapitre 44

Étude des arcs paramétrés plans

P est une plan affine euclidien. Le plan vectoriel associé est noté $\overrightarrow{P}$.

44.1 Présentation

44.1.1 Vocabulaire de base

Définition 44.1 Soit I un intervalle, $f \in P^I$.

On dit que f est un arc ou un mouvement. $f(I)$ est le support de l'arc, ou sa trajectoire.

44.1.2 Compléments d'analyse

Définition 44.2

- Soit $f : I \to \overrightarrow{P}$, $\to \in \overrightarrow{P}$ et $t_0 \in \mathcal{A}(I)$.
  On dit que f admet $\overrightarrow{w}$ comme limite en t_0 et on écrit $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = \overrightarrow{w}$ ssi $\lim\limits_{t\to t_0} \|f(t) - \overrightarrow{w}\| = 0$.
- Soit $f : I \to \overrightarrow{P}$, $t_0 \in I$. On pose

$$\varphi : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \to & \overrightarrow{P} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t-t_0}(f(t) - f(t_0)) \end{cases}$$

  f est dérivable en t_0 ssi φ admet une limite en t_0. Le cas échéant, cette limite est appelée dérivée de fe n t_0 notée $f'(t_0)$.

- On peut aussi définir les ensembles $C^n(I, \overrightarrow{P})$ et $D^n(I, \overrightarrow{P})$ comme dans le cas des fonctions réelles.
- Soit $f : I \to P$, $m_0 \in P$ et $t_0 \in \mathcal{A}(I)$. On dit que f admet m_0 comme limite en t_0 ssi $t \mapsto \overrightarrow{m_0 f(t)}$ admet $\overrightarrow{0}$ comme limite en t_0. De plus, si $t_0 \in I$, on pose

$$\varphi : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \to & \overrightarrow{P} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t - t_0}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} \end{cases}$$

On dit alors que f est dérivable en t_0 ssi φ a une limite en t_0. La dérivée de f est une fonction à valeurs dans $\overrightarrow{P}$.

Remarque 44.1 Les propriétés de stabilité algébrique restent valables, de même que la formule de Leibniz pour les produits entre les fonctions scalaires et vectorielles.

Définition 44.3 Soit $f : I \to P$ et $t_0 \in I$. On suppose f suffisamment régulière (D^1).

- On dit que le point de paramètre t_0 est régulier ssi $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
- On dit que le point de paramètre t_0 est singulier ssi $f'(t_0) = \overrightarrow{0}$.
- On dit que l'arc est régulier ssi f' ne prend jamais la valeur $\overrightarrow{0}$.

Définition 44.4 Si f est assez régulière, on appelle $f'(t_0)$ la vitesse en t_0 et $f''(t_0)$ l'accélération en t_0.

44.2 Études locales

44.2.1 Piège

Soit $f : I \to P$, $t_0 \in I$. Étudier f au voisinage de t_0 consiste à étudier la restriction de f sur un voisinage de t_0. En revanche, étudier le support de f au voisinage de $f(t_0)$ consiste à tracer l'intersection du support de définition avec un disque centré en $f(t_0)$. Cette étude demande de chercher les antécédents de $f(t_0)$ par f. Par la suite, on se place dans le cas de la première étude.

44.2.2 Généralisation de la formule de Taylor-Young

Définition 44.5 Soit $f : I \to \overrightarrow{P}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \overline{I}$.

On dit que $f(t) = \underset{t \to t_0}{o}((t - t_0)^n)$ ssi $t \mapsto \frac{1}{(t-t_0)^n} f(t)$ tend vers $\overrightarrow{0}$ en t_0.

Proposition 44.1 Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $\overrightarrow{P}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in I$, il existe $x(t), y(t)$ tel que $f(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$.

$f(t) = \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^n)$ ssi $x(t) = \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^n)$ et $y = \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^n)$.

<u>Théorème 44.1</u> *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in C^n(I, \overrightarrow{P})$, $t_0 \in I$, $g \in C^n(I, P)$.*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^n)$$
$$g(t) = g(t_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} g^{(k)}(t_0) + \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^n)$$

44.2.3 Exploitation géométrique

Soit $f : I \to P$ suffisamment régulière pour les calculs nécessaires.

Soit $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, $f^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$ et $f^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

<u>Théorème 44.2</u> *Alors la tangente au support de l'arc au point de paramètre t_0 est dirigée par $f^{(p)}(t_0)$. En particulier, si t_0 est la paramètre d'un point régulier, la tangente au support de l'arc au point de paramètre t_0 est dirigé par $f'(t_0)$.*

Démonstration. On écrit Taylor-Young à l'ordre p pour f en t_0.

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^p)$$

Donc $\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}(f^{(p)}(t_0) + + \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}(1)$.

Il existe donc un voisinage V de t_0 tel que pour tout $V \setminus \{t_0\}$, $\overrightarrow{f(t_0)f(t)} \neq \overrightarrow{0}$. On a alors

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{f(t_0)f(t)}\right\|}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{|t-t_0|^p} \times \frac{1}{\left\|f^{(p)}(t_0) + \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}(1)\right\|}(f^{(p)}(t_0) + + \underset{t\to t_0}{\mathrm{o}}(1))$$

On trouve alors que si p est pair,

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{f(t_0)f(t)}\right\|}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \frac{1}{\|f^{(p)}(t_0)\|} f^{(p)}(t_0)$$

et si p est impair,

$$\lim_{t\to t_0^+} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{f(t_0)f(t)}\right\|}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \frac{1}{\|f^{(p)}(t_0)\|}f^{(p)}(t_0)$$
$$\lim_{t\to t_0^-} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{f(t_0)f(t)}\right\|}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \frac{1}{\|f^{(p)}(t_0)\|}f^{(p)}(t_0)$$

ce qui assure le résultat dans les deux cas. ■

On suppose maintenant qu'il existe $q \geqslant p+1$ tel que :

- Pour tout $i \in [\![p+1, q-1]\!]$, $f^{(i)}(t_0)$ est colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$.
- $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est une base de $\overrightarrow{P}$.

Dans ce cas, (p,q) s'appelle couple d'entiers caractéristique du point de paramètre t_0.

<u>Théorème 44.3</u> *Si p est pair et q impair, on a un point de rebroussement de première espèce :*

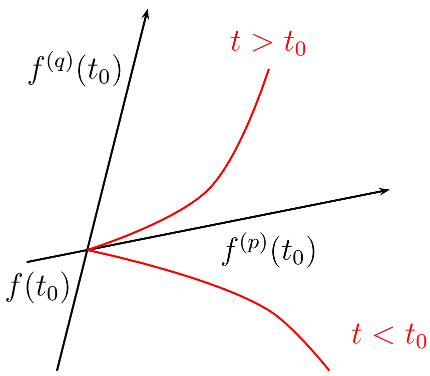


Figure 44.1 – Point de rebroussement de première espèce

Si p et q sont pairs, on a un point de rebroussement de deuxième espèce (voir page suivante)

Si p est impair et q pair, on a un point ordinaire.

Si p et q sont impairs, on a un point d'inflexion.

Remarque 44.2 *Les points de rebroussement sont singuliers. Les points réguliers sont ordinaires ou d'inflexion.*

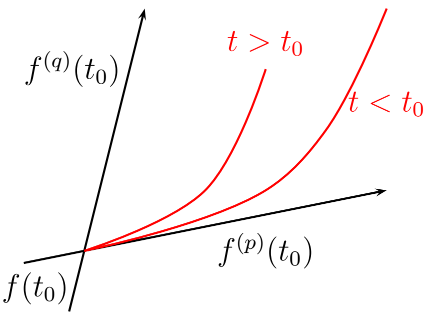


FIGURE 44.2 – Point de rebroussement de deuxième espèce

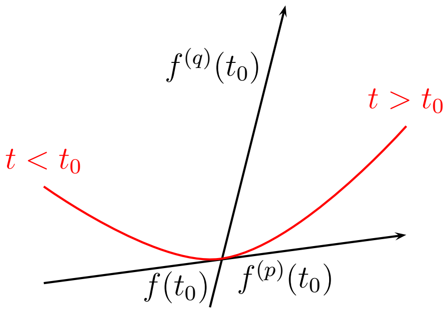


FIGURE 44.3 – Point ordinaire

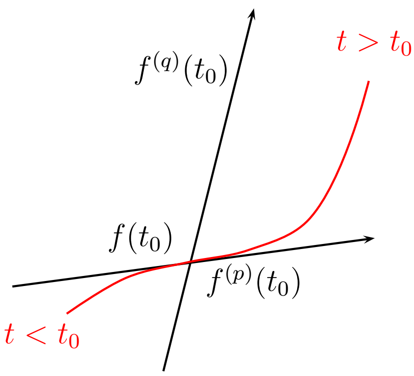


FIGURE 44.4 – Point d'inflexion

Démonstration. Pour tout $i \in [\![p+1, q-1]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(i)}(t_0) = \lambda_i f^{(p)}(t_0)$.

