Calcul asymptotique

Comparaison de suites numériques

Exercice 1 [02280] [correction]
Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité :

$$\text{a) } \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n\ln n} \quad \text{b) } n, n^2, n\ln n, \sqrt{n}\ln n, \frac{n^2}{\ln n}$$

Exercice 2 [02281] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

$$\text{a) } u_n = (n+3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)} \quad \text{b) } u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \quad \text{c) } u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$$

Exercice 3 [00236] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

$$\text{a) } u_n = \frac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2} \quad \text{b) } u_n = \frac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1} \quad \text{c) } u_n = \frac{n!+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$$

Exercice 4 [02282] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{b) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \quad \text{c) } u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$$

Exercice 5 [00235] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{b) } u_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \quad \text{c) } u_n = 1-\cos\frac{1}{n}$$

Exercice 6 [01472] [correction]
Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

$$\text{a) } 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \quad \text{b) } \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad \text{c) } \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

Exercice 7 [02287] [correction]
Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

a) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
b) Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 8 [02286] [correction]
Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (t_n)$ des suites de réels strictement positifs telles que

$$u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim t_n$$

Montrer que

$$u_n + w_n \sim v_n + t_n$$

Exercice 9 [02284] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = 0! + 1! + 2! + \cdots + n! = \sum_{k=0}^{n} k!$$

Montrer que $u_n \sim n!$.

Exercice 10 [02285] [correction]
On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

a) Justifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) Déterminer la limite de (S_n).
c) On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.
d) Donner un équivalent simple de (S_n).

Exercice 11 [00301] [correction]
On étudie ici la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

a) Etablir que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$ et en déduire

$$\ln(1+t) \geqslant \frac{t}{t+1}$$

b) Observer que

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln n + 1$$

et en déduire un équivalent simple de S_n.
c) Montrer que la suite $u_n = S_n - \ln n$ est convergente. Sa limite est appelée constante d'Euler et est usuellement notée γ.

Exercice 12 [02459] [correction]
Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Calcul de limites de suites numériques

Exercice 13 [02283] [correction]
Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)} \quad \text{b) } u_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{c) } u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$$

Exercice 14 [01473] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right)$$

Exercice 15 [02782] [correction]
Soient des réels positifs a et b. Trouver la limite de

$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$$

Exercice 16 [01474] [correction]
Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$$

Exercice 17 [01475] [correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$$

Calcul de développements asymptotiques de suites

Exercice 18 [01459] [correction]
Réaliser un développement asymptotique de la suite considérée à la précision demandée :
a) $u_n = \ln(n+1)$ à la précision $1/n^2$
b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ à la précision $1/n^2$
c) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ à la précision $1/n$
d) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $1/n^2$.

Exercice 19 [00323] [correction]
Développement asymptotique à trois termes de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$$

Exercice 20 [01476] [correction]
Former le développement asymptotique, en $+\infty$, à la précision $1/n^2$ de

$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$$

Exercice 21 [02788] [correction]
Donner un développement asymptotique de $\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $o(n^{-3})$.

Etude asymptotique de suites de solutions d'une équation

Exercice 22 [02289] [correction]
Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x+\ln x = n$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}^{+\star}$.
a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
b) Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
c) Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

Exercice 23 [01477] [correction]
Soit $f :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln x + x$$

a) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique x_n tel que $f(x_n) = n$.
b) Former le développement asymptotique de la suite (x_n) à la précision $(\ln n)/n$.

Exercice 24 [00310] [correction]
Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère l'équation

$$x + \sqrt[3]{x} = n$$

d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n.
b) Déterminer la limite de x_n puis un équivalent simple de (x_n).
c) Donner un développement asymptotique à trois termes de (x_n).

Exercice 25 [00311] [correction]
a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$x + \mathrm{e}^x = n$$

possède une unique solution $x_n\in\mathbb{R}$.
b) Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent de x_n.
c) Former un développement asymptotique à trois termes de x_n quand $n\to+\infty$.

Exercice 26 [01478] [correction]
Montrer que l'équation $\tan x = \sqrt{x}$ possède une unique solution x_n dans chaque intervalle $I_n =]-\pi/2,\pi/2[+n\pi$ (avec $n\in\mathbb{N}^\star$).
Réaliser un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 27 [02599] [correction]
Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et l'équation

$$(E_n) : x^n + x - 1 = 0$$

a) Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) notée x_n et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
b) On pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que, pour n assez grand,

$$\frac{\ln n}{2n} \leqslant y_n \leqslant 2\frac{\ln n}{n}$$

(on posera $f_n(y) = n\ln(1-y) - \ln(y)$).
c) Montrer que $\ln(y_n) \sim -\ln n$ puis que

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 28 [00316] [correction]
Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n\geqslant 1$. On la note x_n. Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n) puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 29 [00317] [correction]
Pour tout entier $n\geqslant 2$, on considère l'équation $(E_n) : x^n = x+1$ dont l'inconnue est $x\geqslant 0$.
a) Montrer l'existence et l'unicité de x_n solution de (E_n).
b) Montrer que (x_n) tend vers 1.
c) Montrer que (x_n) admet un développement limité à tout ordre. Donner les trois premiers termes de ce développement limité.

Exercice 30 [00318] [correction]
Pour $n\geqslant 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1$$

a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n.
b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n \to +\infty$.
c) Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n.

Exercice 31 [00312] [correction]
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^n + \ln x = 0$ possède une unique solution $x_n > 0$.
b) Déterminer la limite de x_n.
c) On pose $u_n = 1 - x_n$. Justifier que $nu_n \sim -\ln u_n$ puis déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 32 [03154] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on introduit le polynôme

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n)$$

a) Montrer que le polynôme P_n' possède une unique racine dans l'intervalle $]0,1[$; celle-ci sera noté x_n.
b) Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{P_n'}{P_n}$$

d) En déduire un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 33 [02471] [correction]
Soit $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ et $(\mathcal{C})$ le graphe de f.
a) Montrer l'existence d'une suite (x_n) vérifiant :
i) (x_n) est croissante positive.
ii) la tangente à $(\mathcal{C})$ en $(x_n, f(x_n))$ passe par O.
b) Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de (x_n).

