Calcul différentiel

Différentielle

Exercice 1 [00031] [correction]
a) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.
Justifier que f est différentiable et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \operatorname{tr}(M^3)$.
Justifier que f est différentiable et calculer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 [00035] [correction]
Montrer que l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 \, \mathrm{d}t$$

définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 3 [00028] [correction]
Justifier que la fonction $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 4 [00032] [correction]
a) Justifier que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est différentiable.
b) Calculer la différentielle de det en I_n puis en toute matrice M inversible.
c) En introduisant la comatrice de M, exprimer la différentielle de det en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 [00034] [correction]
Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $M \mapsto M^{-1}$.

Exercice 6 [00029] [correction]
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finies et $\varphi : E \times E \to F$ une application bilinéaire.
Etablir que φ est différentiable et calculer sa différentielle $\mathrm{d}\varphi$.

Exercice 7 [02904] [correction]
Si $p \in \mathbb{N}$, soit

$$f_p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto (x + y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 8 [00037] [correction]
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E.
a) Montrer que l'application $f : x \in E \mapsto (u(x) \mid x)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.
b) Montrer que l'application

$$F : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{(u(x) \mid x)}{(x \mid x)}$$

est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie

$$\mathrm{d}F(a) = \tilde{0} \Leftrightarrow a \text{ est vecteur propre de } u$$

Exercice 9 [00036] [correction]
Soit $f : E \to F$ différentiable vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$.
Montrer que l'application f est linéaire.

Exercice 10 [03502] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $E^\star$ le dual de E et

$$\mathcal{D} = \left\{ d \in E^\star / \forall (f, g) \in E^2, d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f) \right\}$$

a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $E^\star$.
b) Montrer que $\mathcal{D}$ est non réduit à $\{0\}$.
c) Soit $d \in \mathcal{D}$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?
d) Soit $f \in E$. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \, \mathrm{d}t$$

Vérifier que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ est dans E.
e) Soit $d \in \mathcal{D}$. Etablir l'existence de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

f) Déterminer la dimension de $\mathcal{D}$.

Dérivée selon un vecteur

Exercice 11 [01743] [correction]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
b) Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 12 [01744] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur sans pour autant y être continue.

Calcul de dérivées partielles

Exercice 13 [01742] [correction]
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = x^y$ (avec $x > 0$)b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = x\sin(x+y)$.

Exercice 14 [01745] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Justifier que f est continue en $(0,0)$.
Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Exercice 15 [03348] [correction]
Calculer les dérivées partielles de

$$f(x,y) = \min(x, y^2)$$

Exercice 16 [01746] [correction]
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \varphi(y/x)$.
Montrer que f vérifie la relation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 17 [02466] [correction]
On considère

$$f : (x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$$

a) Déterminer le domaine de définition D de f.
b) Etudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D.

Calcul de dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 18 [01756] [correction]
Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^2(x+y)$ b) $f(x,y) = \cos(xy)$

Exercice 19 [01759] [correction]
Soit f et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = f(x + \varphi(y))$$

a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Vérifier l'égalité :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Exercice 20 [00049] [correction]
Soient $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 21 [01760] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction des dérivées partielles de f.

Dérivées partielles de fonctions composées

Exercice 22 [01749] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable.
On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(2t, 1 + t^2)$.
Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 23 [02903] [correction]
Soient $(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et, si $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$$

Calculer $g'(t)$.

Exercice 24 [01755] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv)$$

a) Justifier que g est différentiable.
b) Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 25 [00048] [correction]
Soient $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ différentiable et $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Justifier que g est différentiable et exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 26 [01750] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

a) Justifier que g est différentiable.
b) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
c) Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 27 [00043] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(y, x)$$

Quelle relation existe-t-il entre les dérivées partielles de f ?

Exercice 28 [01752] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + t, y + t) = f(x, y)$$

Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 29 [01753] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = f(x, y)$$

Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 30 [00045] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable homogène de degré $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

a) Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

b) On suppose $n \geqslant 1$. Montrer que les dérivées partielles de f sont elles aussi homogènes, préciser leur degré.

Exercice 31 [00046] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

a) On suppose f homogène de degré α. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

b) Établir la réciproque.

Matrice jacobienne

Exercice 32 [01323] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique.
Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$$

Classe d'une fonction

Exercice 33 [01747] [correction]
Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f :
a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 34 [03802] [correction]
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) f est-elle continue ?
b) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 35 [01758] [correction]
On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 36 [02905] [correction]
On pose

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

pour x, y réels non tous deux nuls.
La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? Un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 37 [01757] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?

Exercice 38 [00040] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

a) Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?
b) Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et, sans calculs, établir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 39 [00041] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

a) Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. On prolonge F par continuité en $(0,0)$ et on suppose de surcroît f de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Justifier que F est différentiable en $(0,0)$ et y préciser sa différentielle.
c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 40 [02460] [correction]
On pose

$$\varphi(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \text{ pour } x \neq y$$

a) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^2$ noté encore φ.
b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 41 [02906] [correction]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$f(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ pour } x \neq y \text{ et } f(x,x) = g'(x)$$

a) Exprimer $f(x,y)$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0,1]$.
b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 42 [01748] [correction]
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 43 [00051] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} f(x+1,t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

Exercice 44 [02907] [correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n : (x,y) \mapsto \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}} x^n$$

On note D l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n(x,y)$ converge. On pose

$$f : (x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$$

a) Déterminer D.
b) Montrer que $f_{\restriction D^\circ}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Gradient

Exercice 45 [00030] [correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien.
a) En quels points l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est-elle différentiable ?
b) Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice 46 [03885] [correction]
Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et x_0 un vecteur de E.

On étudie la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(u(x) \mid x\right) + (x_0 \mid x)$$

a) Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.
b) Calculer le gradient de f en tout point de E.

Exercice 47 [00033] [correction]
a) Montrer que l'application $\Delta : A \mapsto \det A$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Calculer sa différentielle en commençant par évaluer ses dérivées partielles.
c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$.
Déterminer le vecteur gradient de Δ en A

Recherche d'extremum

Exercice 48 [01762] [correction]
Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :
a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
c) $f(x, y) = x^3 + y^3$
d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

Exercice 49 [00061] [correction]
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

Exercice 50 [02910] [correction]
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

Exercice 51 [02463] [correction]
Déterminer les extremums de $x^{\ln x} + y^{\ln y}$ sur $]0, +\infty[^2$.

Exercice 52 [02530] [correction]
a) Etudier les branches infinies, les variations, la convexité et représenter $f(t) = t - \ln t - \frac{1}{t}$.
b) Résoudre $f(t) = 0$.
c) Trouver les extremums globaux et locaux de

$$g(x, y) = x \ln y - y \ln x$$

Exercice 53 [00058] [correction]
Déterminer les extrema locaux et globaux de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Exercice 54 [00059] [correction]
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Exercice 55 [00268] [correction]
Déterminer

$$\sup_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} \frac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$$

Exercice 56 [00065] [correction]
Calculer

$$\inf_{x,y>0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy\right)$$

Exercice 57 [00070] [correction]
Soit $a > 0$. Montrer que

$$f : (x, y) \mapsto x + y + \frac{a}{xy}$$

admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$

Exercice 58 [00071] [correction]
Soit $a > 0$. On pose, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$$

Montrer que f admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

Exercice 59 [03347] [correction]
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle . \mid . \rangle$.
Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle f(x) \mid x \rangle > 0$$

b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x) \mid x \rangle - \langle u \mid x \rangle$$

Montrer que g admet des dérivées partielles selon tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.
c) Montrer que g admet un unique point critique noté z.
d) Montrer que g admet un minimum global en z.

Exercice 60 [00072] [correction]
Soient U un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable.
Montrer que tout point critique est un minimum global.

Extremum sur compact

Exercice 61 [00259] [correction]
Déterminer le maximum de la fonction f définie sur le compact $K = [0,1]^2$ donnée par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Exercice 62 [03509] [correction]
Déterminer les extrema de f sur D avec

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \text{ avec } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$$

Exercice 63 [00063] [correction]
Soit $f : (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$$

a) Justifier que f est continue et présente un maximum à l'intérieur de T.
b) Déterminer sa valeur.

Exercice 64 [00064] [correction]
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 1$.
a) Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
b) Soient $a > 0, b > 0, c > 0$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^a y^b (1-x-y)^c$$

Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
c) Déterminer

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x,y)$$

Exercice 65 [00066] [correction]
Déterminer

$$\sup_{[0,\pi/2]^2} \sin x \sin y \sin(x+y)$$

Exercice 66 [00067] [correction]
On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathcal{C}$?

Exercice 67 [02911] [correction]
Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 68 [03349] [correction]
Soit (ABC) un vrai triangle du plan. Pour un point M du plan, on pose

$$f(M) = MA + MB + MC$$

a) Etudier la différentiabilité de f.

b) En considérant le disque fermé de centre A et de rayon $AB+AC$, établir que f possède un minimum absolu dans le plan.
c) Soit T un point où ce minimum est atteint. On suppose que T n'est pas un sommet du triangle.
Etablir

$$\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}=\vec{0}$$

d) Montrer qu'alors le point T voit les sommets du triangle sous un même angle.

Exercice 69 [02465] [correction]
Soit un triangle ABC et M parcourant l'intérieur de ce triangle. On veut déterminer en quelle position le produit des 3 distances de M à chacun des côtés du triangle est maximal.
Indications : ne pas oublier de justifier l'existence de ce maximum, la réponse est le centre de gravité du triangle.

Equation aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 70 [01763] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x+3y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x}-2\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Exercice 71 [00044] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x+y \\ v = 3x+y \end{cases}$$

Exercice 72 [01765] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y) \text{ via } \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

Exercice 73 [01764] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = y-x \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=f$$

Exercice 74 [01766] [correction]
En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Exercice 75 [00080] [correction]
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+\star}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=f$$

Exercice 76 [00076] [correction]
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Exercice 77 [01768] [correction]
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 78 [02461] [correction]
Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré p si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = pf(x_1, \dots, x_n)$$

Exercice 79 [00047] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Montrer la constance de l'application suivante

$$\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 80 [03675] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Exprimer

$$\varphi : r \in [0, +\infty[\mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 81 [03793] [correction]
On étudie l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

où la fonction inconnue f est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.
a) Montrer l'existence de solutions non nulles.
b) Soit $g : t \mapsto f(tx, ty)$ avec (x, y) un couple de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exploiter cette fonction pour résoudre l'équation (E).