On écrit Taylor-Young pour f en t_0 à l'ordre q :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + f^{(p)}(t_0) \sum_{i=p+1}^{q-1} \lambda_i \frac{(t-t_0)^i}{i!} + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + \underset{t \to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^q)$$

Pour tout $t \in I$, on note $(X(t), Y(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans $(f(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$. La formule précédente assure que :

$$X(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + \sum_{i=p+1}^{q-1} \lambda_i \frac{(t-t_0)^i}{i!} + \underset{t \to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^q) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!}$$

$$Y(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + \underset{t \to t_0}{\mathrm{o}}((t-t_0)^q) \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

■

44.2.4 Branches infinies d'un arc

Définition 44.6 Soit $f : I \to P$, $t_0 \in \mathcal{A}(I)$, $O \in P$. On dit qu'on a une branche infinie en t_0 ssi $t \mapsto \left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\|$ n'est pas bornée au voisinage de t_0.

Remarque 44.3 Il y a indépendance de la définition vis à vis de O. En effet, si $O' \in P$, $t \in I$,

$$\left| \left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\| - \left\| \overrightarrow{O'f(t)} \right\| \right| \leqslant \overrightarrow{OO'}$$

On montre alors que $t \mapsto \left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\|$ n'est pas bornée au voisinage de t_0 ssi $t \mapsto \left\| \overrightarrow{O'f(t)} \right\|$ n'est pas bornée au voisinage de t_0.

Définition 44.7 Soit $f : I \to P$, $O \in P$, $t_0 \in \mathcal{A}(I)$. On suppose que $\lim_{t \to t_0} \left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\| = +\infty$.

Soit $\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{P}$. On dit qu'on a une direction asymptotique $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$ en t_0 ssi

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{\left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\|} \overrightarrow{Of(t)} = \overrightarrow{k}$$

Remarque 44.4 Pour $O' \in P$ et $t \in I$,

$$\left\| \frac{1}{\left\| \overrightarrow{O'f(t)} \right\|} \overrightarrow{O'f(t)} - \frac{1}{\left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\|} \overrightarrow{Of(t)} \right\| \leqslant \frac{2 \left\| \overrightarrow{OO'} \right\|}{\left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\|}$$

permet de justifier l'indépendance par rapport à O.

Définition 44.8 Soit $f : I \to P$, $O \in P$, $t_0 \in \mathcal{A}(I)$ tel que $\lim_{t \to t_0} \left\| \overrightarrow{Of(t)} \right\| = +\infty$, D une droite.

On dit que D est asymptote au support de f en t_0 ssi $\lim_{t \to t_0} d(f(t), D) = 0$.

Remarque 44.5 Dans le cadre de la définition, $\overrightarrow{D}$ est la direction asymptotique en t_0.

44.3 Étude en cartésiennes

On munit P d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Donner un arc $f : I \to P$ consiste à donner deux fonctions $(x, y) \in \mathbb{R}^I$ telles que $f = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

44.3.1 Compléments d'analyse

Proposition 44.2 Soit $t_0 \in \mathcal{A}(I)$, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ de coordonnées (x_0, y_0).

f admet $o + \overrightarrow{u}$ comme limite en t_0 ssi $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Proposition 44.3 f est C^n en t_0 ssi x et y le sont. Le cas échéant, $f^{(n)} = x^{(n)}\overrightarrow{i} + y^{(n)}\overrightarrow{j}$.

Définition 44.9 Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux fonctions $I \to \overrightarrow{P}$. On note

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \langle \overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t) \rangle \end{cases}$$

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & [\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t)] \end{cases}$$

$$\|\overrightarrow{u}\| : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|\overrightarrow{u}(t)\| \end{cases}$$

Théorème 44.4 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in C^p(I, \overrightarrow{P})$.*

- *$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \in C^p(I, \overrightarrow{P})$ et si $p > 0$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle' = \langle \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}' \rangle$.*
- *$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \in C^p(I, \overrightarrow{P})$ et si $p > 0$, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]' = [\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}']$.*
- *$\|\overrightarrow{u}\| \in C^0(I, \overrightarrow{P})$ et si $p > 0$ et $\overrightarrow{u}$ ne s'annule pas, $\|\overrightarrow{u}\| \in C^p(I, \overrightarrow{P})$ et $\|\overrightarrow{u}\|' = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|}$.*

44.3.2 Étude d'un arc en cartésiennes

On suppose x et y suffisamment régulières pour faire des calculs. Les études obligatoires sont :

- Recherche d'un domaine de définition
- Recherche d'un domaine d'étude
- Tableau de variation de x et y avec toutes les valeurs numériques
- Étude des points singuliers
- Étude des branches infinies
- Tracé de support

44.3.3 Domaine d'étude

<u>Théorème 44.5</u> *S'il existe t_0 tel que pour tout $t \in I$, $2t_0 - t \in I$, $x(2t_0 - t) = x(t)$ et $y(2t_0 - t) = y(t)$, on étudie f sur $[t_0, +\infty[\cap I$ ou sur $]-\infty, t_0] \cap I$.*

Le support de f est le même que celui de $f|_{[t_0,+\infty[\cap I}$.

<u>Théorème 44.6</u> *S'il existe t_0 tel que pour tout $t \in I$, $2t_0 - t \in I$, $x(2t_0 - t) = -x(t)$ et $y(2t_0 - t) = y(t)$, on étudie f sur $[t_0, +\infty[\cap I$ ou sur $]-\infty, t_0] \cap I$.*

Le support de f est la réunion de celui de $f|_{[t_0,+\infty[\cap I}$ et de son symétrique par rapport à $O + \mathbb{R}\overrightarrow{j}$.

<u>Théorème 44.7</u> *S'il existe t_0 tel que pour tout $t \in I$, $2t_0 - t \in I$, $x(2t_0 - t) = x(t)$ et $y(2t_0 - t) = -y(t)$, on étudie f sur $[t_0, +\infty[\cap I$ ou sur $]-\infty, t_0] \cap I$.*

Le support de f est la réunion de celui de $f|_{[t_0,+\infty[\cap I}$ et de son symétrique par rapport à $O + \mathbb{R}\overrightarrow{i}$.

<u>Théorème 44.8</u> *S'il existe t_0 tel que pour tout $t \in I$, $2t_0 - t \in I$, $x(2t_0 - t) = -x(t)$ et $y(2t_0 - t) = -y(t)$, on étudie f sur $[t_0, +\infty[\cap I$ ou sur $]-\infty, t_0] \cap I$.*

Le support de f est la réunion de celui de $f|_{[t_0,+\infty[\cap I}$ et de son image par la symétrie centrale de centre O.

<u>Théorème 44.9</u> *Si on trouve $T > 0$ tel que x et y soient T-périodiques, on étudie la restriction de f sur l'intersection de I avec un intervalle d'amplitude T. Le support de cette restriction est celui de f.*

44.3.4 Branches infinies

Soit $t_0 \in \mathcal{A}(I)$. On suppose que x ou y n'est pas bornée au voisinage de t_0. En pratique, l'une des fonctions x ou y admet $\pm\infty$ comme limite en t_0.

<u>Théorème 44.10</u> *On suppose que x (resp. y) ne s'annule pas au voisinage de t_0. Si $\frac{y}{x}$ (resp. $\frac{x}{y}$) admet une limite finie a en t_0, alors on a une direction asymptotique $\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$ (resp. $a\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$) en t_0.*

Si de plus $y - ax$ (resp. $x - ay$) admet une limite finie b en t_0 alors on a une asymptote d'équation $y = ax + b$ (resp. $x = ay + b$) en t_0.

Remarque 44.6 *Deux cas particuliers sont usuels : si y (resp. x) admet une limite finie l en t_0 et x (resp. y) admet $\pm\infty$ comme limite en t_0 alors on a une asymptote d'équation $y = l$ (resp. $x = l$) en t_0.*

Démonstration. Il existe un voisinage V de t_0 tel que $x|_V$ ne s'annule pas.

- Soit $t \in V$.

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{Of(t)}\right\|}\overrightarrow{Of(t)} = \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\overrightarrow{i} + \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\overrightarrow{j}$$
$$= \frac{x(t)}{|x(t)|\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}(t)}}\overrightarrow{i} + \frac{y(t)}{|x(t)|\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}(t)}}\overrightarrow{j}$$

On suppose x continue. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\varepsilon x|_V > 0$.
Donc
$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{Of(t)}\right\|}\overrightarrow{Of(t)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}(t)}}\overrightarrow{i} + \frac{\varepsilon(\frac{y}{x})(t)}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}(t)}}\overrightarrow{j}$$
Donc
$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{\left\|\overrightarrow{Of(t)}\right\|}\overrightarrow{Of(t)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+a^2}}(\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j})$$

- On suppose $\lim\limits_{t\to t_0}(y(t)-ax(t)) = b$.
On note D la droite dont une équation est $y = ax+b$.
Soit $t \in V$. On a $d(f(t),D) = \frac{|y(t)-ax(t)-b|}{\sqrt{1+a^2}}$, d'où
$$\lim_{t\to t_0} d(f(t),D) = 0$$
■

Exemple 44.1 On considère

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-1,2\} & \to & P \\ t & \mapsto & O + \dfrac{t^2}{t+1}\overrightarrow{i} + \dfrac{t^2}{t-2}\overrightarrow{j} \end{cases}$$

Étudier la branche infinie en $+\infty$.
Les fonctions coordonnées sont

$$x : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-1,2\} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases} \text{ et } y : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-1,2\} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^2}{t-2} \end{cases}$$

On note que $x(t) = t-1+\frac{1}{t}+\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{t})$ et $y(t) = t+2+\frac{4}{t}+\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{t})$.