Etude asymptotique de suites récurrentes

Exercice 34 [02302] [correction]
On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$$

a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
c) Montrer que $u_n \leqslant n$ puis que $u_n = o(n)$.
d) Donner un équivalent simple de (u_n).
e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Comparaison de fonctions numériques

Exercice 35 [01821] [correction]
Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \quad \text{b) } \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \quad \text{c) } \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

Exercice 36 [00306] [correction]
Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$

$$\text{a) } \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 \quad \text{b) } \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \quad \text{c) } x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$$

Exercice 37 [01823] [correction]
Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0$

$$\text{a) } \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \quad \text{b) } \tan x - \sin x \quad \text{c) } \mathrm{e}^x + x - 1$$

Exercice 38 [00313] [correction]
Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0$

$$\text{a) } \ln(1+\sin x) \quad \text{b) } \ln(\ln(1+x)) \quad \text{c) } (\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2$$

Exercice 39 [00305] [correction]
Déterminer un équivalent de $\ln(\cos x)$ quand $x \to (\pi/2)^-$

Exercice 40 [01461] [correction]
Déterminer un équivalent simple des fonctions proposées au voisinage de 0 :

$$\text{a) } x(2+\cos x) - 3\sin x \quad \text{b) } x^x - (\sin x)^x \quad \text{c) } \arctan(2x) - 2\arctan(x)$$

Exercice 41 [01824] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que

$$f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

a) Etudier la limite de f en $+\infty$.
b) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Calcul de limites de fonctions numériques

Exercice 42 [01822] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x} + x^2}{x - \ln x} \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x - x}{x + \cos x} \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice 43 [00704] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to0^+} \frac{x + \sin x}{x\ln x} \quad \text{b) } \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x + x^2}{\ln(x + x^2)} \quad \text{c) } \lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

Exercice 44 [00705] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{\ln x} \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\ln x}$$

Exercice 45 [01462] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x\to0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \quad \text{c) } \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x}$$

Exercice 46 [01463] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)} \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} \quad \text{c) } \lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}$$

Exercice 47 [03381] [correction]
Déterminer

$$\lim_{x\to1^-} \ln(x)\ln(1-x)$$

Calcul de développements limités

Exercice 48 [01447] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(\pi/4)$ de $\sin x$
b) $DL_4(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$
c) $DL_5(0)$ de $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}x$.

Exercice 49 [00226] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
b) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$
c) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

Exercice 50 [00745] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$
b) $DL_3(0)$ de $\ln(2+\sin x)$
c) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cos x}$

Exercice 51 [00292] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$
b) $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sqrt{1+x})$
c) $DL_3(0)$ de $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

Exercice 52 [01448] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$
b) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
c) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$

Exercice 53 [01451] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
b) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan x}{\tan x}$
c) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$

Exercice 54 [00751] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$
b) $DL_2(0)$ de $\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$
c) $DL_3(0)$ de $\frac{x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-1}$

Exercice 55 [00231] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
b) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cos x}$
c) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$
d) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$

Exercice 56 [01449] [correction]
Former le $DL_3(1)$ de $\arctan x$

Exercice 57 [00232] [correction]
Former le développement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ de $\arctan(e^x)$.
Quelle à l'allure de cette fonction autour de ce point ?

Exercice 58 [01452] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :
a) $DL_{10}(0)$ de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
b) $DL_{1000}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

Exercice 59 [01453] [correction]
Exprimer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 60 [01454] [correction]
Pour $\alpha = -1/2$ et $k \in \mathbb{N}$, exprimer

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

à l'aide de nombres factoriels.
En déduire une expression du $DL_{2n+1}(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis du $DL_{2n+2}(0)$ de $\arcsin(x)$.

Exercice 61 [00233] [correction]
Exprimer le développement limité général en 0 de $\arcsin x$.

Exercice 62 [01455] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ de $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

Exercice 63 [01456] [correction]
Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 64 [03025] [correction]
En calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n de $(e^x-1)^n$, établir que pour tout $0 \leqslant \ell \leqslant n$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

Exercice 65 [02519] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Applications à l'étude locale de fonctions

Exercice 66 [01464] [correction]
Soit $f :]-1,0[\cup]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 67 [01465] [correction]
Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 68 [01466] [correction]
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 69 [01470] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les $DL_n(0)$ sont nuls.

Exercice 70 [01471] [correction]
Soit $f :]0,1[\cup]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

a) Montrer que f est convexe sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
b) Montrer que, pour tout $x > 1$ on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

En déduire que $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \ln 2$. De même, établir : $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \ln 2$.
c) On prolonge f par continuité en 1, en posant $f(1) = \ln 2$.
Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
Etablir la convexité de f sur $]0,+\infty[$.

Calcul de développements asymptotiques de fonctions

Exercice 71 [01457] [correction]
Former le développement asymptotique en 0 de l'expression considérée à la précision demandée :
a) $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ à la précision $x^{5/2}$
b) x^x à la précision $(x\ln x)^2$

Exercice 72 [01458] [correction]
Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée à la précision demandée :
a) $\sqrt{x+1}$ à la précision $1/x^{3/2}$.
b) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ à la précision $1/x^2$.
c) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $1/x^2$.