Exercice 82 [02912] [correction]
a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

b) Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}\sqrt{x^3 + y^3}$$

Exercice 83 [02913] [correction]
On note U l'ensemble des (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, $(x, y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E,\ \forall (x, y) \in U,\ \Phi(f)(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

a) Déterminer $\ker \Phi$.
b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.
c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x, y) associe $(x^2 + y^2)^{3/2} xy$.

Equation aux dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 84 [00081] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 85 [01769] [correction]
Soit $c > 0$. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Exercice 86 [00082] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 87 [00084] [correction]
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 88 [01778] [correction]
[Fonctions harmoniques]
Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si, et seulement si, son laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est nul.
a) Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.
On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.
b) Montrer que f est harmonique si, et seulement si, φ' est solution d'une équation différentielle qu'on précisera.
c) En résolvant cette équation, déterminer f.

Exercice 89 [00050] [correction]
Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et $g(r, t) = f(r\cos t, r\sin t)$.
a) Trouver une relation liant

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

b) Montrer que

$$\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $(r\varphi'(r))' = 0$
c) Conclure que φ est constante.

Exercice 90 [00056] [correction]
Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 < R^2$, on pose

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$$

Etablir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 91 [01327] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots x_n) &\mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \end{aligned}$$

vérifie

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$$

Analyse vectorielle

Exercice 92 [01773] [correction]
On appelle laplacien d'un champ scalaire F de classe $\mathcal{C}^2$ le champ scalaire défini par

$$\Delta F = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\nabla} F\right)$$

a) Montrer

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

b) Exprimer $\frac{\partial F}{\partial r}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial x}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(M)$
c) Exprimer ΔF en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

Exercice 93 [01774] [correction]
Soit F un champ scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ de l'espace. Exprimer $\overrightarrow{\nabla} F(M)$ en fonction

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(M), \frac{\partial F}{\partial z}(M)$$

et des vecteurs du repère cylindrique associé au point M.

Exercice 94 [01775] [correction]
Soit $\vec{F}$ le champ de vecteurs du plan défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.
a) Calculer $\operatorname{div}\vec{F}(M)$
b) Le champ de vecteurs $\vec{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 95 [01776] [correction]
Soit $\vec{F}$ le champ de vecteurs de l'espace défini par $\vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$.
a) Ce champ de vecteur dérive-t-il d'un potentiel ?
b) Calculer $\operatorname{div}\vec{F}(M)$ et $\operatorname{Rot}\vec{F}(M)$.

Exercice 96 [01777] [correction]
Soit $\vec{\omega}$ un vecteur de l'espace et $\vec{F}$ le champ de vecteurs de l'espace défini par

$$\vec{F}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

a) Calculer $\operatorname{div}\vec{F}(M)$ et $\operatorname{Rot}\vec{F}(M)$.
b) Le champ de vecteur $\vec{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice 97 [03799] [correction]
On pose

$$\vec{\gamma}_1(t) = a(1-t)\vec{i} + bt\vec{j} \text{ avec } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = a\cos(s)\vec{i} + b\sin(s)\vec{j} \text{ avec } 0 \leqslant s \leqslant \pi/2$$

et le champ de vecteurs

$$\vec{V} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$$

a) Représenter les courbes paramétrées par $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$.
b) Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel $U(x, y)$?
c) Calculer la circulation de $\vec{V}$ selon $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$. Conclure.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) L'application $M \mapsto M^2$ est différentiable car polynomiale. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(M+H) - f(M) = MH + HM + H^2 = \varphi(H) + o(\|H\|)$$

avec $\varphi : H \mapsto MH + HM$ linéaire.
Par suite

$$\mathrm{d}f(M) : H \mapsto HM + MH$$

b) L'application $M \mapsto M^3$ est différentiable car polynomiale et l'application $M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est différentiable car linéaire.
Par opérations sur les fonctions différentiable, f est différentiable
Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(M+H) - f(M) = \mathrm{tr}(M^2H + MHM + HM^2) + \mathrm{tr}(MH^2 + HMH + H^2M) + \mathrm{tr}(H^3)$$

Posons $\varphi : H \to \mathrm{tr}(M^2H + MHM + HM^2) = 3\mathrm{tr}(M^2H)$.
φ est une application linéaire telle que :

$$f(M+H) - f(M) = \varphi(H) + \psi(H)$$

avec $|\psi(H)| \leqslant C \|H\|^2$ donc $\psi(H) = o(\|H\|)$.
Par suite

$$\mathrm{d}f(M) : H \to 3\mathrm{tr}(M^2H)$$

Exercice 2 : [énoncé]
Posons $f(P) = \int_0^1 P(t)^2 \,\mathrm{d}t$. $f(P+H) = f(P) + 2\int_0^1 P(t)H(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 H(t)^2\,\mathrm{d}t$.
Posons $\ell(H) = 2\int_0^1 P(t)H(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui définit ℓ forme linéaire sur E.
En munissant E de la norme $\|\,.\,\| = \|\,.\,\|_\infty$, on observe
$\left|\int_0^1 H(t)^2\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|H\|_\infty^2 = o(\|H\|)$.
Ainsi, la relation précédente donne $f(P+H) = f(P) + \ell(H) + o(\|H\|)$ ce qui assure que f est différentiable en P et $\mathrm{d}f(P) : H \mapsto 2\int_0^1 P(t)H(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 : [énoncé]
Soient $a \in \mathbb{C}^\star$ et $h \in \mathbb{C}$.
On peut écrire

$$f(a+h) - f(a) = \frac{-h}{a(a+h)} = \ell(h) + \alpha(h)$$

avec $\ell : h \mapsto -\frac{h}{a^2}$ linéaire et

$$\alpha(h) = \frac{-h}{a(a+h)} + \frac{h}{a^2} = \frac{h^2}{a^2(a+h)} = O(h^2) = o(h)$$

La différentielle de f en a est donc

$$\ell : h \mapsto -\frac{h}{a^2}$$

Exercice 4 : [énoncé]
a) det est différentiable car polynomiale en vertu de l'expression générale définissant le déterminant

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

b) $\det(I+H) = 1 + \varphi(H) + o(\|H\|)$ avec $\varphi = \mathrm{d}_I(\det)$.
Pour $H = \lambda E_{i,j}$, on obtient

$$\det(I_n + \lambda E_{i,j}) = 1 + \lambda\delta_{i,j} = 1 + \lambda\varphi(E_{i,j}) + o(\lambda)$$

donc $\varphi(E_{i,j}) = \delta_{i,j}$ puis

$$\varphi = \mathrm{tr}$$

Soit M inversible.

$$\det(M+H) = \det M \det(I + M^{-1}H) = \det M + \det M \mathrm{tr}(M^{-1}H) + o(H)$$

donc

$$\mathrm{d}(\det)(M) : H \mapsto \det M \mathrm{tr}(M^{-1}H)$$

c) En M inversible

$$\mathrm{d}(\det)(M) : H \mapsto \det M \mathrm{tr}(M^{-1}H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}M.H)$$

Les applications $M \mapsto \mathrm{d}(\det)(M)$ et $M \mapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}M \times .)$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : [énoncé]
On a

$$(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2 \underset{H \to O_n}{=} I_n + o(H)$$

donc

$$(I_n + H)^{-1} \underset{H \to O_n}{=} I_n - H + o(H)$$

d'où

$$\mathrm{d}(M \mapsto M^{-1})(I) : H \mapsto -H$$

On a aussi

$$(M + H)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \underset{H \to O_n}{=} M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(H)$$

donc

$$\mathrm{d}(M \mapsto M^{-1})(M) : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$$

Exercice 6 : [énoncé]
On a

$$\varphi(a+h, b+k) = \varphi(a,b) + \varphi(h,b) + \varphi(a,k) + \varphi(h,k) = \varphi(a,b) + \psi(h,k) + o\left(\|(h,k)\|\right)$$

avec $\psi : (h,k) \mapsto \varphi(h,b) + \varphi(a,k)$ linéaire et $\varphi(h,k) = o\left(\|(h,k)\|\right)$ car $|\varphi(h,k)| \leqslant M\,\|h\|\,\|k\|$.
Par suite φ est différentiable en (a,b) et $\mathrm{d}\varphi(a,b) = \psi$.

Exercice 7 : [énoncé]
a) En polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$f_p(x,y) = (\cos\theta + \sin\theta)^p r^p \sin\frac{1}{r}$$

Si $p \geqslant 1$ alors $|f_p(x,y)| \leqslant 2^p r^p \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et on peut prolonger f par continuité en $(0,0)$.
Si $p = 0$ alors $f_0(x,y) = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ diverge car le sinus diverge en $+\infty$.
b) On suppose $p \geqslant 1$.
Pour $p = 2$:

$$f_2(x,y) = (x+y)^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(\|(x,y)\|^2)$$

ce qui s'apparente à un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$.
La fonction f_2 est donc différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.
Pour $p > 2$:

$$f_p(x,y) = (x+y)^{p-2} f_2(x,y)$$

La fonction f_p est différentiable par produit de fonctions différentiables.
Pour $p = 1$:
Quand $h \to 0^+$,

$$\frac{1}{h}\left(f_1(h,0) - f_1(0,0)\right) = \sin\frac{1}{h}$$

diverge. Ainsi f n'est pas dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,0)$, elle ne peut donc y être différentiable.

Exercice 8 : [énoncé]
a) Pour $a, h \in E$,

$$f(a+h) - f(a) = (u(a) \mid h) + (u(h) \mid a) + (u(h) \mid h) = \ell(h) + o(\|h\|)$$

avec $\ell(h) = 2(u(a) \mid h)$ définissant une application linéaire et $(u(h) \mid h) = o(\|h\|)$ car $|(u(h) \mid h)| \leqslant \|u\|\,\|h\|^2$. Ainsi f est différentiable en tout $a \in E$ et

$$\mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2(u(a) \mid h)$$

b) F est différentiable en tant que rapport défini de fonctions différentiables.
La formule

$$\mathrm{d}\left(f/g\right) = (g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g)/g^2$$

donne

$$\mathrm{d}F(a) : h \mapsto 2\frac{(u(a) \mid h)}{(a \mid a)} - 2\frac{(u(a) \mid a)(a \mid h)}{(a \mid a)^2} = 2\left(v(a) \mid h\right)$$

avec

$$v(a) = \frac{u(a)}{\|a\|^2} - \frac{(u(a) \mid a)}{\|a\|^4}a$$

Si $\mathrm{d}F(a) = \tilde{0}$ alors $v(a) = 0$ et donc $u(a)$ est colinéaire à a.
La réciproque est aussi vraie.