Le support de f admet donc la droite d'équation $y = x+3$ comme asymptote en $+\infty$, situé au-dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$.

Exemple 44.2 On considère

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} & \rightarrow & P \\ t & \mapsto & O + \dfrac{t^4}{t^2+1}\overrightarrow{i} + \dfrac{t^2}{t-2}\overrightarrow{j} \end{cases}$$

Étudier la branche infinie en $+\infty$.
On a de même $x(t) = t^2 - 1 + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{t})$ et $y(t) = t + 2 + \frac{4}{t} + \frac{8}{t^2} + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{t^2})$.
D'où $y^2(t) - x(t) = 4t + 13 + \frac{32}{t} + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{t})$.
On en déduit

$$y^2(t) - 4y(t) - x(t) = 5 + \frac{16}{t} + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{t})$$

Donc le support de f admet la parabole d'équation $x = y^2 - 4y - 5$ comme asymptote en $+\infty$ et cette courbe est située du même côté de cette parabole que le point $O - 2\overrightarrow{j}$ au voisinage de $+\infty$.

44.4 Étude en polaires

On se place dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $(O, \overrightarrow{i})$ sera le repère polaire. On pose

$$\overrightarrow{u} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \overrightarrow{P} \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j} \end{cases} \quad \text{et } \overrightarrow{v} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \overrightarrow{P} \\ \theta & \mapsto & -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + cos(\theta)\overrightarrow{j} \end{cases}$$

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont C^∞. On a de plus $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}' = -\overrightarrow{u}$.

44.4.1 Présentation

Pour donner un arc en polaires, on donne deux fonctions r et θ définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, suffisamment régulières. L'arc considéré est alors

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow & P \\ t & \mapsto & O + r(t)\overrightarrow{u}(\theta(t)) \end{cases}$$

La régularité est la même que celle de r et θ. On a de plus :

$$f' = t \mapsto r'(t)\overrightarrow{u}(\theta(t)) + r(t)\theta'(t)\overrightarrow{v}(\theta(t))$$
$$f'' = t \mapsto (r''(t) - r(r)\theta'(t)^2)\overrightarrow{u}(\theta(t)) + (2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)$$

En pratique on étudie le cas où $\theta = \mathrm{Id}$, ie on donne une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière et on étudie

$$f : \begin{cases} I & \to & P \\ \theta & \mapsto & O + \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta) \end{cases}$$

Dans ce cadre, un point M dont un système de coordonnées polaires est (r_0, θ_0) appartient au support de l'arc ssi $r_0 = 0$ et ρ s'annule ou $r_0 \neq 0$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r_0 = (-1)^k \rho(\theta_0 + k\pi)$.

44.4.2 Étude pratique

On nous donne $\rho : I \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On veut trouver le support de l'arc défini en polaires par $r = \rho(\theta)$, $\theta \in I$. On travaille en 6 étapes :

1. Domaine de définition de ρ
2. Domaine d'étude de ρ
3. Tableau de variations complété par une ligne pour donner le signe des valeurs prises par ρ, ainsi que ses points d'annulation.
4. Études locales
5. Branches infinies
6. Tracé

<u>Théorème 44.11</u> *On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\theta \in I$, $\theta + T \in I$ et $\rho(\theta + T) = \rho(\theta)$ (resp. $\rho(\theta + T) = -\rho(\theta)$).*

On étudie l'arc sur un intervalle d'amplitude T. On complète par des rotations de centre O et dont une mesure de l'angle appartient à $\{kT, k \in \mathbb{Z}\}$ (resp. $\{k(T + \pi), k \in \mathbb{Z}\}$).

<u>Théorème 44.12</u> *On suppose qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\theta \in I$, $\theta_0 - \theta \in I$ et $\rho(\theta_0 - \theta) = \rho(\theta)$ (resp. $\rho(\theta_0 - \theta) = -\rho(\theta)$.*

On étudie alors l'arc sur $]-\infty, \frac{\theta}{2}] \cap I$ ou $[\frac{\theta}{2}, +\infty[\cap I$. Le support de l'arc est la réunion du support tracé et de son image par la symétrie axiale orthogonale par rapport à $O + \mathbb{R}\overrightarrow{u}(\frac{\theta_0}{2})$ (resp. $O + \mathbb{R}\overrightarrow{v}(\frac{\theta_0}{2})$).

44.4.3 Études locales

On note que $f' = \rho'\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{v}$.

Si f' s'annule en $\theta_0 \in I$, alors $\rho'(\theta_0) = 0 = \rho(\theta_0)$.

En particulier, θ_0 est un paramètre de l'origine.

<u>THÉORÈME 44.13</u> *Soit* θ_0 *tel que* $\rho(\theta_0) = 0$.

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $i \in [\![1, p-1]\!]$, $\rho^{(i)}(\theta_0) = \overrightarrow{0}$ *et* $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Le support de f *admet au point de paramètre* θ_0 *une tangente dirigée par* $\overrightarrow{u}(\theta_0)$. *Ce point est une point de rebroussement de première espèce si* p *est pair et un point ordinaire sinon.*

Démonstration.

- Pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a

$$f^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \rho^{(j)} \overrightarrow{u}^{(j-i)}$$

Donc $f^{(i)}(\theta_0) = \overrightarrow{0}$.
- On a

$$f^{(p)}(\theta_0) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \rho(j)(\theta_0) \overrightarrow{u}^{(p-j)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta_0) \overrightarrow{u}(\theta_0) \neq \overrightarrow{0}$$

qui est donc colinéaire à $\overrightarrow{u}(\theta)$.
- De plus,

$$f^{(p+1)}(\theta_0) = (p+1)\rho^{(p)}(\theta_0) \overrightarrow{v}(\theta_0) + \rho^{(p+1)}(\theta_0) \overrightarrow{u}(\theta_0)$$

qui n'est pas colinéaires à $f^{(p)}(\theta_0)$.

Les résultats sur l'étude en cartésiennes concluent. ∎

Remarque 44.7 En pratique, on calcule numériquement $\rho(\theta)$ *pour quelques valeurs bien choisies. es points de paramètres estimés sont placés sur le support avec leur tangente. Icelle est orientée par* $\arctan(\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)})$.

44.4.4 Branches infinies

On a une branche infinie en $theta_0 \in \overline{I}$ ssi ρ n'est pas bornée au voisinage de θ_0. On se place dans le cas où la limite de ρ en θ_0 est $\pm\infty$.

On travaille dans $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$. On y note $X(\theta), Y(\theta)$ les coordonnées de $f(\theta)$. On a $X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0)$ et $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$.

En θ_0, X tend vers $\pm\infty$ donc $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \frac{Y(\theta)}{X(\theta)} = 0$.

On a donc une direction asymptotique $\mathbb{R}\overrightarrow{u}(\theta_0)$ en θ_0. Si de plus Y tend vers l en θ_0, on a une asymptote d'équation $Y = l$ dans $(O, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$.

Pour les autre courbes asymptotes, on passe en cartésiennes.

<u>THÉORÈME 44.14</u>

- *Si* $\lim\limits_{+\infty} \rho = 0$ *(resp.* $\lim\limits_{-\infty} \rho = 0$*), on dit que le support de l'arc présente une spirale qui se rapproche de* 0 *en tournant dans le sens trigonométrique (resp. horaire).*
- *Si* $\lim\limits_{+\infty} \rho = \pm\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{-\infty} \rho = \pm\infty$*), on dit que le support de l'arc présente une spirale qui s'éloigne de* 0 *en tournant dans le sens trigonométrique (resp. horaire).*
- *Si on trouve* $l \neq 0$ *tel que* $\lim\limits_{+\infty} \rho = l$ *(resp.* $\lim\limits_{-\infty} \rho = \pm\infty$*), le support de l'arc est asymptote au cercle de centre* O *et de rayon* $|l|$ *en tournant dans le sens trigonométrique (resp. horaire).*

Remarque 44.8 *L'étude du signe de* $l(\rho - l)$ *permet de positionner le support par rapport au cercle asymptote.*

Chapitre 45

Étude métrique des arcs plans

45.1 Une notation usuelle

Soit I, J deux intervalles, $x : I \to J$, $f : I \to \overrightarrow{P}$. On note $g = f \circ x$.