Exercice 73 [03431] [correction]
Former le développement asymptotique quand $x \to +\infty$ de $\arctan x$ à la précision $1/x^3$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a)
$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{\ln n}{n^2} \ll \frac{1}{n\ln n} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{\ln n}{n}$$
b)
$$\sqrt{n}\ln n \ll n \ll n\ln n \ll \frac{n^2}{\ln n} \ll n^2$$

Exercice 2 : [énoncé]
a) $u_n = \frac{n\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}} \to 0$
b) $u_n \sim \frac{2\ln n}{n} \to 0$
c) $u_n \sim n^{1/3} \to +\infty$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) $u_n \sim -\frac{1}{2}n \to -\infty$
b) $u_n \sim 2n \to +\infty$
c) $u_n \sim \frac{n!}{3^n} \to +\infty$

Exercice 4 : [énoncé]
a)
$$u_n = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$$
b)
$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}+o(\sqrt{n})+\sqrt{n}+o(\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}+o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$
c)
$$u_n = \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$
car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n} \to 0$.

Exercice 5 : [énoncé]
a) $u_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.
b) $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \to 0 \neq 1$ donc $u_n \sim \ln\frac{1}{n} = -\ln n$.
c) $u_n = 2\sin^2\frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 6 : [énoncé]
a)
$$2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} \sim \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$
b)
$$\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)} \sim \frac{1/n}{1/2n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$
c) $\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$ or
$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1+\frac{\ln(n+1)}{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}\right)^3+o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$
et
$$\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} = 1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3+o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$
donc
$$\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n} = -\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) (u_n) est décroissante donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.
Puisque $u_n+u_{n+1} \sim \frac{1}{n} \to 0^+$, on a $\ell+\ell = 0$ donc $\ell = 0$.
De plus, à partir d'un certain rang : $2u_n \geqslant u_n+u_{n+1} > 0$
b) Par monotonie
$$u_{n+1}+u_n \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1}+u_n$$
avec $u_{n+1}+u_n \sim \frac{1}{n}$ et $u_{n-1}+u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ donc $2u_n \sim \frac{1}{n}$ puis
$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

Exercice 8 : [énoncé]
Supposons $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. On a

$$\left|\frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1\right| = \left|\frac{(u_n - v_n) + (w_n - t_n)}{v_n + t_n}\right|$$

donc

$$\left|\frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1\right| \leqslant \frac{|u_n - v_n|}{v_n} + \frac{|w_n - t_n|}{t_n} = \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| + \left|\frac{w_n}{t_n} - 1\right| \to 0$$

Exercice 9 : [énoncé]
On a

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!$$

Or

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \to 0$$

et

$$0 \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-2} k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n} \to 0$$

donc

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! = n! + o(n!) \sim n!$$

Exercice 10 : [énoncé]
a)

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b)

$$S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2\sqrt{n+1} - 2$$

puis $S_n \to +\infty$.

c) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.
Or $u_n = S_n - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2$ donc (u_n) est aussi minorée. Par suite (u_n) converge.
d)

$$S_n = 2\sqrt{n} + u_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) On étudie la fonction $t \mapsto t - \ln(1+t)$ pour établir la première inégalité. On en déduit

$$\ln(1 - \frac{t}{1+t}) \leqslant -\frac{t}{1+t}$$

donc

$$\ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leqslant -\frac{t}{1+t}$$

puis l'inégalité voulue.
b)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \ln(n+1)$$

et

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1/k}{1 + 1/k} \leqslant 1 + \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = 1 + \ln n$$

On en déduit

$$S_n \sim \ln n$$

c)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1/n}{1 + 1/n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 0$$

donc (u_n) est décroissante. De plus $u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant 0$ donc (u_n) est minorée et par suite convergente.

Exercice 12 : [énoncé]
On peut calculer l'intégrale

$$u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$$

Or pour $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc
$$u_n = \arctan\frac{1}{n^2} - \arctan\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

Exercice 13 : [énoncé]
a) $\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ car $\frac{1}{n^2+1} \to 0$. Par suite $u_n \sim 1 \to 1$.
b) $u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$, $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \to 1$ puis $u_n \to \mathrm{e}$.
c) $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1)}$,
$\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln n - \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
Or $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})} \sim \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}$ et
$\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)$ donc
$\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right) \to 0$ donc $u_n \to 1$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) $n\sin\frac{1}{n} \sim \frac{n}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$
b) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}+o(1)}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}}$.
c) $n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} n^2 (\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+1/n)}{n}} - 1) \sim \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$ donc
$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right) = 1$

Exercice 15 : [énoncé]
Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors la suite converge évidemment vers 0. On suppose désormais $a, b > 0$.
Puisque
$$a^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a} \text{ avec } \frac{1}{n}\ln a \to 0$$
on peut écrire
$$a^{1/n} = 1 + \frac{1}{n}\ln a + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
On procède de même pour $b^{1/n}$ et alors
$$\frac{1}{2}\left(a^{1/n} + b^{1/n}\right) = 1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
puis
$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$
donne
$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab) + o(1)\right)$$
Finalement
$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n \to \sqrt{ab}$$

Exercice 16 : [énoncé]
On a
$$\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} = \frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{\ln b}{n}}}{2} = 1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o(1/n)$$
donc
$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \mathrm{e}^{n(\ln(1+\frac{\ln a+\ln b}{2n}+o(1/n))} = \mathrm{e}^{\frac{\ln a+\ln b}{2}+o(1)} \to \sqrt{ab}$$

Exercice 17 : [énoncé]
On a
$$3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3} = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 2} - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 3} = 1 + \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(3\sqrt[n]{2}+2\sqrt[n]{3})} = \mathrm{e}^{\ln(8/9)+o(1)} \to \frac{8}{9}$$