Exercice 9 : [énoncé]
Remarquons

$$f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$$

et notons $\ell = \mathrm{d}f(0)$.
D'une part

$$f(\lambda x) = f(0) + \ell(\lambda x) + o(\lambda\,\|x\|)$$

et d'autre part

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

On en déduit

$$\lambda\ell(x) + o(\lambda\,\|x\|) = \lambda f(x)$$

En simplifiant par λ et en faisant $\lambda \to 0^+$, on obtient $f(x) = \ell(x)$.
Ainsi, l'application f est linéaire.

Exercice 10 : [énoncé]
a) immédiat.
b) L'application $d_h : f \mapsto \mathrm{D}_h f(0)$ fait l'affaire pour n'importe quel $h \in \mathbb{R}^n$ non nul.
c) Si h est constante égale à λ alors pour toute fonction $f \in E$ on a par linéarité

$$d(fh) = \lambda d(f)$$

et par définition des éléments de $\mathcal{D}$,

$$d(fh) = f(0)d(h) + \lambda d(f)$$

En employant une fonction f ne s'annulant pas en 0, on peut affirmer $d(h) = 0$.
d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, puisque la fonction $\varphi : t \in [0,1] \mapsto f(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$.
Toute les dérivées partielles en x de $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ sont continues sur $K \times [0,1]$ donc bornées.
Par domination sur tout compact, on peut affirmer que la fonction $f_i : x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
e) Notons $p_i : x \mapsto x_i$.
Par linéarité de d, on a

$$d(f) = \sum_{i=1}^n d(p_i f_i) = \sum_{i=1}^n d(p_i) f_i(0)$$

car $d(f(0)) = 0$ et $p_i(0) = 0$.
En posant $a_i = d(p_i)$ et sachant

$$f_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

on obtient

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

f) L'application qui à $h \in \mathbb{R}^n$ associe d_h est donc une surjection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{D}$.
Cette application est linéaire et aussi injective (prendre $f : x \mapsto (h \mid x)$ pour vérifier $d_h = 0 \Rightarrow h = 0$) c'est donc un isomorphisme et

$$\dim \mathcal{D} = n$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) Soit $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{1}{t}(f(t.h) - f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(t\alpha, t\beta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \beta^2/\alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$D_h f(0,0) = \begin{cases} \beta^2/\alpha & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

b)

$$f(1/n, 1/\sqrt{n}) = 1 \to 1 \neq f(0,0)$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 12 : [énoncé]
Quand $n \to +\infty$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
Soit $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

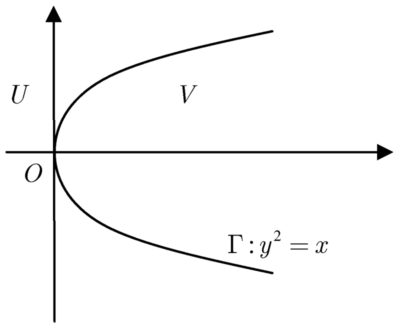
$$\frac{1}{t}(f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)) = \frac{t^2\alpha^2\beta}{t^4\alpha^4 + t^2\beta^2} \to \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^2/\beta & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 13 : [énoncé]
a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x . x^y$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(x+y) + x\cos(x+y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x+y)$.

Exercice 14 : [énoncé]
$|f(x,y)| \leqslant |y| \frac{|x|}{|x|+|y|} \leqslant |y| \to 0$ donc $f(x,y) \to 0$.
$\frac{1}{h}(f(h,0) - f(0,0)) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exercice 15 : [énoncé]
La courbe Γ d'équation $y^2 = x$ est une parabole séparant le plan en deux portions ouvertes

$$U = \left\{(x,y)/x < y^2\right\} \text{ et } V = \left\{(x,y)/x > y^2\right\}$$



Soit $(x_0, y_0) \in U$. Au voisinage de ce couple, $f(x, y) = x$ et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Soit $(x_0, y_0) \in V$. Au voisinage de ce couple, $f(x, y) = y^2$ et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$$

Soit $(x_0, y_0) \in \Gamma$ (on a donc $x_0 = y_0^2$). Sous réserve d'existence

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)\right)$$

Pour $t > 0$,

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)\right) = \frac{1}{t}\left(y_0^2 - y_0^2\right) = 0$$

et pour $t < 0$,

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)\right) = \frac{1}{t}\left(x_0 + t - x_0\right) = 1$$

On en déduit que la première dérivée partielle de f en (x_0, y_0) n'est pas définie.
Sous réserve d'existence

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)\right)$$

Si $y_0 \neq 0$ alors pour t du signe de y_0,

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)\right) = \frac{1}{t}\left(x_0 - x_0\right) = 0$$

et pour t du signe opposé à celui de y_0,

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)\right) = \frac{1}{t}\left((y_0 + t)^2 - y_0^2\right) = 2y_0 + t$$

On en déduit que la deuxième dérivée partielle de f en (x_0, y_0) n'est pas définie.
Si $y_0 = 0$ (et alors $x_0 = 0$) alors pour tout $t \neq 0$
$\frac{1}{t}\left(f(0, 0 + t) - f(0, 0)\right) = 0$
donc la deuxième dérivée partielle de f en $(0, 0)$ est définie et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Exercice 16 : [énoncé]
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'(y/x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}\varphi'(y/x)$$

d'où la relation.

Exercice 17 : [énoncé]
a) Si $|y| \leqslant 1$ alors la série définissant $f(x, y)$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$
Si $|y| > 1$ alors la série définissant $f(x, y)$ converge si, et seulement si, $|x| < \left|y^2\right|$
car $\frac{x^n}{1+y^{2n}} \sim \left(\frac{x}{y^2}\right)^n$.
Finalement $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < \max(1, y^2)\right\}$.
b) $u_n(x, y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$. Soit $a \in [0, 1[$ et $D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leqslant a \max(1, y^2)\right\}$.
Pour $(x, y) \in D_a$:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1 + y^{2n}}\right|$$

Si $|y| \leqslant 1$ alors $|x| \leqslant a$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1 + y^{2n}}\right| \leqslant \frac{na^{n-1}}{1 + y^{2n}} \leqslant na^{n-1}$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leqslant ay^2$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1 + y^{2n}}\right| \leqslant \frac{na^{n-1}y^{2n-2}}{1 + y^{2n}} \leqslant \frac{na^{n-1}}{y^2} \leqslant na^{n-1}$$

Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant na^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente.

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)\right| = \left|\frac{2ny^{2n-1}x^n}{(1 + y^{2n})^2}\right| \leqslant \frac{2nx^n}{1 + y^{2n}} \text{ car } \frac{y^{2n-1}}{1 + y^{2n}} \leqslant 1$$

Si $|y| \leqslant 1$ alors $|x| \leqslant a$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{2na^n}{1+y^{2n}} \leqslant 2na^n$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leqslant ay^2$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{2na^n y^{2n}}{1+y^{2n}} \leqslant 2na^n$$

Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2na^n$ qui est le terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D_a et comme ceci vaut pour tout $a \in [0,1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D.

Exercice 18 : [énoncé]
a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x+2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\cos(xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -\sin xy - xy\cos(xy)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\cos(xy)$.

Exercice 19 : [énoncé]
a) Par composition F est $\mathcal{C}^2$.
b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x+\varphi(y))$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)f'(x+\varphi(y))$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x+\varphi(y))$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = \varphi'(y)f''(x+\varphi(y))$. Par suite l'égalité proposée est vérifiée.

Exercice 20 : [énoncé]

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Exercice 21 : [énoncé]
a) g est $\mathcal{C}^2$ par composition.
b) $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$,
$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) =$
$v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2) + 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(uv,u^2+v^2) + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv,u^2+v^2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) =$
$uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2) + 2(u^2+v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(uv,u^2+v^2) + 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv,u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial x}(,)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2) + 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\dots) + 4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\dots) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(\dots)$

Exercice 22 : [énoncé]
Par composition la fonction g est dérivable et

$$g'(t) = 2\partial_1 f(2t,1+t^2) + 2t\partial_2 f(2t,1+t^2)$$

Exercice 23 : [énoncé]
Par dérivation de fonctions composées

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+th_1,\dots,x_n+th_n)$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) $(u,v)\mapsto(u^2+v^2,uv)$ est différentiable de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ car à composantes polynomiales.
Par composition g est différentiable.
b)

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2v\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)$$

Exercice 25 : [énoncé]
Par composition de fonctions différentiables, g est différentiable

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

et
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

En combinant ces deux relations, on obtient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r\cos\theta, r\sin\theta) \text{ et}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Exercice 26 : [énoncé]
a) $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est différentiable donc g l'est aussi par composition.
b) Par dérivation de fonctions composées
$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
et
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
c) En résolvant le système formé par les deux équations précédentes.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$$
avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 27 : [énoncé]
Par dérivation de fonctions composées
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x,y)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(y,x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

Exercice 28 : [énoncé]
On dérive la relation par rapport à t avant d'évaluer en $t=0$.

Exercice 29 : [énoncé]
On dérive la relation par rapport à t avant d'évaluer en $t=1$.

Exercice 30 : [énoncé]
a) En dérivant la relation $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ en la variable t
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = nt^{n-1}f(x,y)$$
En évaluant en $t=1$, on obtient
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$$
b) En dérivant la relation $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ en la variable x
$$t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^n\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
donc, pour $t\neq 0$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
Cette identité se prolonge aussi en $t=0$ grâce à la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$.
On peut conclure que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de homogène de degré $n-1$.
Idem pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 31 : [énoncé]
a) En dérivant la relation $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ en la variable t :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1}f(x,y)$$
En évaluant en $t=1$, on obtient
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$
b) Supposons que f vérifie l'équation proposée.
Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, considérons $\varphi : t\mapsto f(tx,ty) - t^\alpha f(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
φ est dérivable et $t\varphi'(t) = \alpha\varphi(t)$. Après résolution et puisque $\varphi(1)=0$, on obtient $\varphi(t) = 0$ et donc f est homogène de degré α.