En mathématiques on manipule deux fonctions, alors qu'en physique, on considère $f(x)$ et $f(t)$.

On a $g' = x'f' \circ x$ et on peut noter :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \text{ et } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1$$

Si x est bijective, t désigne x^{-1} et cette formule se réécrit

$$(x^{-1})'(x' \circ x^{-1}) = 1$$

L'écriture physique est plus manipulables mais exige qu'on fasse attention aux compositions quand on dérive.

45.2 Abscisse curviligne

45.2.1 Définition

Définition 45.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $f \in C^p(I, P)$ et $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne sur l'arc d'origine t_0 la primitive de $\|f'\|$ nulle en t_0.

Proposition 45.1 Si f' s'annule, l'abscisse curviligne est C^1. Sinon, elle est C^p.

Définition 45.2 On dit que f est normal ssi Id est abscisse curviligne sur l'arc (ssi $\|f'\| = 1$).

45.2.2 Changement d'échelle de temps

Définition 45.3 Soit I et J deux intervalles, $f \in C^p(I, P)$ et $g \in C^p(J, P)$.

On dit que f et g sont C^p-équivalentes ssi il existe $\varphi \in C^p(J, I)$ bijective à réciproque C^p telle que $f \circ \varphi = g$.

Remarque 45.1 *C'est une relation d'équivalence sur les arcs de classe C^p.*

Certaines propriétés des arcs peuvent être associées à la classe d'équivalence correspondante.

Exemple 45.1 Si f est C^1-équivalente à g et f' ne s'annule pas, alors g' ne s'annule pas non plus.

En effet, il existe φ C^1 bijective à réciproque C^1 telle que $g = f \circ \varphi$. Par définition φ' ne s'annule pas.

On en déduit que $g' = \varphi'(\varphi \circ f')$ ne s'annule pas.

Théorème 45.1 *Soit $f \in C^p(I, P)$. Il existe un arc normal C^p-équivalent à f ssi f est régulier.*

Démonstration.

$\Leftarrow$ Notons φ une primitive de $\|f'\|$. Par hypothèse, pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| > 0$, donc $\varphi'(t) > 0$.

φ établit donc une bijection de I sur $\varphi(I)$ noté J. Par construction $\varphi \in C^p(I, J)$, bijective à réciproque C^p.

$g = f \circ \varphi^{-1}$ est C^p-équivalente à f et on a :

$$g' = (\varphi^{-1})'(f' \circ \varphi^{-1}) = \frac{f' \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

Donc

$$\|g'\| = \left(\frac{1}{|\varphi'|}\|f'\|\right) \circ \varphi^{-1} = \left(\frac{1}{\varphi'}\|f'\|\right) \circ \varphi^{-1} = 1$$

D'où le résultat.

$\Rightarrow$ L'exemple précédent assure le résultat. ■

45.2.3 Longueur d'un arc

Définition 45.4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in C^1([a, b], P)$. On appelle longueur de l'arc le réel $\displaystyle\int_a^b \|f'(t)\|\, dt$.

Proposition 45.2 Soit f et g deux arcs C^1-équivalents. Les longueurs de f et g sont les mêmes.

45.3 Repère de Frenet

Dans ce paragraphe, on considère $g \in C^2(J, P)$ normal.

Définition 45.5 Soit $s \in J$.

- On appelle vecteur tangent unitaire au support de g au point de paramètre s le vecteur $g'(s)$ usuellement noté $\overrightarrow{t}(s)$.
- On appelle vecteur normal unitaire au support de g au point de paramètre s l'unique vecteur $\overrightarrow{n}(s)$ tel que $(\overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s))$ soit une base orthonormée directe de $\overrightarrow{P}$.
- On appelle repère de Frenet au point de paramètre s le repère $(g(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s))$.

Théorème 45.2 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\overrightarrow{u} \in C^p(J, \overrightarrow{P})$ tel que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.*

Il existe $\alpha \in C^p(J, \mathbb{R})$ tel que pour tout $s \in J$, $\alpha(s) = \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{s}, \overrightarrow{u}(s)})$.

Une telle fonction s'appelle angle de relèvement de la fonction $\overrightarrow{u}$.

Définition 45.6 Soit α une fonction angle de relèvement de g'. Pour $s \in J$, on appelle courbure du support de g au point de paramètre s le réel $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(s)$ noté $c(s)$.

Si $c(s) \neq 0$, $\frac{1}{c(s)}$ s'appelle rayon de courbure au point de paramètre s et noté $R(s)$. On appelle aussi $\Omega(s) = g(s) + R(s)\overrightarrow{n}(s)$ le centre de courbure au point de paramètre s.

Remarque 45.2 On suppose $g \in C^p(J, P)$. Alors $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}$ et α sont C^{p-1} et $c \in C^{p-2}$

C'est évident pour $\overrightarrow{t}$, α et c. En observant que $\overrightarrow{n} = -\sin\circ\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\circ\alpha\,\overrightarrow{j}$, on a aussi le résultat pour $\overrightarrow{n}$.

Théorème 45.3 Formules de Frenet

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = c \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{t}}{\mathrm{d}s} = c\overrightarrow{n} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{n}}{\mathrm{d}s} = -c\,\overrightarrow{t}$$

Démonstration.

- Par construction, $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = c$.
- $\overrightarrow{t} = (\cos\circ\alpha)\overrightarrow{i} + (\sin\circ\alpha)\overrightarrow{j}$. Donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{t}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\circ\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{i} + (\cos\circ\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{j} = c\overrightarrow{n}$$

- On procède de même pour la dernière formule. ■

Définition 45.7 Soit $s \in J$. Le point de paramètre s est dit birégulier ssi $c(s) \neq 0$. L'arc g est dit birégulier ssi c ne s'annule pas.

Remarque 45.3 *On suppose l'arc birégulier et indéfiniment dérivable. α' est continue et ne s'annule pas donc α est strictement monotone. Étant de plus continue, elle établit une bijection de J sur $\alpha(J)$. De plus, α et α^{-1} sont C^∞.*

On pose $h = g \circ \alpha^{-1}$, $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{t} \circ \alpha^{-1}$ et $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{n} \circ \alpha^{-1}$.

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T}' &= (\alpha^{-1})'\overrightarrow{t}' \circ \alpha^{-1} \\ &= \frac{c \circ \alpha^{-1} \times \overrightarrow{n} \circ \alpha^{-1}}{\alpha' \circ \alpha^{-1}} \\ &= \overrightarrow{n} \circ \alpha^{-1} = \overrightarrow{N}\end{aligned}$$

On a de même $\overrightarrow{N}' = -\overrightarrow{T}$.

45.4 Calculs pratiques

45.4.1 Exemples

Soit $f \in C^2(I, P)$ un arc régulier. On appelle s une primitive de $\|f'\|$ et on pose $g = f \circ s^{-1}$. On sait que g est normal. On veut calculer :

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}(s(t)) = \overrightarrow{T}(t) \\ \overrightarrow{n}(s(t)) = \overrightarrow{N}(t) \\ c(s(t)) = \Gamma(t) \\ \alpha(s(t)) = A(t) \end{cases}$$

Proposition 45.3 Pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|} f'(t)$.

Démonstration. $f = g \circ s$ donc $f' = s'g' \circ s = \|f'(t)\| (\overrightarrow{t} \circ s)$ donc $\overrightarrow{T} = \frac{f'}{\|f'\|}$. ∎

Exemple 45.2 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver le repère de Frenet et la courbure en tout point du graphe de l'arc :

$$m : \begin{cases} D = \left]-\frac{\pi a}{2}, \frac{\pi a}{2}\right[& \to & P \\ x & \mapsto & O + x\overrightarrow{i} + a \ln\left(\cos\left(\frac{x}{a}\right)\right)\overrightarrow{j} \end{cases}$$

- $m \in C^\infty(D)$
- $m' : x \mapsto \overrightarrow{i} - \tan\left(\frac{x}{a}\right)\overrightarrow{j}$ qui ne s'annule pas donc m est régulier.

- Soit $x \in D$. $\|m'(x)\| = \sqrt{1+\tan^2(\overrightarrow{x}a)} = \frac{1}{\cos(\frac{x}{a})}$.
  Le vecteur tangent unitaire au point de paramètre x est donc
  $$\overrightarrow{T}(x) = \cos\left(\frac{x}{a}\right)\overrightarrow{i} - \sin\left(\frac{x}{a}\right)\overrightarrow{j}$$
  Le vecteur normal unitaire au point de paramètre x est
  $$\overrightarrow{N}(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\frac{x}{a}\right)\overrightarrow{j}$$
- $\overrightarrow{T}(x)$ s'écrit aussi $\cos(-\frac{x}{a})\overrightarrow{i} + \sin(-\frac{x}{a})\overrightarrow{j}$ donc on peut choisir $A : x \to -\frac{x}{a}$.
- On a de plus $A = \alpha \circ s$ donc $A' = s'\alpha' \circ s = s'c \circ s = s'\Gamma$.
  Ainsi $\Gamma = \frac{A'}{s'}$. Or $s' = \|m'(x)\|$ donc $\Gamma : x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(\frac{x}{a})$.