Exercice 18 : [énoncé]
a) $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{8}\frac{1}{n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$.
c) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2n} + \frac{11\mathrm{e}}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 19 : [énoncé]
Pour $x \in [0,1]$,
$$\left|\sin x - x + \frac{1}{6}x^3\right| \leqslant \frac{1}{120}$$
On a donc
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{k^3}{n^6} + M_n$$
avec
$$|M_n| \leqslant \frac{1}{120}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^5}{n^{10}} \leqslant \frac{1}{120}\frac{1}{n^4}$$
donc $M_n = o(1/n^3)$.
Or
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$
et
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$
donc
$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 20 : [énoncé]
On a
$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-4}\frac{k!}{n!}$$
Or
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-4}\frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-4}\frac{(n-4)!}{n!} \leqslant n\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = o(1/n^2)$$
Donc
$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]
On a
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!}$$
Or
$$\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} \leqslant (n-4)\frac{(n-5)!}{n!} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
donc
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 22 : [énoncé]
a) Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \ln x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}^{+\star}$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique $x_n = f^{-1}(n)$.
b) Le tableau de variation de f^{-1} donne $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Par suite $x_n \to +\infty$.
c) $x_n \to +\infty$ donne $\ln x_n = o(x_n)$. La relation $x_n + \ln x_n = n$ donne alors $x_n + o(x_n) = n$ et donc $x_n \sim n$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) La fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ d'où l'existence de (x_n).
b) Comme $n \to +\infty$, $x_n = f^{-1}(n) \to +\infty$. Par suite $\ln x_n = o(x_n)$ et $n = x_n + \ln x_n \sim x_n$.
Donc $x_n = n + o(n)$.
Soit $y_n = x_n - n$. On a :
$$y_n = -\ln x_n = -\ln(n + o(n)) = -\ln n + \ln(1 + o(1)) = -\ln n + o(1)$$
Donc
$$x_n = n - \ln n + o(1)$$
Soit $z_n = y_n + \ln n$. On a :
$$z_n = -\ln(n - \ln(n) + o(1)) + \ln n = -\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
$$\text{Donc } x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) La fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.
b) Puisque $x_n=f^{-1}(n)$ et $f^{-1}\underset{+\infty}{\to}+\infty$, on a $x_n\to+\infty$.
On en déduit $\sqrt[3]{x_n}=o(x_n)$ puis

$$x_n\sim n$$

c) On peut écrire $x_n=n+y_n$ avec $y_n=o(n)$.
Puisque

$$y_n+\sqrt[3]{n+y_n}=0$$

on a

$$y_n\sim-\sqrt[3]{n}$$

On peut écrire $y_n=-\sqrt[3]{n}+z_n$ avec $z_n=o\left(\sqrt[3]{n}\right)$.
Puisque

$$-\sqrt[3]{n}+z_n+\sqrt[3]{n}\left[1+\frac{1}{3}\frac{-\sqrt[3]{n}}{n}+o\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right)\right]=0$$

on obtient

$$z_n\sim\frac{1}{3\sqrt[3]{n}}$$

Finalement

$$x_n=n-\sqrt[3]{n}+\frac{1}{3\sqrt[3]{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

Exercice 25 : [énoncé]
a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x+\mathrm{e}^x$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $f(x_n)=n\leqslant n+1=f(x_{n+1})$ donc $x_n\leqslant x_{n+1}$ car f^{-1} est croissante.
Si (x_n) est majorée par M alors $f(x_n)=n\leqslant f(M)$ ce qui est absurde.
La suite (x_n) étant croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
$x_n=o(\mathrm{e}^{x_n})$ donc $\mathrm{e}^{x_n}\sim n\to+\infty\neq1$ puis $x_n\sim\ln n$.
c) Posons $y_n=x_n-\ln n=o(\ln n)$.
On a $y_n+\ln n+n\mathrm{e}^{y_n}=n$ donc

$$\mathrm{e}^{y_n}=1-\frac{y_n}{n}+\frac{\ln n}{n}\to1$$

d'où $y_n\to0$ et

$$\mathrm{e}^{y_n}=1+y_n+o(y_n)$$

On a alors $y_n+\ln n+n(1+y_n+o(y_n))=n$ d'où $ny_n+o(ny_n)=-\ln n$ et

$$y_n\sim-\frac{\ln n}{n}$$

Par suite

$$x_n=\ln n-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

On écrit $y_n=-\frac{\ln n}{n}+z_n$ et

$$\mathrm{e}^{y_n}=1-\frac{\ln n}{n}+z_n+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

donc

$$-\frac{\ln n}{n}+z_n+nz_n+\frac{1}{2}\frac{(\ln n)^2}{n}+o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)=0$$

puis

$$z_n\sim-\frac{(\ln n)^2}{2n^2}$$

Finalement

$$x_n=\ln n-\frac{\ln n}{n}-\frac{(\ln n)^2}{2n^2}+o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$$

Exercice 26 : [énoncé]
Sur I_n, la fonction $f:x\mapsto\tan x-\sqrt{x}$ est continue, croît strictement de $-\infty$ vers $+\infty$.
Cela assure l'existence et l'unité de x_n.
On a

$$-\frac{\pi}{2}+n\pi<x_n<\frac{\pi}{2}+n\pi$$

donc $x_n\sim n\pi$.
Posons $y_n=x_n-n\pi$. On a $\tan y_n=\sqrt{x_n}$ et $y_n\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$y_n=\arctan\sqrt{x_n}\to\frac{\pi}{2}$$

Posons

$$z_n=\frac{\pi}{2}-y_n=\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{x_n}=\arctan\frac{1}{\sqrt{x_n}}=\arctan\frac{1}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}}$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\pi n^3}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

donc

$$z_n=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\pi n^3}}-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi^3n^3}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Finalement