Exercice 32 : [énoncé]
Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f et $\mathrm{D}_1, \dots, \mathrm{D}_n$ les opérateurs de dérivées partielles.
L'antisymétrie de la matrice jacobienne de f donne

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \mathrm{D}_i(f_j) = -\mathrm{D}_j(f_i)$$

Exploitons cette propriété pour établir que les dérivées partielles de f sont constantes
Soient $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Par antisymétrie

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = -\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_i f_j)$$

Par le théorème de Schwarz, puis par antisymétrie

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = -\mathrm{D}_i(\mathrm{D}_k f_j) = \mathrm{D}_i(\mathrm{D}_j f_k)$$

A nouveau par le théorème de Schwarz et par antisymétrie

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i f_k) = -\mathrm{D}_j(\mathrm{D}_k f_i)$$

Enfin, en vertu du théorème de Schwarz, on obtient

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{D}_j f_i) = 0$$

Ainsi toutes les dérivées partielles de $\mathrm{D}_j f_i$ sont nulles et donc $\mathrm{D}_j f_i$ est constante.
En posant $a_{i,j}$ la valeur de cette constante, on obtient

$$\mathrm{Jac}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ antisymétrique}$$

Enfin en intégrant, on obtient

$$f(x) = Ax + b \text{ avec } b = f(0)$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Etudions la continuité en $(0,0)$

$$f(x,y) = (xy)\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\left((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

f est donc continue en $(0,0)$.
Etudions l'existence de la dérivée partielle par rapport à x.
Par composition $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$$

et

$$\frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
Enfin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

car

$$2xy^2\ln(x^2+y^2) = 2y\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Etudions l'existence de la dérivée partielles par rapport à y.
Comme $f(x,y) = f(y,x)$ l'étude de $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique.
b) Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = \begin{cases} t\sin 1/\sqrt{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction g et continue sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc f admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Etudions l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$.

$$\frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = t\sin\frac{1}{|t|} = O(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe pas et vaut 0. Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{2}{n}\sin n - \cos n$$

diverge quand $n \to +\infty$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.
Il en est de même de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 34 : [énoncé]
a) La fonction f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
En passant en coordonnées polaires

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to 0}{\sim} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r\,|\cos\theta|+|\sin\theta|} \to 0 = f(0,0)$$

car le facteur

$$\frac{\cos\theta\times\sin\theta}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$$

est bornée en tant que fonction continue et 2π-périodique.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right) = 0$$

Or pour $x,y>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)(x+y)-\sin(xy)}{(x+y)^2}$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = \frac{2t^2\cos(t^2)-\sin(t^2)}{(2t)^2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{1}{2}$$

La fonction f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 35 : [énoncé]
a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
Par opérations, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

En passant en coordonnées polaires, on vérifie aisément

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$$

On en déduit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ car la conclusion du théorème de Schwarz n'est pas vérifié.

Exercice 36 : [énoncé]
En passant en coordonnées polaires, on écrit

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta \text{ avec } r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

On a alors

$$f(x,y) = r^2\cos\theta\sin\theta\cos(2\theta) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

On prolonge f par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$.
Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right) = 0$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
L'étude pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique puisque

$$f(x,y) = -f(y,x)$$

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Cependant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1$$

alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$$

La fonction f ne peut donc être de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Par composition f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3xy^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.
De plus $\frac{1}{t}(f(t,0)-f(0,0))=0$ et $\frac{1}{t}(f(0,t)-f(0,0))=0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
De plus $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant |y|\,\frac{y^2}{x^2+y^2}+2\,|y|\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$
et $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant 3\,|y|\,\frac{|xy|}{x^2+y^2}+2\,|y|\,\frac{|xy|}{x^2+y^2}\,\frac{y^2}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.
Par suite f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
b) $\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)=1\to 1$ et $\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=0\to 0$.
Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$.
On en déduit que f n'est pas $\mathcal{C}^2$.

Exercice 38 : [énoncé]
a) Quand $(x,y)\to(0,0)$, on peut écrire $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$.
On a alors
$$f(x,y)=2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\ln r\to 0$$
car $r^2\ln r\to 0$
On prolonge f par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$.
b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ par opérations. On observe $f(x,y)=-f(y,x)$ donc en dérivant cette relation en la variable x on obtient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$
c) On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)=0$$
et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
Pour $(x,y)\neq(0,0)$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\ln(x^2+y^2)+\frac{2x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$
Quand $(x,y)\to(0,0)$, on peut écrire $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4r\ln r+2r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\to 0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et par le résultat de b), on obtient le même résultat pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 39 : [énoncé]
a) Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y}\in\left]0,x^2+y^2\right[$ tel que $F(x,y)=f'(c)$.
Quand $(x,y)\to(0,0)$ alors $c_{x,y}\to 0$ puis $F(x,y)\to f'(0)$.
b) Par Taylor-Young :
$$F(x,y)=F(0,0)+\frac{x^2+y^2}{2}f''(0)+(x^2+y^2)\varepsilon(x^2+y^2)=F(0,0)+\varphi(x,y)+o(x,y)$$
avec $\varphi=0$.
Donc F est différentiable en $(0,0)$ et $\mathrm{d}F(0,0)=0$.
c) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par opérations.
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}(f'(x^2+y^2)-F(x,y))=x(f''(0)+o(1))\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$
et de même
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$
donc F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 40 : [énoncé]
a) On pose $\varphi(a,a)=-\sin a$ et on observe que $\varphi(x,y)\to\varphi(a,a)$ quand $(x,y)\to(a,a)$ avec $x\neq y$ et avec $x=y$.
b) En vertu de
$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$
on a
$$\varphi(x,y)=-\operatorname{sinc}\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
avec sinc de classe $\mathcal{C}^\infty$ car développable en série entière.

Exercice 41 : [énoncé]
a) Puisque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire
$$g(x)=g(y)+\int_y^x g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $t = y + u(x-y)$, on obtient

$$g(x) = g(y) + (x-y)\int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

Ainsi

$$f(x,y) = \int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

et cette relation vaut pour $x \neq y$ et aussi pour $x = y$.
b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.
L'application $\varphi : (x,u) \mapsto g'(y+u(x-y))$ admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u) = ug''(y+u(x-y))$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en u
Pour $[a,b] \subset \mathbb{R}$ assez grand pour que y en soit élément, on a

$$\forall x \in [a,b]\,, \forall u \in [0,1]\,, y+u(x-y) \in [x,y] \subset [a,b]$$

La fonction g'' est continue donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$ sur le segment $[a,b]$. On a alors

$$\forall (x,u) \in [a,b]\times[0,1]\,, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant M = \psi(u)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0,1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer que l'application $x \mapsto \int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u$$

Ainsi f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 ug''(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

De plus, la fonction $(x,y,u) \mapsto ug''(y+u(x-y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2\times[0,1]$ et par une domination sur $[a,b]\times[a,b]$, on obtient la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$.
De même, on montre que la deuxième dérivée partielle de f existe et est continue.

Exercice 42 : [énoncé]
Introduisons ϑ primitive de φ sur $\mathbb{R}$. ϑ existe et est de classe $\mathcal{C}^1$ car φ est continue.

$$f(x,y) = \vartheta(y) - \vartheta(x)$$

donc par opérations f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\vartheta'(x) = -\varphi(x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \vartheta'(y) = \varphi(y)$$

Exercice 43 : [énoncé]
On peut écrire

$$F(x) = \int_0^{x^3} f(x+1,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2x} f(x+1,t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x,x^3) - \varphi(x,2x)$$

avec

$$\varphi(x,u) = \int_0^u f(x+1,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 uf(x+1,tu)\,\mathrm{d}t$$

Fixons $u \in \mathbb{R}$ et considérons $g(x,t) = uf(x+1,tu)$ définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.
La fonction g est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. La fonction f étant continue sur le compact $[a+1,b+1]\times[0,u]$, elle y est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$.
On a alors

$$\forall (x,u) \in [a,b]\times[0,u]\,, |g(x,t)| \leqslant M = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $[0,u]$ et donc, par intégration sur un segment, on obtient que la fonction $x \mapsto \varphi(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi(x,u)\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u) = \int_0^1 u\frac{\partial f}{\partial x}(x+1,tu)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi φ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et, une domination analogue à la précédente permet d'établir que cette fonction est continue en le couple $(x,u) \in \mathbb{R}^2$.
D'autre part, $u \mapsto \varphi(x,u)$ est évidemment dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\varphi(x,u)\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,u) = f(x+1,u)$$

Ainsi φ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et celle-ci est clairement continue.
Finalement φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Notons enfin que les dérivées partielles de φ sont continues en (x,u) et donc la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque , F est de classe $\mathcal{C}^1$.
Par dérivation de fonctions composées

$$F'(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,x^3)+3x^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,x^3)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,x^2)-2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,2x)$$

Enfin

$$F'(x)=\int_{2x}^{x^3}\frac{\partial f}{\partial x}(x+1,t)\,\mathrm{d}t+3x^2f(x+1,x^3)-2f(x+1,2x)$$

Exercice 44 : [énoncé]
a) Cas $|x|<1$:

$$|u_n(x,y)|=o(x^n)$$

donc la série $\sum u_n(x,y)$ est absolument convergente.
Cas $|x|>1$:
Si la série $\sum u_n(x,y)$ converge alors $u_n(x,y)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc

$$\cos(ny)=u_n(x,y)\frac{\sqrt{n}}{x^n}\to 0$$

par croissance comparée.
Mais alors

$$\cos(2ny)=2\cos^2(ny)-1\to-1$$

ce qui est incohérent avec l'affirmation qui précède.
Ainsi la série $\sum u_n(x,y)$ diverge.
Cas $x=1$:
Si $y=0\quad[2\pi]$ alors $u_n(1,y)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n(1,y)$ diverge.
Si $y\neq 0\quad[2\pi]$ alors par une transformation d'Abel, on obtient la convergence de la série $\sum u_n(1,y)$.
Cas $x=-1$:
On remarque

$$u_n(-1,y)=u_n(1,y+\pi)$$

Ainsi $\sum u_n(-1,y)$ converge si, et seulement si, $y\neq\pi\quad[2\pi]$.
Finalement

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,|x|<1\right\}\cup\{(1,y)/y\neq 0\quad[2\pi]\}\cup\{(-1,y)/y\neq\pi\quad[2\pi]\}$$

b) L'intérieur de D est alors

$$D^\circ=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,|x|<1\right\}$$

Soient $a\in[0,1[$ et $D_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,|x|<a\right\}$.
u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_a et la série de fonctions $\sum u_n(x,y)$ converge simplement sur D_a.
La série de fonctions $\sum\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant\sqrt{n}a^{n-1}$$

Enfin, la série de fonctions $\sum\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant\sqrt{n}a^{n}$$

On peut alors appliquer les théorèmes usuels qui affirment que

$$(x,y)\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x,y)$$

admet deux dérivées partielles continues sur D_a. C'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_a. Enfin, ceci valant pour tout $a\in[0,1[$, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de D.