Exemple 45.3 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver le repère de Frenet et la courbure en tout point de l'arc défini en polaires par $r = a\cos^3(\frac{\theta}{3})$, $\theta \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

On note s une abscisse curviligne sur l'arc $m : \theta \mapsto O + a\cos^3(\frac{\theta}{3})\overrightarrow{u}(\theta)$.

m est dérivable et $m' : \theta \mapsto a(-\cos^2(\frac{\theta}{3})\sin(\frac{\theta}{3}\overrightarrow{u}(\theta) + \cos^3(\frac{\theta}{3})\overrightarrow{v}(\theta))$.

On en déduit $\|m'\| = a\cos^2(\frac{\theta}{3})$ qui ne s'annule pas, donc l'arc est régulier. Il admet alors un représentant normal g.

On a :
$$\overrightarrow{T}(\theta) = \frac{m'}{\|m'\|} = -\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\overrightarrow{u}(\theta) + \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\overrightarrow{v}(\theta)$$
On déduit alors
$$vecN(\theta) = -\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\overrightarrow{u}(\theta) - \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\overrightarrow{v}(\theta)$$
Or $T(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{3})\overrightarrow{u}(\theta) + \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{3})\overrightarrow{v}(\theta)$.

Donc $A : \theta \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{3}$ est une fonction angle de relèvement de $\overrightarrow{T}$.
$$c = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{4}{3a\cos^2(\frac{\theta}{3})}$$

45.4.2 Formule générale de la courbure

On reprend toutes les notations. On constate que $f = g \circ s$ donc
$$f' = s'g' \circ s = s'\overrightarrow{t} \circ s \text{ et } f'' = s''\overrightarrow{t} \circ s + s'^2\overrightarrow{t}' \circ s = s''\overrightarrow{t} \circ s + s'^2(c \circ s)(\overrightarrow{n} \circ s)$$

$$\begin{aligned}
[f', f''] &= s's''[\overrightarrow{t} \circ s, \overrightarrow{t} \circ s] + s'^3 c \circ s[\overrightarrow{t} \circ s, \overrightarrow{n} \circ s] \\
&= s'^3 (c[\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}] \circ s) \\
&= s'^3 c \circ s = s'^3 \Gamma
\end{aligned}$$

Donc $\Gamma = \frac{[f', f'']}{\|f'\|^3}$.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Formulaire de trigonométrie

A.1 Présentation

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan.

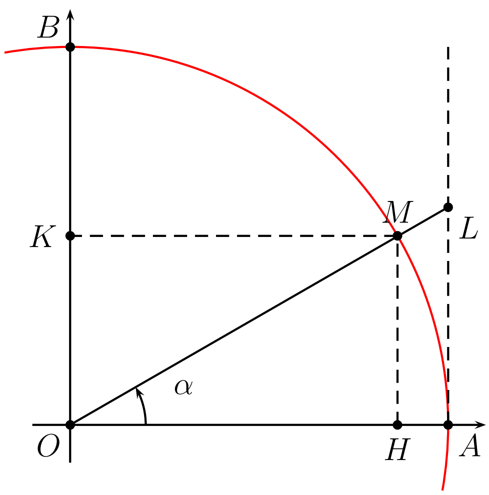
Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

On construit les points H et K, projections orthogonales de M sur (OA) et (OB) et le point L d'intersection, s'il existe de (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A.

On oriente (OA) (resp. (OB), (OL)) par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$). Si $\alpha = \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$, on a :

$$\cos(\alpha) = \overline{OH}, \quad \sin(\alpha) = \overline{OK} \text{ et } \tan(\alpha) = \overline{AL}$$

la tangente de α étant définie ssi L existe ssi $M \notin (OB)$.



A.2 Angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indef.	0

A.3 Propriétés élémentaires

sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont 2π-périodiques.

tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et est π-périodique. Pour tout réel α, on connait les identités qui suivent, qu'on retrouve en dessinant un cercle trigonométrique.

$$\begin{array}{ll}
\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\
\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha) & \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha) \\
\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha) & \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha) \\
\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) & \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \\
\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) & \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)
\end{array}$$

A.4 Formulaire usuel

Dans ce qui suit, x et y sont deux réels et les formules ne sont valables que quand elles ont un sens.

A.4.1 Formules de base

$$\begin{array}{ll}
\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) & \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \\
\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} & \tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}
\end{array}$$

La parité de cos et l'imparité de sin et tan permettent de déduire la deuxième colonne de la première.

A.4.2 Formules à reconnaître en toute circonstance

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

A.4.3 Formules qu'on peut passer deux minutes à retrouver

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \qquad \sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \qquad \sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$

Ces formules se retrouvent rapidement en passant aux complexes.

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$$

Ici, on utilise les combinaisons linéaires des formules de base ou encore la linéarisation via les complexes.

Annexe B

Dérivées usuelles

B.1 Formules de dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables.

- $f + g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$
- λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$
- fg est dérivable et $(fg') = f'g + fg'$
- Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $(\dfrac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{C}$ dérivables.

Alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$.

B.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$x \mapsto \beta^x$	$x \mapsto \ln(\beta)\beta^x$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = x \mapsto 1 + \tan^2(x)$

Fonction	Dérivée
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$
$x \mapsto \operatorname{th}(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = x \mapsto 1 - \operatorname{th}^2(x)$
$x \mapsto \arcsin(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \arccos(x)$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
$x \mapsto \operatorname{Argsh}(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$x \mapsto \operatorname{Argch}(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$x \mapsto \operatorname{Argth}(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

Annexe C

Primitives usuelles

Dans ce tableau, $(n,k,p,q,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{-1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}_+^*$. Le domaine de validité désigne les intervalles sur lesquels les primitives des fonctions réelles sont valides.

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^p$	$x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto x^q$	$x \mapsto \dfrac{x^{q+1}}{q+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$x \mapsto \mathrm{cotan}(x)$	$x \mapsto \ln(\lvert\sin(x)\rvert)$	$]k\pi,(k+1)\pi[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$	$x \mapsto \ln(\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert)$	$]k\pi,(k+1)\pi[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$	$x \mapsto \ln(\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$x \mapsto -\mathrm{cotan}(x)$	$]k\pi,(k+1)\pi[$

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{th}(x)$	$x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{coth}(x)$	$x \mapsto \ln(\lvert\operatorname{sh}(x)\rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}$	$x \mapsto \ln(\lvert\operatorname{th}(\frac{x}{2})\rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$	$x \mapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$	$x \mapsto -\operatorname{coth}(x)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$x \mapsto \operatorname{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{Argth}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a, a[$
	$x \mapsto \dfrac{1}{2a}\ln\left(\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert\right)$	$]-\infty, -a[$ ou $]-a, a[$ ou $]a, +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a, a[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
	$x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a}}$	$x \mapsto \operatorname{Argch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]a, +\infty[$
	$x \mapsto \ln(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert)$	$]-\infty, -a[$ ou $]a, +\infty[$

Dans ce tableau, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$. Les fonctions complexes suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$ et leurs primitives sont sur cet intervalle.

Fonctions	Primitives
$x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$
$x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$	$x \mapsto \ln(\lvert x-\alpha\rvert) + i \arctan\left(\dfrac{x-\Re(\alpha)}{\Im(\alpha)}\right)$
$x \mapsto (x-\alpha)^p$	$x \mapsto \dfrac{(x-\alpha)^{p+1}}{p+1}$

Annexe D

Développement limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+2}).$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1}).$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^8).$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+2}).$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+1}).$$

Pour $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{\beta x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta^k x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{n} (\alpha - i) \right) \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

En particulier, $\begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ \dfrac{1}{1-x} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \end{cases}$

Annexe E

Quantification

Toute variable que l'on manipule dans une preuve doit impérativement être introduite. Il n'y a que deux manières d'introduire des variables et peu de règles à mémoriser quant à ces manipulations.

E.1 Les variables universelles

E.1.1 Les points à mémoriser

1. Le mot ***soit***
   - introduit une variable référençant un objet dont on veut établir une propriété universelle
   - ne permet de faire aucune hypothèse concernant l'existence de l'objet introduit
   - ne permet que d'introduire le nom d'une variable, pas une relation sur des variables
2. Une variable définie par ***soit*** est utilisable entre sa définition et la quantification universelle qui lui est associée, que cette dernière soit explicite ou non.

Remarque E.1 On peut souligner que le mot ***soit*** *est utilisé dans d'autres cas, qui ne correspondent pas à un usage aussi formel. Par exemple, on se sert de* ***soit*** *pour introduire un objet parfaitement déterminé, en lieu et place de la locution « on considère ». C'est le cas dans la phrase : soit f la fonction qui associe à chaque réel sa partie entière. De même, on utilise* ***soit*** *en lieu et place de « ce qui équivaut à », comme dans la phrase : on note que* $\cos' = -\sin$, *soit* $\cos' + \sin = 0$.