$$x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{n\pi}}+\frac{3+4\pi}{\pi^{3/2}}\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Exercice 27 : [énoncé]
a) On introduit $\varphi_n(x)=x^n+x-1$. $\varphi_n'(x)=nx^{n-1}+1>0$, φ_n est continue strictement croissante et réalise une bijective et de $[0,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$ d'où l'existence et l'unicité de x_n. On a $\varphi_n(1)=1$ donc $x_n\in\,]0,1[$. Si $x_{n+1}<x_n$ alors $x_{n+1}^{n+1}<x_n^n$ puis $x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}-1<x_n^n+x_n-1$ ce qui est absurde. On en déduit que (x_n) est croissante et étant majorée cette suite converge. Posons ℓ sa limite, $\ell\in\,]0,1]$. Si $\ell<1$ alors $x_n^n+x_n-1=0$ donne à la limite $\ell-1=0$ ce qui est absurde. Il reste $\ell=1$.
b) f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $f_n(y_n)=0$, $f_n\left(\frac{\ln n}{2n}\right)\sim\frac{\ln n}{2}>0$ et $f_n\left(\frac{2\ln n}{n}\right)\sim-\ln n<0$ donc à partir d'un certain rang $\frac{\ln n}{2n}\leqslant y_n\leqslant 2\frac{\ln n}{n}$.
c) $\ln\left(\frac{\ln n}{2n}\right)\leqslant\ln y_n\leqslant\ln\left(2\frac{\ln n}{n}\right)$ donne $\ln(y_n)\sim-\ln n$ puis $n\ln(1-y_n)=\ln y_n$ donne $-ny_n\sim-\ln n$ puis $y_n\sim\frac{\ln n}{n}$ et finalement $x_n=1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 28 : [énoncé]
Posons $f_n(x)=x^n+x^2-1$. L'étude de la fonction f_n assure l'existence et l'unicité d'une solution $x_n\in\mathbb{R}^+$ à l'équation étudiée. De plus, on observe que $x_n\in[0,1]$.
Puisque $0=f_{n+1}(x_{n+1})\leqslant f_n(x_{n+1})$, on peut affirmer $x_{n+1}\geqslant x_n$.
La suite (x_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ.
Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in[0,1]$, à la limite $\ell\in[0,1]$.
Si $\ell<1$ alors

$$0\leqslant x_n^n\leqslant\ell^n\to 0$$

et la relation $x_n^n+x_n^2-1=0$ donne à la limite $\ell^2=1$ ce qui est absurde.
On conclut que $\ell=1$.
Posons $u_n=1-x_n$,

On a

$$(1-u_n)^n=u_n(2-u_n)$$

donc

$$n\ln(1-u_n)=\ln u_n+\ln(2-u_n)$$

d'où

$$-nu_n\sim\ln u_n\text{ puis }\ln n+\ln u_n\sim\ln(-\ln u_n)$$

or

$$\ln(-\ln u_n)=o(\ln u_n)$$

donc

$$\ln u_n\sim-\ln n$$

puis

$$u_n\sim\frac{\ln n}{n}$$

et enfin

$$x_n-1\sim-\frac{\ln n}{n}$$

Exercice 29 : [énoncé]
a) Il suffit d'étudier $f_n:x\mapsto x^n-(x+1)$.
b) $f_n(1)\leqslant 0$ donc $x_n\geqslant 1$. De plus

$$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}-(x_n+1)=(x_n-1)(x_n+1)\geqslant 0$$

donc $x_{n+1}\leqslant x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $\ell\geqslant 1$.
Si $\ell>1$ alors $x_n^n\geqslant\ell^n\to+\infty$ or $x_n^n=x_n+1\to\ell+1$. Ce qui est impossible et il reste $\ell=1$.
c) On a

$$x^n=x+1\Leftrightarrow n\ln x=\ln(x+1)\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{n}$$

avec

$$g(x)=\frac{\ln x}{\ln(x+1)}$$

définie sur $[1,+\infty[$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $g'(x)>0$ donc g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[0,1[$, de plus (puisque $g'(x)\neq 0$) g^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc g^{-1} admet un $DL_n(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc $x_n=g^{-1}(1/n)$ admet un développement limité à tout ordre.
Formons ses trois premiers termes

$$g^{-1}(x)=a+bx+cx^2+o(x^2)$$

$a = g^{-1}(0) = 1$. $g(g^{-1}(x)) = x$ donc

$$\ln(1 + bx + cx^2 + o(x^2)) = x\ln(2 + bx + o(x^2))$$

puis

$$bx + \left(c - \frac{b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \ln(2)x + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc

$$b = \ln 2 \text{ et } c = \frac{(1+\ln(2))\ln(2)}{2}$$

Finalement

$$x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(1+\ln(2))\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 30 : [énoncé]
a) La fonction $x \mapsto P_n(x)$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ car

$$P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1)$$

est strictement négatif sauf pour $x = 1$.
La fonction continue P_n réalise donc une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ vers $[P_n(1), P_n(0)] = [-n, 1]$.
On en déduit l'existence et l'unicité de la solution x_n à l'équation $P_n(x) = 0$.
b) Puisque $x_n \in [0,1]$, on a $x_n^{n+1} \leqslant x_n^n$ puis

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leqslant P_n(x_n) = 0$$

Ainsi $P_{n+1}(x_n) \leqslant P_{n+1}(x_{n+1})$ et donc $x_{n+1} \leqslant x_n$ car la fonction P_{n+1} est strictement décroissante.
La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0,1]$.
Si $\ell > 0$ alors

$$P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 \to -\infty$$

ce qui est absurde. On conclut $\ell = 0$.
c) On a

$$\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \to 0$$

et donc $x_n^n = o(nx_n)$.
Sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $nx_n \sim 1$ puis

$$x_n \sim \frac{1}{n}$$

Ecrivons ensuite

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n \to 0$$

Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a

$$\varepsilon_n = x_n^n = \frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} \geqslant 0$$

Nous allons montrer

$$(1+\varepsilon_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ce qui permettra de déterminer un équivalent de ε_n puis de conclure.
Puisque $\varepsilon_n \to 0$, pour n assez grand, on a $|1+\varepsilon_n| \leqslant 2$ et alors

$$\varepsilon_n = \frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} \leqslant \frac{2^n}{n^n}$$

On en déduit

$$1 \leqslant (1+\varepsilon_n)^n \leqslant \left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)\right)$$

Or

$$n\ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^{n-1}} \to 0$$

et par encadrement

$$(1+\varepsilon_n)^n \to 1$$

On peut conclure $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$ et finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) Soit $f_n : x \mapsto x^n + \ln x$. On a

x	0		1		$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

d'où l'existence et l'unicité de x_n avec en plus la propriété $x_n \in]0,1[$.
b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \ln(x_n) = (1 - x_n)\ln(x_n) < 0$$

donc $x_{n+1} \geqslant x_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée par 1 donc converge vers $\ell \in]0,1]$.