Exercice 45 : [énoncé]
a) Pour $x=0$, $\frac{1}{t}\left(\|0+t.h\|-\|0\|\right)=\frac{|t|}{t}\|h\|$ n'a pas de limite en 0. Par suite $\|\,.\,\|$ n'est pas différentiable en 0.
Pour $x\neq 0$,
$\|x+h\|=\sqrt{\|x\|^2+2(x\mid h)+\|h\|^2}=\|x\|\sqrt{1+2\frac{(x|h)}{\|x\|^2}+\frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}}=\|x\|+\frac{(x|h)}{\|x\|}+o(h)$
donc $\|\,.\,\|$ est différentiable en x et de différentielle $h\mapsto\frac{(x|h)}{\|x\|}$.
b) Le vecteur gradient en $x\neq 0$ est $x/\|x\|$.

Exercice 46 : [énoncé]
a) Soit $a\in E$. On peut écrire

$$f(a+h)=\frac{1}{2}\left((u(a)\mid a)+(u(a)\mid h)+(u(h)\mid a)+(u(h)\mid h)\right)+(x_0\mid a)+(x_0\mid h)$$

Sachant $(u(h)\mid a)=(u(a)\mid h)$, on obtient

$$f(a+h)=f(a)+\ell(h)+(u(h)\mid h)$$

avec ℓ la forme linéaire donnée par

$$\ell(h) = (u(a) + x_0 \mid h)$$

Puisque

$$|(u(h) \mid h)| \leqslant \|u(h)\| \, \|h\| \text{ avec } \|u(h)\| \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0$$

on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$$

Finalement f est différentiable en a et

$$\mathrm{d}f(a).h = (u(a) + x_0 \mid h)$$

b) Le gradient de f en a est alors

$$\mathrm{grad} f(a) = u(a) + x_0$$

Exercice 47 : [énoncé]

Notons $A = (a_{i,j})$

a) Puisque

$$\Delta(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

la fonction Δ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par somme et produit de fonctions qui le sont (à savoir les application linéaires $A \mapsto a_{i,j}$).

b) En développant le déterminant selon la i-ème ligne, on obtient

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$$

avec $A_{i,j}$ cofacteur d'indice (i,j). On en déduit.

$$\partial_{(i,j)} \Delta(A) = A_{i,j}$$

Par conséquent la différentielle de Δ en A est

$$\mathrm{d}\Delta(A) : H \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j} h_{i,j}$$

c) On observe

$$\mathrm{d}\Delta(A) \cdot H = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A) H)) = \langle \mathrm{com}(A), H \rangle$$

Le vecteur gradient de Δ en A est donc $\mathrm{com}(A)$.

Exercice 48 : [énoncé]

a) Point critique $(0,3)$, $f(0,3) = -9$. Posons $u = x$ et $v = y - 3$.

$$f(x,y) - f(0,3) = u^2 + uv + v^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(u+v)^2 \geqslant 0$$

f admet un minimum en $(0,3)$.

b) Point critique $(1,1)$, $f(1,1) = 4$. Posons $u = x - 1$ et $v = y - 1$

$$f(x,y) - f(1,1) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u-v)^2 + v^2 \geqslant 0$$

f admet un minimum en $(1,1)$.

c) Point critique $(0,0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$f(1/n, 0) > 0 \text{ et } f(-1/n, 0) < 0$$

Pas d'extremum.

d) Point critique $(0,0)$.

$$f(1/n, 0) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2} > 0 \text{ et } f(-1/n, -1/n + 1/n^2) \sim -\frac{2}{n^3} < 0$$

Pas d'extremum.

Exercice 49 : [énoncé]

$(-2,2)$ seul point critique.

En posant $x = -2 + u$ et $y = 2 + v$, puis $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$

$$f(x,y) - f(-2,2) = u^2 + uv + v^2 = r^2(1 + \cos\theta\sin\theta) \geqslant 0$$

Il y a un minimum global en $(-2,2)$.

Exercice 50 : [énoncé]

La fonction $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Après résolution ses points critiques sont : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

En $(0,0)$: $f(0,0) = 0$, $f(1/n, 0) \sim -2/n^2 < 0$ et $f(1/n, 1/n) \sim 2/n^4 > 0$.

Pas d'extremum local en $(0,0)$

En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $r = 20$, $t = 20$ et $s = 4$. $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$.

Il y a un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$f(\sqrt{2} + u, -\sqrt{2} + v) = -8 + 10(u^2 + v^2) + 4uv + 4\sqrt{2}(u^3 - v^3) + u^4 + v^4$$

On exploite

$$2(u^2 + v^2) + 4uv = 2(u+v)^2 \text{ et } 8u^2 + 4\sqrt{2}u^3 + u^4 = u^2(u + 2\sqrt{2})^2$$

pour affirmer

$$f(\sqrt{2}+u,-\sqrt{2}+v)=f(\sqrt{2},-\sqrt{2})+2(u+v)^2+u^2(u+2\sqrt{2})^2+v^2(v+2\sqrt{2})^2$$

Ainsi $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum global.
En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$: l'étude est identique puisque $f(x,y)=f(y,x)$.

Exercice 51 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(1,1)$ seul point critique.
La fonction $t\mapsto t^{\ln t}$ admet un minimum en 1, donc $(x,y)\mapsto x^{\ln x}+y^{\ln y}$ admet un minimum en $(1,1)$.

Exercice 52 : [énoncé]
a) f est définie sur $]0,+\infty[$, strictement croissante, concave sur $]0,2]$ et convexe sur $[2,+\infty[$. Asymptote verticale en 0 et branche parabolique de direction $y=x$ en $+\infty$.
b) $t=1$ est solution et c'est la seule car f est strictement croissante.
c) g est de classe $\mathcal{C}^1$. Recherchons, ses points critiques :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln y-\dfrac{y}{x}=0\\ \dfrac{x}{y}-\ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(\dfrac{x}{y}\right)=0\\ \dfrac{x}{y}-\ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x=\mathrm{e}\end{cases}$$

On conclut que (e,e) est le seul point critique.
On étudie alors le signe de

$$d(x,y)=g(x,y)-g(\mathrm{e},\mathrm{e})=x\ln y-y\ln x$$

On procède à une translation

$$\begin{cases}x=\mathrm{e}+u\\ y=\mathrm{e}+v\end{cases}$$

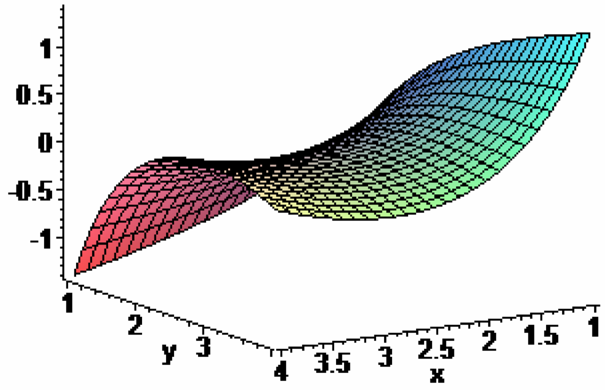
et à développement limité à l'ordre 2

$$d(x,y)=(\mathrm{e}+u)\left(1+\frac{v}{\mathrm{e}}-\frac{v^2}{2\mathrm{e}}+v^2\varepsilon(v)\right)-(\mathrm{e}+v)\left(1+\frac{u}{\mathrm{e}}-\frac{u^2}{2\mathrm{e}}+u^2\varepsilon(u)\right)$$

avec $\varepsilon\underset{0}{\to}0$. Après simplification

$$d(x,y)=\frac{u^2-v^2}{2}+(u^2+v^2)\tilde{\varepsilon}(u,v)$$

avec $\tilde{\varepsilon}\xrightarrow[(0,0)]{}0$.
En considérant $u=1/n$ et $v=0$ ou, à l'inverse $u=0$ et $v=1/n$, on obtient que d prend des signes différents au voisinage de (e,e) qui n'est donc pas extremum de f.



Une représentation de la fonction g

Exercice 53 : [énoncé]
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Recherchons les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3x$$

On a

$$\begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=y\\ y^2=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2\\ x^4=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2\\ x=0\text{ ou }1\end{cases}$$

$(0,0),(1,1)$ sont donc les seuls points critiques
Etude en $(0,0)$

$$g(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=x^3+y^3-3xy$$

$g\left(\frac{1}{n},0\right)=\frac{1}{n^3}>0$ et $g\left(-\frac{1}{n},0\right)=-\frac{1}{n^3}<0$ donc $(0,0)$ n'est pas extremum local.
Etude en $(1,1)$

$$g(x,y)=f(x,y)-f(1,1)=x^3+y^3-3xy+1$$

Procédons à la translation

$$\begin{cases} x=1+u \\ y=1+v \end{cases}$$

On obtient

$$g(x,y)=3u^2+3v^3-3uv+u^3+v^3$$

Passons en coordonnées polaires

$$\begin{cases} u=r\cos\theta \\ v=r\sin\theta \end{cases}$$

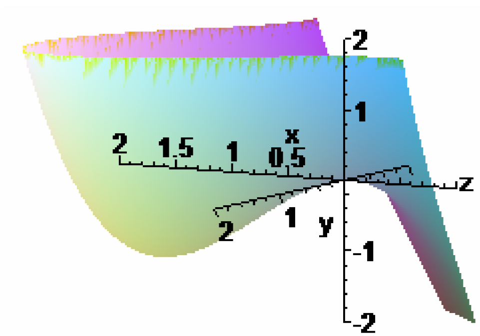
On obtient

$$g(x,y)=r^2\left(3-\frac{3}{2}\sin 2\theta+r\cos^3\theta+r\sin^3\theta\right)$$

Quand $(x,y)\to(1,1)$, on a $(u,v)\to(0,0)$ donc $r\to 0$ puis

$$3-\frac{3}{2}\sin 2\theta+r\cos^3\theta+r\sin^3\theta=3-\frac{3}{2}\sin 2\theta+o(1)\geqslant\frac{3}{2}+o(1)\geqslant 0$$

$(1,1)$ est un minimum local.
Cependant $f(t,0)=t^3\xrightarrow[t\to-\infty]{}-\infty$ donc f n'est pas minorée et donc $(1,1)$ n'est pas un minimum global.