E.1.2 Qu'est-ce qu'une assertion universelle ?

Une assertion logique est dite universelle lorsqu'elle concerne une propriété valable pour tout un ensemble de valeurs. Par exemple, les assertions suivantes sont universelles.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant \sqrt{x^2+1}$
2. Toute fonction réelle f croissante et majorée sur $\mathbb{R}$ admet une limite finie en $+\infty$.
3. Pour toute fonction réelle f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' \leqslant 2f$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x} f(x)$ est décroissante.
4. La fonction $x \mapsto x\sin(x^2+1)$, définie sur $[0,1]$, est majorée par 1.

Les assertions universelles commencent souvent par la locution ***pour tout***, suivi du nom de la variable et d'un ensemble de contraintes imposées à l'objet référencé par cette variable. Cet ensemble de contraintes contient au moins la localisation de l'objet manipulé. Dans chaque exemple précédent, on peut extraire le nom de la variable, la nature de l'objet manipulé et les contraintes qu'on impose à cet objet.

	Nom	Localisation	Autres contraintes
1	x	$\mathbb{R}$	
2	f	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	croissante, majorée
3	f	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	dérivable, $f' \leqslant 2f$
4	x	$[0,1]$	

On ne connaît rien quand à l'existence d'un objet universellement quantifié. Ainsi, dans l'exemple 3., rien n'assure qu'il existe des fonctions réelles f, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' \leqslant 2f$. En revanche, si on trouve une telle fonction, on est sûr que $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x} f(x)$ est décroissante.

Enfin, la quantification universelle peut être implicite. Ainsi, l'exemple 4. peut s'écrire : pour tout $x \in [0,1]$, $x\sin(x^2+1) \leqslant 1$. Cette quantification implicite est induit par de nombreux mots mathématiques, associés le plus souvent à des fonctions au sens large, comme dans les exemples suivants :

La suite $(n^2+1)_n$ est croissante	$\leftrightarrow$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2+1 \leqslant (n+1)^2+1$
La fonction sinus est minorée par -1	$\leftrightarrow$	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \geqslant -1$
La fonction cosinus est continue	$\leftrightarrow$	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, cos admet une limite finie en x
La relation $\leqslant$ est réflexive sur $\mathbb{Q}$	$\leftrightarrow$	Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant x$

Ce type de quantification cachée apparaît aussi dans certaines formulations usuelles, la plus importante concernant les équations. Ainsi, si E désigne l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, on a

L'ensemble des solutions de (E) est $\{1, 2\}$	$\leftrightarrow$	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-3x+2 = 0$ ssi $x \in \{1, 2\}$

E.1.3 Preuve d'une assertion universelle

Présentation

Le mot ***soit*** permet d'introduire une variable référençant un objet sur lequel on veut établir une propriété universelle. La preuve d'une telle propriété se mène toujours en trois étapes. Faisons-le pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant \sqrt{1+x^2}$:

Soit $x \in \mathbb{R}$	Introduction
On note que $x^2 \leqslant x^2 + 1$. Comme la fonction racine carrée est croissante, on en déduit que $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{1+x^2}$. Or $\sqrt{x^2} = |x|$.	Preuve pour la variable introduite
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant \sqrt{1+x^2}$.	Conclusion

On ne fait aucune hypothèse sur l'existence des objets introduits dans la première étape de la preuve. Il s'ensuit que si A est un ensemble, on peut écrire « soit $x \in A$ », sans traiter de cas particulier quand $A = \varnothing$.

Introduire une variable ... et la bonne !

Le mot ***soit*** ne permet que d'introduire le nom d'un objet entièrement définie. La locution « soit $x \in \mathbb{R}$ » introduit un réel sans ambiguïté. En revanche, la locution « soit $x^2 \in \mathbb{R}$ » n'a pas de sens car connaître le carré d'un réel ne permet pas de le déterminer. De manière analogue, la locution « soit $\varphi' \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ » n'a pas de sens car connaître la dérivée d'une fonction ne permet pas de déterminer entièrement cette fonction. En pratique, on ne placera qu'une lettre après le mot ***soit***, pas une relation.

Si A est un ensemble, la preuve d'une propriété commençant par « pour tout $x \in A$ », débute toujours par « Soit $x \in A$ ». Il ne faut pas choisir une variable qui paraît plus pratique. Dans le meilleur des cas, cela rend votre preuve plus confuse. Dans le pire, il y a une erreur de logique.

Exemple E.1 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, impaire et vérifiant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(p) = 3p$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(p) = 3p$.

- Preuve naturelle et juste : Soit $p \in \mathbb{Z}^-$. On note que $-p \in \mathbb{N}$ et on applique l'hypothèse. On en déduit $f(-p) = -3p$ et par imparité, $-f(p) = -3p$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{Z}^-$, $f(p) = 3p$. Le même résultat étant acquis par hypothèse sur $\mathbb{N}$, on a bien le résultat.
- Preuve moins naturelle et fausse : Soit $p \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $f(p) = 3p$ donc $-f(p) = -3p$. Comme f est impaire, on en déduit $f(-p) = -3p$. Or $-p$ est négatif donc, pour tout $p \in \mathbb{Z}^-$, $f(p) = 3p$. Le même résultat étant acquis par hypothèse sur $\mathbb{N}$, on a bien le résultat.

Les deux preuves paraissent semblables. Il n'en est rien. Une petite erreur de logique s'est glissée dans la deuxième. En effet, pour assurer que le choix maladroit d'une variable dans $\mathbb{N}$ permet de de gérer les variables de $\mathbb{Z}$, on assure que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $-p \in \mathbb{Z}$. Or pour conclure, on doit utiliser que tout entier relatif négatif est l'opposé d'un entier naturel, autrement dit que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $-p \in \mathbb{N}$, afin de pouvoir noter que $p = -(-p)$. Que de subtilités logiques pour ne pas suivre une règle simple !

Domaine de validité des variables

Une variable définie par ***soit*** est utilisable entre sa définition et la quantification universelle qui lui est associée, qu'icelle soit explicite ou non. Les quantification universelles implicites usuelles apparaissant dans plusieurs cadres.

1. L'usage d'une propriété universelle introduite par un mot mathématique.

Soit $n \in \mathbb{N}$	Introduction de n
$\vdots$	
donc $(n+1)^2 > n^2$	La variable n est encore définie
donc la suite $(n^2)_n$ est strictement croissante	Quantification universelle en n, qui disparaît

Soit $x \in \mathbb{R}$	Introduction de x
$\vdots$	
donc $4x(x+1) \leqslant 1$	La variable x est encore définie
donc la fonction $x \mapsto 4x(1+x)$ est majorée par 1	Quantification universelle en x, qui disparaît

2. La manipulation des équations. Considérons par exemple $(E) : x^3 - 7x + 6 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$	Introduction de x
Le réel x est solution de (E) ssi	
$\vdots$	
ssi $x \in \{1, 2, -3\}$	La variable x est encore définie
donc les solutions de (E) sont 1, 2 et -3	Quantification universelle en x, qui disparaît

3. L'usage d'une opération fonctionnelle comme le calcul d'une limite, d'une somme, d'un produit ou d'une intégrale.

Soit $x \in \mathbb{R}$	Introduction de x
$\vdots$	
donc $\frac{\tan(x)\sin(x)}{x^2} = (\frac{\sin(x)}{x})^3 \cos(x)$	La variable x est encore définie
donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x)\sin(x)}{x^2} = 1$	Quantification universelle en x, qui disparaît

Soit $k \in [\![1, 100]\!]$	Introduction de k
$\vdots$	
donc $\frac{(k+1)^2}{k} = k + 2 + \frac{1}{k}$	La variable k est encore définie
donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{(k+1)^2}{k} = 5250 + \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$	Quantification universelle en k, qui disparaît

Soit $x \in [0, 1]$	Introduction de x
$\vdots$	
donc $2\mathrm{e}^x \operatorname{sh}(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1$	La variable x est encore définie
donc $\displaystyle\int_0^1 2\mathrm{e}^x \operatorname{sh}(x)\, dx = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{2}$	Quantification universelle en x, qui disparaît

E.2 Les variables existentielles

E.2.1 Les points à mémoriser

- La locution ***il existe*** introduit une variable référençant un objet dont on assure l'existence. Son usage demande donc une justification ou une preuve préalable
- Les intermédiaires de calcul et les paramètres de description sont introduits existentiellement.
- Une variable définie par ***il existe*** est utilisable entre sa définition et la disparition des variables dont elle dépend.

E.2.2 Introduction d'une variable existentielle

On doit toujours justifier l'introduction d'une variable par ***il existe***, que ce soit en exhibant un objet convenable ou à l'aide d'un théorème d'existence. Par exemple,

- Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + b = 2$ et $a - b = 0$ car le couple $(1, 1)$ convient.
- Le théorème de division euclidienne assure qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $100 = 12q + r$ et $r \leqslant 11$.
- Comme $x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, prend une valeur inférieure à $\frac{3}{2}$ en 0 et supérieure à $\frac{3}{2}$ en 1, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $\mathrm{e}^x - x = \frac{3}{2}$.