Si $\ell < 1$ alors

$$0 = x_n^n + \ln x_n \to -\ln \ell$$

car $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n \to 0$.
Ceci est impossible. Il reste $\ell = 1$.
c) $(1-u_n)^n = -\ln(1-u_n) \sim u_n \to 0 \neq 1$
donc $n\ln(1-u_n) \sim \ln u_n$ puis $nu_n \sim -\ln u_n \to +\infty \neq 1$.
$\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$ donc $\ln n = -\ln u_n + \ln(-\ln u_n) + o(\ln(-\ln u_n))$ or $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$ donc $\ln n \sim -\ln u_n$ puis

$$u_n \sim -\frac{\ln u_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) Par application du théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto P_n(t)$ sur chacun des intervalles $[k, k+1]$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$), on obtient que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans chacun des intervalles $]k, k+1[$. Puisque le polynôme P_n' est de degré n, il possède au plus n racines et donc il ne possède pas d'autres racines que celles précédentes. En particulier, le polynôme P_n' possède exactement une racine dans l'intervalle $]0,1[$.
b) On a

$$P_{n+1}(X) = P_n(X)(X-(n+1))$$

En dérivant et en évaluant en x_n on obtient

$$P_{n+1}'(x_n) = P_n(x_n)$$

D'une part

$$(-1)^n P_n(x_n) = x_n \prod_{k=1}^{n} (k - x_n)$$

est une quantité positive.
D'autre part, l'expression

$$(-1)^n P_{n+1}(x) = x(x-1)\prod_{k=2}^{n+1}(k-x)$$

est négative sur $[0,1]$. On en déduit ses variations sur $[0,1]$ puis le signe de sa dérivée sur ce même intervalle. Puisque qu'elle est négative sur $[0, x_{n+1}]$ et positive sur $[x_{n+1}, 1]$, on obtient

$$x_{n+1} \leqslant x_n$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
c) Puisque les racines de P_n sont exactement les $0, 1, \dots, n$ et puisque celles-ci sont simples, on obtient

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X-k}$$

d) Sachant $F_n(x_n) = 0$, on obtient

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque $0 \leqslant x_n \leqslant x_0 \leqslant 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x_0} \leqslant \frac{1}{1-x_0} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$$

Ainsi

$$\ln n + O(1) \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \ln(n-1) + O(1)$$

et on peut conclure

$$x_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ avec

$$I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, la tangente en $(x, f(x))$ passe par O si, et seulement si, $xf'(x) = f(x)$.
Après transformation, ceci équivaut pour $x > 0$ à l'équation

$$x\tan x + \ln(\cos(x)) + x = 0$$

Posons $\varphi(x) = x\tan x + \ln(\cos(x)) + x$.
φ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
$\varphi'(x) = x(1+\tan^2 x) + 1 > 0$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^{+\star}$.
Quand $x \to \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^-$, $\varphi(x) \to +\infty$. Quand $x \to \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^+$, $\varphi(x) \to -\infty$.
$\varphi_{\restriction I_k}$ réalise donc une bijection de I_k vers $\mathbb{R}$ (pour $k \in \mathbb{N}^\star$).
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ avec $x_n = (\varphi_{\restriction I_n})^{-1}(0)$ est solution.
b) Evidemment $x_n \sim 2n\pi$ et donc $x_n = 2n\pi + y_n$.

Après calculs, on obtient

$$(2n\pi + y_n)(\cos y_n + \sin y_n) = -\cos(y_n)\ln(\cos y_n)$$

La fonction $t \mapsto t\ln t$ est bornée sur $]0,1]$ car prolongeable par continuité en 0 et donc

$$\cos y_n + \sin y_n = -\frac{\cos y_n \ln(\cos y_n)}{2n\pi + y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Sachant $|y_n| < \pi/2$, on en déduit $y_n \to -\pi/4$.
On conclut

$$x_n = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) $u_n \geqslant \sqrt{n} \to +\infty$.
b) $u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n}$.
c) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $u_n \leqslant n$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n} \underset{HR}{\leqslant} \sqrt{(n+1) + n} \leqslant n + 1$$

Récurrence établie.

$$0 \leqslant u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leqslant \sqrt{n + (n-1)} = O\left(\sqrt{n}\right)$$

donc $u_n = O\left(\sqrt{n}\right) = o(n)$.
d) $u_n = \sqrt{n + o(n)} \sim \sqrt{n}$
e)

$$u_n - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

or $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ et $u_n + \sqrt{n} = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$ donc

$$u_n - \sqrt{n} \to \frac{1}{2}$$

Exercice 35 : [énoncé]
a) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{2/3}} = x^{5/6}$$

b) Quand $x \to +\infty$,

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} = x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$$

c) Quand $x \to +\infty$,

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{x+o(x)+x+o(x)} \sim \frac{1}{x}$$

Exercice 36 : [énoncé]
a) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{x\ln x}$$

b) Quand $x \to +\infty$,

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)}}$$

Or

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1} \sim \frac{2}{x}$$

et

$$\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)} = 2\sqrt{\ln x} + o\left(\sqrt{\ln x}\right) \sim 2\sqrt{\ln x}$$

donc

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \sim \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

c) Quand $x \to +\infty$,

$$x\ln(x+1) - (x+1)\ln x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln x = 1 + o(1) - \ln x \sim -\ln x$$

Exercice 37 : [énoncé]
a) Quand $x \to 0$,

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{2x^2}{2} = x^2$$

b) Quand $x \to 0$,

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) = 2\tan x \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^3}{2}$$

c) Quand $x \to 0$,

$$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$$

donc

$$\mathrm{e}^x + x - 1 = x + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$$