Exercice 54 : [énoncé]
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Recherchons les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-4y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-4x$$

On a

$$\begin{cases} 4x^3-4y=0 \\ 4y^3-4x=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^3=y \\ y^3=x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x^3 \\ x^9=x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x^2 \\ x=0,-1 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

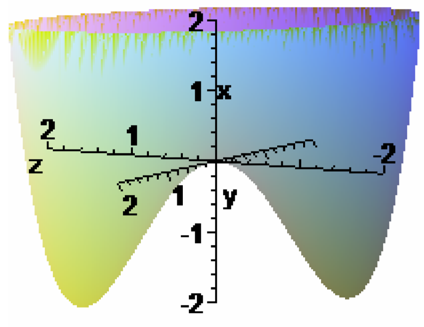
$(0,0),(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont donc les seuls points critique
Etude en $(0,0)$

$$f(1/n,1/n)\sim-\frac{4}{n^2}<0 \text{ et } f(1/n,-1/n)\sim\frac{4}{n^2}>0$$

$(0,0)$ n'est pas extremum local de f.
Etude en $(1,1)$.
On peut écrire

$$f(x,y)-f(1,1)=(x^2-1)^2+(y^2-1)^2+2(x-y)^2\geqslant 0$$

donc $(1,1)$ est minimum global.
Il en est de même $(-1,-1)$ car $f(-x,-y)=f(x,y)$.



Exercice 55 : [énoncé]
Posons

$$f(x,y)=\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[^2$
Soit $x>0$ fixé. Posons

$$\varphi : y \to f(x,y)$$

On a

$$\varphi'(y) = \frac{x(x-y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}$$

La fonction φ admet donc un maximum en $y=\sqrt{x}$ dont la valeur est

$$\psi(x) = f(x,\sqrt{x}) = \frac{x}{(1+x)(1+\sqrt{x})^2}$$

On a

$$\psi'(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{(1+x)^2(1+\sqrt{x})^3}$$

La fonction ψ admet donc un maximum en $x=1$ dont la valeur est

$$\psi(1) = f(1,1) = \frac{1}{8}$$

Au final

$$\sup_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} = \max_{(x,y)\in]0,+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} = \frac{1}{8}$$

Exercice 56 : [énoncé]
Soit $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ définie sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$.
Soit $x>0$ fixé.
L'application $y \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $-\frac{1}{y^2}+x$, elle donc minimale pour $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Considérons $g : x \mapsto f(x,\frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$.
g est minimale pour $x=1$, puis f est minimale en $(1,1)$ avec $f(1,1)=3$.

Exercice 57 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$ seul point critique.
Posons $\alpha = \sqrt[3]{a}$.

$$f(x,y) - f(\alpha,\alpha) = x + y + \frac{\alpha^3}{xy} - 3\alpha = \frac{x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy}{xy}$$

Etudions $\varphi : \alpha \mapsto x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy$. Cette application admet un minimum en $\sqrt{xy}$ de valeur

$$x^2y + xy^2 - 2xy\sqrt{xy} = xy(x+y-2\sqrt{xy}) = xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

donc pour tout $x,y>0$,

$$f(x,y) \geqslant f(\alpha,\alpha)$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ et $\alpha = \sqrt{xy}$ i.e. $x=y=\alpha$.

Exercice 58 : [énoncé]
Soit $x>0$ fixé.
L'application $y \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $2y - \frac{a}{xy^2}$, elle donc minimale pour $y = \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$.
Considérons

$$g : x \mapsto f(x,\sqrt[3]{\frac{a}{2x}}) = x^2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{x^2}}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $g'(x) = 2x - \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$,
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^{8/3} = 2^{1/3}a^{2/3} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{a}{2}}$.
g est minimale pour $x = \sqrt[4]{a/2}$, puis f admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2},\sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt{2a}$.

Exercice 59 : [énoncé]
a) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f.
Pour

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$$

on a

$$f(x) = \lambda_1x_1e_1 + \dots + \lambda_nx_ne_n$$

avec $\lambda_i > 0$ valeur propre associée au vecteur propre e_i.
Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\langle f(x) \mid x\rangle = \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2 > 0$$

b) Par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc admet des dérivées partielles relatives à n'importe quelle base. Dans la base $(e_1,\dots,e_n)$, ses dérivées partielles sont

$$\mathrm{D}_ug(x) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(g(x+t.u)-g(x)\right) = \lambda_ix_i - u_i$$

en notant $u_1,\dots u_n$ les composantes de u.

c) Il est alors immédiat que g admet un unique point critique qui est

$$z = \frac{u_1}{\lambda_1}e_1 + \cdots + \frac{u_n}{\lambda_n}e_n = f^{-1}(u)$$

Tout ceci serait plus simple, en parlant de différentielle plutôt que de dérivées partielles.
d) Pour $h \in E$,

$$g(f^{-1}(u)+h) = \frac{1}{2}(u+f(h) \mid f^{-1}(u)+h) - (u \mid f^{-1}(u)+h)$$

donc

$$g(f^{-1}(u)+h) = g(f^{-1}(u)) + \frac{1}{2}(f(h) \mid h) \geqslant g(f^{-1}(u))$$

car $(f(h) \mid f^{-1}(u)) = (h \mid u)$ par adjonction.

Exercice 60 : [énoncé]
Soit a point critique de f.
Pour tout $b \in U$, on a par convexité de f :

$$\forall \lambda \in [0,1]\,,\ f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$$

Par suite

$$\frac{1}{\lambda}\left(f(a+\lambda(b-a)) - f(a)\right) \leqslant f(b)-f(a)$$

En passant à la limite quand $\lambda \to 0^+$,

$$\mathrm{d}f(a).(b-a) \leqslant f(b)-f(a)$$

Or $\mathrm{d}f(a) = 0$ donc $f(b) \geqslant f(a)$.

Exercice 61 : [énoncé]
Rappelons que toute fonction réelle définie et continue sur un compact non vide y admet un maximum. Puisque la fonction f est continue sur le compact K, on est assuré de l'existence du maximum étudié.
Notons U l'ouvert donné par

$$U = K^\circ = \left]0,1\right[^2$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-2xy-x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1-2xy-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2}$$

Après résolution, seul le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ est point critique de f dans U.
La valeur de f en ce couple est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Sur le bord de K, les valeurs prises par f sont les valeurs prises sur $[0,1]$ par les fonctions

$$\varphi(t) = f(t,0) = f(0,t) = \frac{t}{1+t^2} \text{ et } \psi(t) = f(t,1) = f(1,t) = \frac{1+t}{2(1+t^2)}$$

D'une part

$$\varphi(t) \leqslant \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$\psi'(t) = \frac{1-2t-t^2}{2(1+t^2)^2}$$

donne que le maximum de ψ est en $\sqrt{2}-1$ avec $\psi(\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{2}+1}{4} > \frac{1}{2}$.
Puisque

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

on peut affirmer que le maximum de f n'évolue pas sur le bord du compact K, il est donc forcément dans U et c'est alors un point critique de f qui ne peut qu'être le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Exercice 62 : [énoncé]
La fonction f est continue sur le compact D et donc y admet un minimum et un maximum.
Si ces extremum sont à l'intérieur de D, ce sont des points critiques de f.

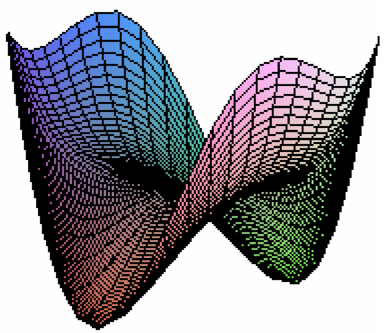
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-(x-y) = 0 \\ y^3+(x-y) = 0 \end{cases}$$

Après résolution on obtient les points critiques $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ mais les deux derniers ne sont pas éléments de l'intérieur de D.
La valeurs de f en $(0,0)$ est 0.
Il reste à étudier les valeurs prises par f sur le bord de D.

$$f(2\cos t, 2\sin t) = -8\sin^2(2t) + 8\sin(2t) + 8$$

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto -8x^2 + 8x + 8$ sur $[-1, 1]$ donne les valeurs extrémales -8 et 10.
On en déduit que le minimum de f vaut -8 et son maximum 10.

```
plot3d(eval([x, y, x^4+y^4-2*(x-y)^2], [x=r*cos(t), y=r*sin(t)]),
r=0..2, t=0..2*Pi, grid=[50, 50]);
```



Surface représentant f au dessus de D

Exercice 63 : [énoncé]
a) f est polynomiale donc continue. T est compact donc f présente un maximum sur T. Comme f prend des valeurs strictement positives et des valeurs nulles sur le bord de T, f présente son maximum à l'intérieur de T.
b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = T^\circ$ donc le maximum de f est point critique.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - 2x - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - x - 2y)$$

Après résolution, on obtient que seul le couple $(1/3, 1/3)$ est point critique de f et on a

$$f(1/3, 1/3) = \frac{1}{27}$$

Exercice 64 : [énoncé]
a) $\mathcal{D}$ est fermée et bornée donc compacte.
b) Pour $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0, 1]$ donc f est continue par composition.
c) Puisque f est continue sur un compact il y admet un maximum.
Puisque f est positive et non nulle ce maximum est à valeur strictement positive.
Or f est nulle sur le bord de $\mathcal{D}$ donc ce maximum est dans l'ouvert $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x, y > 0 \text{ et } x + y < 1\right\}$ et c'est donc un point critique de f car f est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^{a-1} y^b (1-x-y)^{c-1} \left(a(1 - x - y) - cx\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^a y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} (b(1$$

Il n'y a qu'un seul point critique c'est :

$$\left(\frac{a}{a + b + c}, \frac{b}{a + b + c}\right)$$

Finalement

$$\sup_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) = \frac{a^a b^b c^c}{(a + b + c)^{a+b+c}}$$

Exercice 65 : [énoncé]
La fonction $f : (x, y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x + y)$ est continue sur le compact $[0, \pi/2]^2$ donc y admet un maximum.
Le seul point critique intérieur à $[0, \pi/2]^2$ est en $x = y = \pi/3$ et la valeur y est $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
Sur le bord de $[0, \pi/2]^2$ le maximum est celui de la fonction φ avec

$$\varphi(t) = \sin t \sin\left(\pi/2 - t\right) = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

Ce maximum vaut $1/2$.
Puisque

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \geqslant \frac{1}{2}$$

on a

$$\sup_{[0,\pi/2]^2} \sin x \sin y \sin(x + y) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Exercice 66 : [énoncé]
On peut supposer l'un des sommets être $(1,0)$ et les deux autres repérés par des angles $0<\alpha<\beta<2\pi$.
Cela nous amène à considérer

$$f:(\alpha,\beta)\mapsto 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

sur l'ouvert

$$U=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/0<\alpha<\beta<2\pi\right\}$$

Le maximum, qui existe, est alors point critique de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Cela nous amène à résoudre le système

$$\begin{cases}\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}=0\\ \cos\dfrac{\beta}{2}+\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}=0\end{cases}$$

L'équation $\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ donne

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}\quad[2\pi]\text{ ou }\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}\quad[2\pi]$$

L'alternative $\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}\quad[2\pi]$ est à exclure et il reste $\beta=2\alpha$ avec de plus $\alpha\in\left]0,\pi\right[$.
L'équation $\cos\frac{\beta}{2}=-\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ donne alors $\cos\alpha=-\cos\frac{\alpha}{2}$ d'où $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ puisque $\alpha\in\left]0,\pi\right[$.
Finalement le triangle correspondant est équilatéral.