Pour prouver l'existence d'un objet en l'exhibant ou en le construisant explicitement à partir d'autres objets introduits existentiellement, il ne faut pas se focaliser sur les notations introduites dans les énoncés, qui permettent seulement de formuler un problème. Peu importe alors leur nom !

- Si on vous demande de montrer l'existence de deux réels a et b tels que $a+b=1$, il suffit de dire que $(0,1)\in\mathbb{R}^2$ et $1+0=1$. Il est totalement inutile de poser $a=0$ et $b=1$. Si l'énoncé introduit ces deux noms, c'est pour éviter ka phrase : trouver deux réels dont la somme vaut 1.
- Supposons avoir montré l'existence de $x\in\mathbb{R}$ tel que $x^3=x+1$. Si on demande de montrer l'existence de $a\in\mathbb{R}$ tel que $a^3=3a^2-2a+1$, il suffit de noter que $x+1\in\mathbb{R}$ et $(x+1)^3-3(x+1)^2+2(x+1)-1=x^3-x-1=0$.
  Le problème est alors achevé et il est inutile de renommer $x+1$ en a. Une fois encore, le texte nomme l'objet pour éviter une question illisible comme : trouver un réel tel que lorsqu'on ôte son double au triple de son carré et qu'on ajoute une unité au réel obtenu, on obtienne le cube du réel de départ...

Dans tous les exemples où la preuve de l'existence d'un objet se fait en l'exhibant, la locution ***il existe*** disparaît naturellement, mais la nécessité de l'existence reste présente.

Lorsqu'on introduit un objet de façon existentielle, il est impératif de distinguer les contraintes qu'on peut imposer à l'objet introduit et les propriétés qu'il vérifie. Par exemple, le théorème de division euclidienne assure qu'il existe $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que $100=12q+r$ et $r\leqslant 11$. On note alors que $r=4(25-3q)$ donc que $4|r$.

Autrement dit, l'objet r a une propriété supplémentaire. Il serait en revanche très maladroit d'écrire que le théorème de division euclidienne assure qu'il existe $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que $100=12q+r$, $r\leqslant 11$ et $4|r$. Sous cette forme, la divisibilité par 4 apparaît comme une contrainte qu'on impose à cet entier, ce que le théorème précité ne précise pas.

E.2.3 Usage d'une variable existentielle

Les variables introduites existentiellement sont utilisables dès leur définition et ne disparaissent que lorsque les objets donc elles dépendent disparaissent aussi. Ces variables sont utiles dans quantité de situations. Deux des plus courantes sont détaillées ci-dessous.

Paramétrage d'ensembles

Lorsque f est une application entre deux ensembles A et B, l'écriture correcte de l'assertion « Un élément y de B est de la forme $f(x)$ pour un certain x de A » est « Il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ ». Autrement dit, dès qu'on veut écrire qu'un object est d'une certaine forme, on est amené à définir existentiellement une ou plusieurs variables. Dans les exemples qui suivent, f est une primitive de $x \mapsto 2x$ et $x \in \mathbb{R}$.

On n'écrit pas	mais
La fonction f est de la forme $x \mapsto x^2 + C$ où $C \in \mathbb{R}$	Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f = x \mapsto x^2 + C$
Le réel x est un point d'annulation du sinus ssi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	Le réel x est un point d'annulation de sinus ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k\pi$

Intermédiaire de calcul

Un intermédiaire de calcul est un objet qui permet de mener ce calcul, au sens large, sans apparaître lu-même dans le résultat final. Le cas le plus usel est celui d'une variables introduite pour alléger les notations. Par exemple, si $a \in \mathbb{R}$ et si on doit manipuler la grandeur $3 + \sin(a) + \cos(a)$, on écrira « On pose $b = 3 + \sin(a) + \cos(2a)$ ». La variable b est en fait introduite existentiellement, mais de manière explicite. La locution ***il existe*** est donc superflue.

Considérons à présent $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Si x est un réel, on peut écrire

$$f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0) \text{ donc } f(0) = 0$$

Comment introduire x ? Si on l'introduit par ***soit***, rien n'assure son existence. Le calcul devient caduque et la preuve est fausse. Il est cependant ridicule d'introduire x par ***il existe***, puisque chacun sait qu'il existe des réels ! Il suffit donc d'en exhiber un :

$$f(1) = f(1 + 0) = f(1) + f(0) \text{ donc } f(0) = 0$$

Comme dans le premier exemple, la locution ***il existe*** a disparu puisque l'existence est assurée par la construction effective de l'objet utile.

Exemple E.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a^2 \wedge b^2 = 1$.

Comme $a \wedge b = 1$, le théorème de Bézout assure qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On note alors

$$1 = (au+bv)^3 = a^3u^3+3a^2bu^2v+3ab^2uv^2+b^3v^3 = a^2(au^3+3bu^2v)+b^2(bv^3+3auv^2)$$

Comme $au^3 + 3bu^2v$ et $bv^3 + 3auv^2$ sont des entiers relatifs, l'application du même théorème conduit à $a^2 \wedge b^2 = 1$.

La preuve est fondée sur le fait qu'on peut trouver deux entiers u' et b' tel que $a2u' + b^2v' = 1$. Iceux sont construits à partir de u et v. S'ils avaient été introduits par ***soit***, on n'aurait pas pu conclure.

E.2.4 Éviter les définitions multiples

À chaque fois qu'on écrit ***il existe*** $a \in A$; on définit un objet a appartenant à un ensemble A. Ce nouvel objet n'a aucun lien avec un objet a défini précédemment, dont la définition est alors effacée. Il est bon de ne pas sans cesse redéfinir les mêmes objets introduits existentiellement. Considérons par exemple la preuve suivante :

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G : x \mapsto C\cos(x)$	Introduction de C
Comme $G(0) = 1$, on sait que $C\cos(0) = 1$ donc $C = 1$	Ajustement de C
Finalement $G = \cos$	Conclusion

Si on redéfinit C à chaque ligne, on parle d'un nouvel objet à chaque fois. Sauf à rappeler touts les contraintes sur l'objet considéré, ce qui est lourd et inutile, votre preuve devient fausse, comme le montre ce qui suit :

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G : x \mapsto C\cos(x)$	Introduction de C
Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $C\cos(0) = 1$ donc $C = 1$	Introduction d'un nouveau C (qui vaut 1)
Finalement $G = \cos$	FAUX ! Il n'y a pas de lien entre G et C

E.3 Les variables qui n'en sont pas

E.3.1 Les variables qu'on pourrait introduire

Quelques objets mathématiques admettent des écritures conventionnelles, qui permettent d'alléger les notations. Ces écritures formelles utilisent souvent des variables mal introduites, ce qui est licite dans le cadre restreint où les conventions ont été fixées. Une fois ces écritures mises au point, on peut mémoriser des techniques formelles permettant de les transformer, en connaissant le sens réel des opérations menées. Tant qu'aucune manipulation formelle n'est connue, ces écritures sont cantonnées aux hypothèses et aux conclusions.

Introduction d'une équation

De manière très générale, on utilise des lettres pour jouer le rôle d'inconnues dans des équations. Lorsque ces lettres ne sont pas conventionnelles, on peut utiliser la tournure :

On considère l'équation $3\,\mathrm{ch}(x) + yx = x^2$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On n'a alors introduit aucune variable.

Système d'équations cartésiennes

Un objet A du plan ou de l'espace rapporté à un repère est un ensemble de points, ces points étant caractérisés par des équations que vérifient leurs coordonnées. Dans les exemples suivants, on se place dans l'espace euclidien muni d'un repère $\mathcal{R}$.

On écrit	pour résumer
Le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z = 0$	Le plan formé des points dont les coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ vérifient $x + y - z = 0$.
Le cercle dont un système d'équations cartésiennes est $x^2+y^2+z^2 = 2x-y$ et $x+y = 0$	Le cercle formé des points dont les coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ vérifient $x^2+y^2+z^2 = 2x-y$ et $x + y = 0$.

Si on utilise les écritures usuelles, il est impératif de ne pas introduire (x, y, z) et de réaliser qu'aucune variable n'a été introduite. Ces écritures ne sont par ailleurs utilisables que pour introduire un objet, pas pour le manipuler.