Exercice 38 : [énoncé]

a) Quand $x \to 0$,

$$\ln(1 + \sin x) \sim \sin x$$

car $\sin x \to 0$, or

$$\sin x \sim x$$

donc

$$\ln(1 + \sin x) \sim x$$

b) Quand $x \to 0$,

$$\ln(1 + x) \sim x \to 0 \neq 1$$

donc

$$\ln(\ln(1 + x)) \sim \ln(x)$$

c) Quand $x \to 0$,

$$\ln(1 + x)^2 - \ln(1 - x)^2 = (\ln(1 + x) + \ln(1 - x))(\ln(1 + x) - \ln(1 - x))$$

or

$$\ln(1 + x) + \ln(1 - x) = \ln(1 - x^2) \sim -x^2$$

et

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = x + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x)$$

donc

$$(\ln(1 + x))^2 - (\ln(1 - x))^2 \sim -2x^3$$

Exercice 39 : [énoncé]

Quand $x \to \frac{\pi}{2}^-$, posons $x = \frac{\pi}{2} - h$ avec $h \to 0^+$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \sin h$$

Or

$$\sin h \sim h \to 0 \neq 1$$

donc

$$\ln \sin h \sim \ln h$$

puis

$$\ln \cos x \sim \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Exercice 40 : [énoncé]

Par développements limités :

a) $x(2 + \cos x) - 3\sin x \sim \frac{1}{60}x^5$

b) $x^x - (\sin x)^x = x^x(1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x) \sim \frac{1}{6}x^3$

c) $\arctan(2x) - 2\arctan(x) \sim -2x^3$

Exercice 41 : [énoncé]

a) f est décroissante donc possède une limite ℓ en $+\infty$.

Quand $x \to +\infty$, $f(x) \to \ell$ et $f(x + 1) \to \ell$ donc

$$f(x) + f(x + 1) \to 2\ell$$

or

$$f(x) + f(x + 1) \sim \frac{1}{x} \to 0$$

donc $\ell = 0$.

b) Quand $x \to +\infty$, on a

$$f(x + 1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x - 1)$$

donc

$$2f(x) \sim \frac{1}{x}$$

puis

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

Exercice 42 : [énoncé]

a) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{x\mathrm{e}^{-x} + x^2}{x - \ln x} \sim \frac{x^2}{x} = x \to +\infty$$

b) Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{x\ln x - x}{x+\cos x} \sim \frac{x\ln x}{x} = \ln x \to +\infty$$
c) Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{\sqrt{x\mathrm{e}^x - x^2}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \sim \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x/2} \to 0$$

Exercice 43 : [énoncé]
a) Quand $x \to 0^+$,
$$\frac{x+\sin x}{x\ln x} = \frac{x+x+o(x)}{x\ln x} \sim \frac{2}{\ln x} \to 0$$
b) Quand $x \to 0^+$,
$$\ln x + x^2 = \ln x + o(\ln x)$$
et puisque
$$x + x^2 \sim x \to 0 \neq 1$$
on a
$$\ln(x+x^2) \sim \ln x$$
donc
$$\frac{\ln x + x^2}{\ln(x+x^2)} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1 \to 1$$
c) Quand $x \to 1$, on peut écrire $x = 1+h$ avec $h \to 0$,
$\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln(1+h)}{2h+h^2} \sim \frac{h}{2h} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

Exercice 44 : [énoncé]
a) Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{x^{\ln x}}{\ln x} = \mathrm{e}^{(\ln x)^2 - \ln\ln x} = \mathrm{e}^{(\ln x)^2 + o(\ln x)^2} \to +\infty$$
b) Quand $x \to +\infty$,
$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}\ln x - \frac{\ln x}{x}\ln\ln x} = \mathrm{e}^{\frac{(\ln x)^2}{x} + o\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)} \to 1$$
c) Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x} = \frac{\ln(2x+o(x))}{\ln x} \sim \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} \sim 1 \to 1$$

Exercice 45 : [énoncé]
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Exercice 46 : [énoncé]
a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)} = \frac{1}{3}6^{4/13}5^{5/26}$
b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = \mathrm{e}$
c) $x^a - a^x \sim a^a(1-\ln a)(x-a)$ si $a \neq 1$ et
$\arctan(x) - \arctan(a) \sim (\arctan(a))'(x-a) = \frac{(x-a)}{1+a^2}$.
Si $a \neq 1$,
$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = a^a(1+a^2)(1-\ln a)$$
Si $a = 1$,
$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = 2$$

Exercice 47 : [énoncé]
Posons $x = 1-h$.
Quand $x \to 1^-$, on a $h \to 0^+$ et
$$\ln(x)\ln(1-x) = \ln(1-h)\ln h \sim -h\ln h \to 0$$

Exercice 48 : [énoncé]
a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x-\frac{\pi}{4})^3 + o((x-\frac{\pi}{4})^3)$
b) $\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1))^4$.
c) $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}x = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 49 : [énoncé]
a) $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
b) $\ln(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
c) $\cos(\ln x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \mathrm{o}((x-1)^3)$.

Exercice 50 : [énoncé]
a) $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$
b) $\ln(2+\sin x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$
c) $\sqrt{3+\cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

Exercice 51 : [énoncé]
a) $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{\mathrm{e}}{48}x^3 + o(x^3)$.
b) $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) = \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3)$
c) $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = 2\ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

Exercice 52 : [énoncé]
a) $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + o(x^2)$
b) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$
c) $\ln\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

Exercice 53 : [énoncé]
a) $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$
b) $\frac{\arctan x}{\tan x} = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$
c) $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Exercice 54 : [énoncé]
a) $\frac{x-\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$
b) $\frac{\sin x}{\exp(x)-1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$
c) $\frac{x\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x-1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$

Exercice 55 : [énoncé]
a) $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
b) $\sqrt{3+\cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$
c) $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + o(x^2)$
d) $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$

Exercice 56 : [énoncé]
On primitive de $DL_2(1)$ de $\frac{1}{1+x^2}$:
$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

Exercice 57 : [énoncé]
On a

$$(\arctan \mathrm{e}^x)' = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2(1+x+x^2+o(x^2))} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

donc en intégrant

$$\arctan \mathrm{e}^x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

La tangente au point à pour équation $y = \pi/4 + x/2$. La courbe traverse la tangente.