Exercice 67 : [énoncé]
Notons A,B,C les points définissant notre triangle et O le centre du cercle circonscrit.
En introduisant les mesures α,β,γ des angles $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, on vérifie

$$\alpha+\beta+\gamma=0\quad[2\pi]$$

et on peut calculer l'aire algébrique des triangles (OAB), (OBC) et (OCA) qui sont respectivement

$$\frac{1}{2}r^2\sin\alpha,\ \frac{1}{2}r^2\sin\beta\text{ et }\frac{1}{2}r^2\sin\gamma=-\frac{1}{2}r^2\sin(\alpha+\beta)$$

L'aire algébrique du triangle (ABC) est alors

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta))$$

L'étude des points critiques de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,2\pi\right[^2$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases}\cos\alpha=\cos(\alpha+\beta)\\ \cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\end{cases}$$

dont les seules solutions dans $\left]0,2\pi\right[^2$ sont

$$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\text{ et }\left(\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$$

Ce sont les situations des triangles équilatéraux resp. direct et indirect.
L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

Exercice 68 : [énoncé]
a) La fonction $M\mapsto MA$ est différentiable sauf en A et sa différentielle en un point M est

$$\vec{h}\mapsto\frac{\overrightarrow{MA}.\vec{h}}{MA}$$

On en déduit que f est différentiable en tout point du plan sauf en A,B et C et

$$\mathrm{d}f(M):\vec{h}\mapsto\left(\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}+\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}\right).\vec{h}$$

b) La fonction f est continue sur le disque $\mathcal{D}$ considéré. Puisque ce dernier est compact, la fonction f admet un minimum sur ce disque en un certain point T :

$$\forall M\in\mathcal{D},f(M)\geqslant f(T)$$

Puisque le point A appartient au disque $\mathcal{D}$, on a

$$f(T)\leqslant f(A)$$

Pour un point M en dehors de ce disque, on a

$$f(M)\geqslant MA>AB+AC=f(A)\geqslant f(T)$$

Le point T apparaît donc comme étant un minimum absolu de f sur le plan.
c) La différentiel de f en T est nulle donc

$$\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}=\vec{0}$$

d) Les trois vecteurs sommés sont unitaires. Notons a,b,c leurs affixes dans un repère orthonormé direct donné. La relation vectorielle ci-dessus donne

$$a+b+c=0 \text{ avec } |a|=|b|=|c|=1$$

En multipliant par a^{-1}, on obtient

$$1+x+y=0 \text{ avec } |x|=|y|=1$$

où $x=a^{-1}b$ et $y=a^{-1}c$
Les parties imaginaires de x et y sont alors opposées et la somme de leurs parties réelles vaut -1. On en déduit qu'à l'ordre près $x=j$ et $y=j^2$.
Finalement on obtient

$$(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB})=(\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TC})=(\overrightarrow{TC},\overrightarrow{TA})=\pm\frac{2\pi}{3}\quad[2\pi]$$

Notons qu'on peut en déduire un procédé construisant le point T comme intersection de cercles que l'on pourra définir en exploitant le théorème de l'angle au centre...

Exercice 69 : [énoncé]
Méthode analytique :
L'intérieur du triangle et son bord forment un compact. La fonction considérée est continue sur celui-ci donc admet un maximum. Celui-ci ne peut être au bord car la fonction prend des valeurs strictement positives alors qu'elle est nulle sur le bord. Il existe donc un maximum à l'intérieur du triangle et celui-ci annule la différentielle de la fonction.
En introduisant un repère, $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(a,b)$ (ce qui est possible qui à appliquer une homothétie pour que $AB=1$) la fonction étudiée est

$$f(x,y)=y(bx-ay)(b(x-1)-(a-1)y)$$

On résout le système formé par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

Le calcul est très lourd sans logiciel de calcul formel mais on parvient à conclure.
Méthode géométrique (plus élégante) :
Le point M peut s'écrire comme barycentre des points A,B,C affectés de masses $a,b,c\geqslant 0$ vérifiant $a+b+c=1$.
L'aire du triangle (MBC) est donné par

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})\right|$$

Or

$$\overrightarrow{BM}=a\overrightarrow{BA}+b\overrightarrow{BB}+c\overrightarrow{BC}$$

donc

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})=a\mathrm{Det}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$$

En notant $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC et d_A le distance de M à la droite (BC), on obtient

$$a=\frac{d_A.BC}{\mathcal{A}}$$

De façon analogue,

$$b=\frac{d_BAC}{\mathcal{A}} \text{ et } c=\frac{d_CAB}{\mathcal{A}}$$

avec des notations entendues.
Par suite, maximiser le produit $d_Ad_Bd_C$ équivaut à maximiser le produit abc avec les contraintes $a+b+c=1$ et $a,b,c\geqslant 0$
La maximisation de $ab(1-a-b)$ avec $a,b\geqslant 0$ et $a+b\leqslant 1$ conduit à $a=b=1/3$, d'où $c=1/3$ et le point M est au centre de gravité.

Exercice 70 : [énoncé]

$$\begin{cases}u=x+y\\v=2x+3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3u-v\\y=v-2u\end{cases}$$

Posons $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u,v)=(3u-v,v-2u)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.
Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(u,v)=f(3u-v,v-2u)$,
Par composition $g=f\circ\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=3\frac{\partial f}{\partial x}(3u-v,v-2u)-2\frac{\partial f}{\partial y}(3u-v,v-2u)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u}=0$ ce qui conduit à $g(u,v)=h(v)$ puis $f(x,y)=h(2x+3y)$ avec h fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 71 : [énoncé]

$$\begin{cases} u=2x+y \\ v=3x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=v-u \\ y=3u-2v \end{cases}$$

Posons $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u,v)=(v-u,3u-2v)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ (et même un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)
Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par « $g(u,v)=f(x,y)$ »i.e. $g(u,v)=f(v-u,3u-2v)$
$g=f\circ\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

f est solution de l'équation si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u}=0$ soit $g(u,v)=\varphi(v)$ avec φ fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont $f(x,y)=\varphi(3x+y)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 72 : [énoncé]

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(u+v)/2 \\ y=(u-v)/2 \end{cases}$$

Posons $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\phi(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(u,v)=f((u+v)/2,(u-v)/2)$.
Par composition $g=f\circ\phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)_{(x,y)=\phi(u,v)}$$

Par suite f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, g est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial g}{\partial u}=g$$

Après résolution, on obtient $g(u,v)=C(v)\mathrm{e}^{u/2}$ avec C fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ puis

$$f(x,y)=C(x-y)\mathrm{e}^{(x+y)/2}$$

Exercice 73 : [énoncé]
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=f$$

Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(u,v)=f(u,u+v)$.
Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(u,u+v)+\frac{\partial f}{\partial y}(u,u+v)=f(u,u+v)=g(u,v)$$

La fonction $u\mapsto g(u,v)$ est solution de l'équation différentielle $y'=y$ donc il existe $C(v)\in\mathbb{R}$ tel que $g(u,v)=C(v)\mathrm{e}^u$.
Notons que $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car $C(v)=g(0,v)$ avec g de classe $\mathcal{C}^1$.
Par suite, on obtient $f(x,y)=C(y-x)\mathrm{e}^x$.
Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Exercice 74 : [énoncé]
Soient $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.
Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)=\left(-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)_{x=r\cos\theta,y=r\sin\theta}$$

Par surjectivité de l'application

$$\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},(r,\theta)\to(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

on peut affirmer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)=0$$

c'est-à-dire, si, et seulement si, $g(r,\theta) = C(r)$ avec C fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0,+\infty[$.
On obtient alors $f(x,y) = C(\sqrt{x^2+y^2})$ puis $f(x,y) = D(x^2+y^2)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $]0,+\infty[$.

Exercice 75 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+\star}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ solution de

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Soit $g : \mathbb{R}^{+\star}\times\,]0,\pi[\,\to\mathbb{R}$ l'application définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\,]0,\pi[$ et

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -g(r,\theta)$$

Pour $r\in\mathbb{R}^{+\star}$ fixé, $\theta\mapsto g(r,\theta)$ est solution de l'équation différentielle $y'(\theta) = -y(\theta)$.
Après résolution il existe $C(r)\in\mathbb{R}$ tel que $g(r,\theta) = C(r)\mathrm{e}^{-\theta}$
De plus, la fonction $r\mapsto C(r) = g(r,0)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Ainsi

$$f(x,y) = C(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{e}^{\arctan(x/y)-\pi/2} = h(x^2+y^2)\mathrm{e}^{\arctan(x/y)}$$

où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 76 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^{+\star}\times\,]-\pi/2,\pi/2[\,\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par composition g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\,]-\pi/2,\pi/2[$ et

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si, $r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ ce qui conduit à $g(r,\theta) = h(\theta)$ puis $f(x,y) = h\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \tilde{h}\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $\tilde{h}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 77 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^{+\star}\times\,]-\pi/2,\pi/2[\,\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\,]-\pi/2,\pi/2[$ et

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(\rho,\theta) = r$$

ce qui conduit à $g(r,\theta) = r + h(\theta)$ puis

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + h\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \sqrt{x^2+y^2} + k\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec k fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 78 : [énoncé]
Supposons f homogène de degré p i.e.

$$\forall t>0,\ f(tx_1,\dots,tx_n) = t^p f(x_1,\dots,x_n)$$

En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t=1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = pf(x_1,\dots,x_n)$$

Inversement, posons

$$g(t) = f(tx_1,\dots,tx_n)$$

Si f vérifie l'équation aux dérivées partielles proposée, la fonction $t\mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$tg'(t) = pg(t)$$

et, après résolution, on obtient

$$g(t) = t^p g(1)$$

ce qui donne f homogène de degré p.
Notons que pour $n=1$, $f(x) = |x|^3$ vérifie la relation et n'est pas homogène de degré 3 que dans le sens précisé initialement.