Écriture d'un système d'équations paramétriques

Un objet A du plan ou de l'espace rapporté à un repère est un ensemble de points, ces points étant d'une forme particulière qu'on peut préciser à l'aide de paramètres. Dans les exemples qui suivent, on se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

On écrit	pour résumer
La droite dont un système d'équations paramétriques est $$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$	La droite formée des points dont les coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ sont telles qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$
L'ellipse dont un système d'équations paramétriques est $$\begin{cases} x = 2 + \cos(t) \\ y = 1 - 2\sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$	L'ellipse formée des points dont les coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ sont telles qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $$\begin{cases} x = 2 + \cos(t) \\ y = 1 - 2\sin(t) \end{cases}$$

Dans les écritures usuelles, le couple (x, y) n'est pas introduit et la lettre t est incorrectement définie puisqu'elle est introduite après son usage, sans préciser la quantification. Une telle écriture n'est, là encore, autorisée que dans les introductions ou les conclusions. Une preuve nécessite l'introduction correcte des variables, en particulier l'introduction existentielle de t, soulignée dans les exemples qui précèdent.

Ensemble de primitives

Pour écrire que l'ensemble des primitives de la fonction cos est l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f = \sin + C$, on note

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$$

Dans cette écriture, x et C ne doivent pas être définis. Évidemment, ces lettres ne sont pas non plus utilisables en dehors de la formule. Adapter C pour choisir une primitive particulière de la fonction cos n'a, par exemple, aucun sens. L'intérêt principal de l'écriture conventionnelle précédente est qu'elle est accompagnée de règles formelles de manipulations : usage de la linéarité, intégration par parties, changement de variables…

Équation différentielle

Pour écrire qu'on s'intéresse à l'ensemble des fonctions réelles f définies et deux fois dérivables sur l'intervalle $]0, 1[$ et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf''(x) = 3f(x) + \sin(x)$, on écrit formellement :

On considère l'équation différentielle $xy'' = 3y + \sin(x)$ sur $]0,1[$.

Comme pour les primitives, les lettres x et y ne doivent pas être introduites et n'ont pas de sens mathématique. Le seul intérêt est là aussi le fait que cette écriture est accompagnée de formules de manipulation (hors programme).

E.3.2 Les variables qu'on ne peut pas introduire

Il existe des écritures utilisant des lettres muettes, qui n'ont aucun sens en dehors de l'écriture manipulée. On peut d'ailleurs noter que changer la lettre utilisée ne change pas le sens de la phrase, on peut même parfois trouver des écritures n'ayant ucun sens et n'utilisant aucune lettre. Les lettres utilisées dans ces écritures ne référencent aucun objet et sont les seuls à ne pas être introduites, puisqu'elles ne sont pas présentes ! Le cas le plus courant concerne les lettres suivant la locution ***pour tout***. Ainsi la phrase

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \sqrt{x^2+1}$$

ne définit aucune variable x. On pourrait d'ailleurs la remplacer par t.

Beaucoup d'écritures mathématiques utilisent des lettres muettes. On peut citer par exemple :

- Les définitions de fonctions comme $x \mapsto x^2+x+1$ ou de suites $(n^2\mathrm{e}^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Les écritures d'ensembles, que ce soit un ensemble dont les éléments sont caractérisés par une contrainte comme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+2y=4\}$ ou dont les éléments sont précisés par leur forme comme $\{(2-2t, 1+t), t \in \mathbb{R}\}$ (Ce sont d'ailleurs les mêmes).
- Les écritures de limites de fonctions : $\lim\limits_{x\to 2} x\sin(x)$.
- Les écritures de sommes ou de produits indicées par un ensemble fini comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$ ou $\displaystyle\prod_{k=1}^{100} \cos(k)$.
- Les écritures d'intégrales comme $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,dx$

Dans aucun des exemples précédents, on ne définit la moindre variable.

E.4 Quelques règles d'usage

E.4.1 Les points à mémoriser

- Une variable dépend de toutes les variables introduites avant elle
- La quantification universelle en une variable efface cette variable et toutes celles qui en dépendent

- Il faut distinguer nombres et fonctions afin d'adapter la rédaction à la nature des objets manipulés

E.4.2 Dépendance de variables

Présentation

Une variable définie après une autre en dépend. En pratique, la seule dépendance à mémoriser est celle des variables introduites par ***il existe*** par rapport à celles introduites par ***soit*** qui les précèdent. Cette dépendance implique en particulier que ces variables disparaissent lors de la quantification universelle ou la redéfinition des variables dont elles dépendent. Il résulte de cette règle une structure de boîtes dans lesquelles seules certaines variables sont utilisables.

Cette règle induit aussi la nécessité de redéfinir une variable existentielle qu'on veut utiliser juste après avoir effacé une variable universelle qui la précède. Pour éviter de multiples et lourdes redéfinitions, il faut prendre garde à ne pas effacer sans raison. En particulier, si l'énoncé introduit des paramètres par ***soit***, afin de prouver des résultats généraux, il est souvent prudent de ne pas redéfinir ces paramètres. Considérons l'énoncé :

– Préambule : Soit $a \in \mathbb{C}$, on considère $f : x \mapsto x^3 + ax + 3$ définie sur $\mathbb{C}$.
– On démontre que f s'annule trois fois en des points notés u, v et w.
– On pose $s = u + v + w$
– On cherche des propriétés sur s quand $a \in \mathbb{R}$.

Si dans le dernier point, on redéfinit a par la phrase « Soit $a \in \mathbb{R}$ », on efface la définition de f, donc de (u, v, w) donc de s et ce qu'on écrit n'a plus de sens. Si on veut imposer ne nouvelle contrainte à a, il suffit d'écrire « on suppose, dans la question traitée, que $a \in \mathbb{R}$ », sans redéfinir la variable.

Usage des notations indicées

Il arrive qu'on veuille paramétrer un objet à utiliser pour plusieurs valeurs des paramètres. Par exemple, on peut montrer que pour tout réel a, il existe une unique solution de l'équation $\tan(x) = ax$, d'inconnue $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. On veut alors utiliser les solutions associées aux valeurs $3, 5, 11$ et 17. On peut alors construire la preuve comme suit :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$
   $\vdots$
   donc il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(b) = ab$.
2. Finalement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(b) = ab$.

- En particulier, il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(b) = 3b$. Il existe un unique $c \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(c) = 5c$. Il existe un unique $d \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(d) = 11d$. Il existe un unique $e \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(e) = 17e$.

Autrement dit, on construit la preuve du résultat demandé dans l'étape 1, on conclut universellement dans l'étape 2 puis on réintroduit les notations utiles dans l'étape 3. Cette dernière est correcte mais lourde. On peut l'éviter en utilisant une notation indicée dans l'étape 2, faisant explicitement dépendre la solution de l'équation manipulée du paramètre ayant permis de construire l'équation. On rédigera cette preuve sous la forme :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$

   $\vdots$

   donc il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(b) = ab$.
2. Finalement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $b_a \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan(b_a) = ab_a$.

On peut alors utiliser b_3, b_5, b_{11} et b_{17}. Du point de vue mathématique, on n'a pas défini un réel b mais une fonction $a \mapsto b_a$. Voilà le prix à payer pour que la variable b définie existentiellement après la variable universelle a dans la première preuve, survive à la disparition de la variable a !

E.4.3 Nombres et fonctions

Si f est une fonction réelle d'une variable réelle et x un élément de son domaine de définition, il est impératif de distinguer le nombre $f(x)$ et la fonction f. Certaines propriétés n'ont de sens que pour les nombres, d'autres que pour les fonctions. Pour ces dernières, on peut citer la composition, le calcul de limites, la dérivation, le calcul de primitives,...

Considérons les assertions suivantes :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note que $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$. Donc $f'(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note que $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$. Donc $f'(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note que $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x))$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - f(x) = \mathrm{e}^x \cos(x)$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note que $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x))$. Donc $f'(x) - f(x) = \mathrm{e}^x \cos(x)$.

La premier exemple est mal rédigé. En effet, le réel x étant fixé, $f(x)$ est un nombre et l'opération de dérivation n'a aucun sens. Le deuxième est aussi mal rédigé, puisque x n'est pas défini dans la première phrase, donc il ne peut pas être utilisé dans la seconde. Le troisième exemple est correct : la première ligne est une égalité entre fonctions (et on ne définit aucune variable), qu'on peut dériver (toujours sans définir de variable) puis manipuler. Ceci étant, manipuler des fonctions à chaque ligne est lourd, car on doit réécrire « pour tout $x \in \mathbb{R}$ » à chaque fois, et inutile quand on utilise des opérations ayant un sens sur les nombres. Le dernier exemple est correct et plus élégant : une égalité entre fonctions (sans définir de variable), qu'on peut dériver en définissant auparavant une variable, puis manipuler sans redéfinir de variable.

Pour distinguer sans se tromper les exemples justes des exemples faux, on commence par écarter ceux où il existe des variables non définies. Dans ceux qu'il reste, on remplace les variables fixées ***soit*** par un élément précis de l'ensemble manipulé. On écarte alors les exemples qui n'ont plus de sens. Les exemples restants sont alors corrects. Dans note cadre, la première étape permet d'exclure l'exemple 2, où il y a une variable x non définie dans la deuxième assertion. En ce qui concerne les exemples restants, en remplaçant les variables fixées par 0, on élimine l'exemple 1. Le troisième exemple n'est pas modifié, il est donc correct, de même que le quatrième.