Exercice 58 : [énoncé]
a) $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o(t^9)$ dont $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = t - \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{24}t^9 + o(t^{10})$
puis $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$
b) $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(\mathrm{e}^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) = \ln(\mathrm{e}^x) + \ln(1 - \frac{x^{1000}\mathrm{e}^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) = x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + o(x^{1000})$.

Exercice 59 : [énoncé]
$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k}(-x)^k + o(x^n)$ avec
$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} = (-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$.
Au final, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}x^k + o(x^n)$

Exercice 60 : [énoncé]
On a

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

puis

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Exercice 61 : [énoncé]
On a
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
et
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k x^{2k} + o(x^{2n})$$
avec
$$c_k = \frac{(-1)^k \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$
donc
$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Exercice 62 : [énoncé]
$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$ et $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$.
Donc $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

Exercice 63 : [énoncé]
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2} > 0$$
de plus $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty, \lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En particulier f^{-1} admet une $DL_5(0)$, de plus comme f est impaire, f^{-1} l'est aussi et le $DL_5(0)$ de f^{-1} est de la forme :
$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$
En réalisant un $DL_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$ on obtient :
$$f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + (\frac{1}{2}a + 3b + c)x^5 + o(x^5)$$
Or $f^{-1}(f(x)) = x$, donc :
$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = \frac{5}{2}$$

Exercice 64 : [énoncé]
D'une part $\mathrm{e}^x - 1 = x + o(x)$ donne
$$(\mathrm{e}^x-1)^n = x^n + o(x^n)$$
D'autre part
$$(\mathrm{e}^x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{e}^{kx}$$
or
$$\mathrm{e}^{kx} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{k^\ell}{\ell!}x^\ell + o(x^n)$$
donc, en réordonnant les sommes
$$(\mathrm{e}^x-1)^n = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}k^\ell}{\ell!}x^\ell$$
L'unicité des développements limités entraîne la relation proposée.

Exercice 65 : [énoncé]
a) f est évidemment dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^\star$ et aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
b) f admet pour développement limité à l'ordre $n-1$: $f(x) = o(x^{n-1})$.
Si f admet un $DL_n(0)$ celui-ci serait de la forme
$$f(x) = ax^n + o(x^n)$$
ce qui entraîne que $\sin(1/x)$ admet une limite finie en 0 ce qui est notoirement faux.

Exercice 66 : [énoncé]
On a
$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$
Par suite f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$.
De plus ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$.
L'équation de la tangente en 0 est $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$ et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

Exercice 67 : [énoncé]
On a
$$f(x) = ax - a(1 + \frac{1}{2}a)x^2 + a(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a^2)x^3 + o(x^3)$$
Pour que f présente un point d'inflexion en 0, il faut que $a(1 + \frac{1}{2}a) = 0$ i.e. : $a = -2$.
Inversement si $a = -2$,
$$f(x) = -2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$
et par suite f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 68 : [énoncé]
f est définie sur $\mathbb{R}^\star$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$
donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -1/2$ et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 69 : [énoncé]
f est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.
Montrons par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ est de la forme :
$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$$
pour $x \neq 0$ avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
Pour $n = 0$: ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
$f^{(n)}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour $x \neq 0$,
$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}$$
avec $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$.
Récurrence établie.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \underset{y=1/x^2}{=} P_n(\sqrt{y})\mathrm{e}^{-y} \to 0$ quand $x \to 0^+$et de même quand $x \to 0^-$.
Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$ dans une version généralisée, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par suite $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Exercice 70 : [énoncé]
a) Soit G une primitive de la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ sur $]0,1[$ (resp. sur $]1,+\infty[$).
Pour tout $x \in]0,1[$ (resp. $]1,+\infty[$), on a $f(x) = G(x^2) - G(x)$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ (resp. sur $]1,+\infty[$) et
$$f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$
On a alors
$$f''(x) = \frac{x\ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$
Soit $g(x) = x\ln x - x + 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g'(x) = \ln(x)$. Puisque $g(1) = 0$, la fonction g est positive puis $f'' \geqslant 0$ sur $]0,1[$ (resp. $]1,+\infty[$).
b) Pour $x > 1$,
$$\forall t \in \left[x, x^2\right], \frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$
D'où
$$\int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t.\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t.\ln t}$$
Comme $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t.\ln t} = \ln 2$, on obtient
$$x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln 2$$
puis $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \ln 2$.
Pour $x < 1$,
$$\forall t \in \left[x^2, x\right], \frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$
D'où
$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t.\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t.\ln t}$$
On obtient $x^2\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x\ln 2$ puis $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \ln 2$.
c) f est continue sur $]0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et
$$f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$
Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on a f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(1) = 1$.
De même, en exploitant
$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h) - h}{(1+h)(\ln(1+h))^2} \sim \frac{h^2/2}{(1+h)h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}$$

on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f''(1) = 1/2$.
Comme f'' est positive sur $]0, +\infty[$, on peut conclure que f est convexe sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 71 : [énoncé]
a) $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{5/2} + o(x^{5/2})$
b) $x^x = 1 + x\ln x + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x + o(x^2\ln^2 x)$

Exercice 72 : [énoncé]
a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x}\sqrt{1+1/x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.
b) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x = -\ln x + 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
c) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{x} + \frac{11\mathrm{e}}{24}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 73 : [énoncé]
On a pour $x > 0$

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$$

donc

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$