Exercice 79 : [énoncé]
L'application φ est bien définie car $\varphi(r)$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.
Posons $g:(r,t)\mapsto f(r\cos t, r\sin t)$.
La fonction g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$.
Pour $a>0$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur le compact $[-a,a]\times[0,2\pi]$ et donc il existe $M\in\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (r,t)\in[-a,a]\times[0,2\pi]\,,\left|\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\right|\leqslant M=\psi(t)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0,2\pi]$ et donc, par domination sur tout segment, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(r)=\int_0^{2\pi}\cos t\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t,r\sin t)+\sin t\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t,r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $r\varphi'(r)=0$ puis $\varphi'(r)=0$, d'abord pour $r\neq 0$, puis pour tout $r\in\mathbb{R}$, par continuité.
Par suite φ est constante égale à $\varphi(0)=2\pi f(0)$.

Exercice 80 : [énoncé]
L'application φ est bien définie car $\varphi(r)$ est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.
Posons $g:(r,t)\mapsto f(r\cos t, r\sin t)$.
La fonction g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]$.
Pour $a>0$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur le compact $[0,a]\times[0,2\pi]$ et donc il existe $M\in\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (r,t)\in[-a,a]\times[0,2\pi]\,,\left|\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\right|\leqslant M=\psi(t)$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0,2\pi]$ et donc, par domination sur tout segment, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\varphi'(r)=\int_0^{2\pi}\cos t\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t,r\sin t)+\sin t\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t,r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$r\varphi'(r)=\lambda\varphi(r)$$

puis après résolution de cette équation différentielle sur $]0,+\infty[$

$$\varphi(r)=\lambda r^\alpha$$

La fonction φ étant définie et continue en 0, le cas où $\alpha<0$ oblige $\lambda=0$ et alors $\varphi(r)=0$.
Le cas $\alpha\geqslant 0$, n'impose rien de particulier et alors $\varphi(r)=\lambda r^\alpha$ pour tout $r\geqslant 0$.

Exercice 81 : [énoncé]
a) Les fonctions données par $f(x,y)=ax+by$ sont solutions.
b) Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$$

de sorte que

$$tg'(t)=f(tx,ty)=g(t)$$

La résolution de l'équation différentielle $ty'(t)=y$ après raccord donne

$$y(t)=\lambda t \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}$$

On en déduit

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathbb{R}, f(tx,ty)=tf(x,y)$$

En dérivant cette relation en le paramètre x, on obtient

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathbb{R}, t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)=t\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

En simplifiant par t

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathbb{R}^\star, \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Or la relation engage des fonctions continues, elle donc encore valable en $t=0$ ce qui fourni

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

De même, on obtient

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Enfin, en posant

$$a=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } b=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

l'équation initiale fournit

$$f(x,y)=ax+by$$

Exercice 82 : [énoncé]
a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r\sin\theta$ et $y = r\cos\theta$.
On parvient à
$$f(x,y) = C(x/y)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$
avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.
b) Idem, on parvient à
$$f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3} + C\left(x/y\right)$$
avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 83 : [énoncé]
a) L'application ϕ est clairement un endomorphisme de E.
Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $(r,\theta) \in V = \mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[$
Pour $f \in E$, on considère $g \in \mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R})$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On remarque
$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
Ainsi
$$\Phi(f) = 0 \Leftrightarrow r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$
pour tout $(r,\theta) \in V$.
La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r,\theta) = C(\theta)$ avec C de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.
Par suite on obtient la solution générale $f(x,y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Si f est homogène de degré α alors en dérivant la relation $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ par rapport à t puis en évaluant le résultat en $t = 1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$.
Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant g comme ci-dessus, on obtient
$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \alpha g(r,\theta)$$
ce qui donne $g(r,\theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis
$$f(x,y) = D(y/x)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$
avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que f est homogène de degré α.
c) La fonction h est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \ker\Phi$.

Exercice 84 : [énoncé]
On a
$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}$$
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(u,v) = f((u+v)/2, (u-v)/2)$$
g est de classe $\mathcal{C}^2$.
f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$$
soit $g(u,v) = C(u) + D(v)$ avec C, D fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
Ainsi les solutions sont
$$f(x,y) = C(x+y) + D(x-y)$$

Exercice 85 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f((u+v)/2, (u-v)/2c)$.
Par composition g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, par calculs, f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$$
On obtient $g(u,v) = C(u) + D(v)$ puis $f(x,t) = C(x+ct) + D(x-ct)$ avec C et D fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 86 : [énoncé]
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(u, v-u)$. Par composition g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, v-u) - \frac{\partial f}{\partial y}(u, v-u)$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v-u) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v-u) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v-u)$$

f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si, et seulement si,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$$

soit $g(u,v) = uC(v) + D(v)$ puis $f(x,y) = xC(x+y) + D(x+y)$ avec C, D fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 87 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ solution de

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Soit $g : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(u,v) = f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$$

Par composition g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}\right) - \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}$$

Pour $v \in \mathbb{R}^{+\star}$ fixé, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ est solution de l'équation différentielle $2u.y'(u) = y(u)$.
Par suite il existe $C(v) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = C(v)\sqrt{u}$$

De plus la fonction $v \mapsto C(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si G désigne une primitive de celle-ci :
$g(u,v) = G(v)\sqrt{u} + H(u)$ où H est une fonction dont le caractère $\mathcal{C}^2$ n'échappe à personne.
Finalement

$$f(x,y) = G(x/y)\sqrt{xy} + H(xy)$$

où G et H sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 88 : [énoncé]
a) On a

$$\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) = 0$$

car

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\right) \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f\right)$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est harmonique et il en est de même de $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Aussi

$$\Delta\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

donne

$$\Delta\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \Delta f = 0$$

b) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2+y^2)$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi'(x^2+y^2) + 2x^2\varphi''(x^2+y^2),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\varphi'(x^2+y^2) + 2y^2\varphi''(x^2+y^2)$$

Donc

$$\Delta f = 0 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, (x^2+y^2)\varphi''(x^2+y^2) + \varphi'(x^2+y^2) = 0$$

d'où

$$\Delta(f) = 0 \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}^{+\star}, r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$$

φ' est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$xy' + y = 0$$

c) Les solutions de l'équation $xy' + y = 0$ sont les fonctions $y(x) = C/x$.
On en déduit

$$\varphi(x) = C\ln x + D \text{ avec } C, D \in \mathbb{R}$$

Les fonction harmoniques radiales sont les

$$f(x,y) = C'\ln(x^2+y^2) + D$$

avec $C', D \in \mathbb{R}$.

Exercice 89 : [énoncé]
a) g est de classe $\mathcal{C}^2$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^2$.
D'une part :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos t\frac{\partial f}{\partial x} + \sin t\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \cos t\frac{\partial f}{\partial x} + \sin t\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2r\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r\sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -r\sin t\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos t\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -r\cos t\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin t\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\cos t\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

donc

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\right) = 0$$

b) $g : (r,t) \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$
Pour tout $r \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto g(r,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)$ sont continue par morceaux donc intégrables sur $[0, 2\pi]$.
$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ est continue en t et continue par morceaux en t.
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ est continue sur le compact $[a,b] \times [0, 2\pi]$ donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [0, 2\pi], \left|\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\right| \leqslant M = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et donc, par intégration sur tout segment, on peut affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \varphi''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$r(r\varphi'(r))' = r\varphi'(r) + r^2\varphi''(r) = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_0^{2\pi}$$

Puisque $t \mapsto g(r,t)$ est 2π périodique, il en est de même de $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(r,t)$ et donc

$$r(r\varphi'(r))' = 0$$

Puisque $r \mapsto (r\varphi'(r))'$ est continue et nulle sur $\mathbb{R}^\star$, cette fonction est continue nulle sur $\mathbb{R}$.
c) Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $r\varphi'(r) = C$ puis

$$\varphi'(r) = \frac{C}{r}$$

et

$$\varphi(r) = C\ln|r| + D$$

sur $\mathbb{R}^\star$.
Or φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc $C = 0$ et finalement φ est constante.

Exercice 90 : [énoncé]
Pour $y \in \left]-R, R\right[$ fixé, on peut appliquer le théorème dérivation sous le signe somme à l'application

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$$

sur les segments $[a,b]$ inclus dans $\left]-r, r\right[$ avec $r = \sqrt{R^2 - y^2}$.
En effet, la série entière dérivée de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$a pour rayon de convergence R et donc celle-ci converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert $D(0,R)$, en particulier sur le compact $[a,b] \times \{y\}$
On obtient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$$

De même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2}$$

et aussi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} -n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2}$$

d'où la conclusion.

Exercice 91 : [énoncé]
Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On calcule les dérivées partielles de F

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_i^2}{x_1^2+\dots+x_n^2} f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right) + \frac{x_1^2+\dots+\hat{x}_i^2+\dots+x_n^2}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right) + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

Puisque $t = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ parcourt $\mathbb{R}^{+\star}$ quand $(x_1,\dots,x_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, l'équation $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$ est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$f''(t) + \frac{(n-1)}{t} f'(t) = 0$$

Après résolution on obtient

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^{n-2}} + \mu \text{ avec } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \text{ si } n \neq 2 \text{ et } f(t) = \lambda \ln t + \mu \text{ si } n = 2$$

Exercice 92 : [énoncé]

a) Puisque

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}$$

on a

$$\Delta F = \operatorname{div}\overrightarrow{grad}\, F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

b) Introduisons f et $\tilde{f}$ les représentations cartésiennes et polaires de F.
On a

$$F(M) = \tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

donc

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ce qu'on réécrit

$$\frac{\partial F}{\partial r}(M) = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) + \sin\theta \frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

De même

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(M) = -r\sin\theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) + r\cos\theta \frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

c) Aussi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(M) = \cos^2\theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + \sin^2\theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) + 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M)$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(M) = r^2\sin^2\theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + r^2\cos^2\theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) - 2r^2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(M) - r\cos\theta \frac{\partial F}{\partial x}(M) -$$

On observe alors

$$r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(M) + r\frac{\partial F}{\partial r}(M) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta}(M) = r^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M)\right)$$

et donc

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

Exercice 93 : [énoncé]

Introduisons les représentations cartésiennes et cylindriques de F.

$$F(M) = \tilde{f}(\rho,\varphi,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

On en tire

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}(\rho,\varphi,z) = \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z) + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$$

qu'on réécrit :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M) = \cos\varphi \frac{\partial F}{\partial x}(M) + \sin\varphi \frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

De même :

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M) = -\rho\sin\varphi \frac{\partial F}{\partial x}(M) + \rho\cos\varphi\frac{\partial F}{\partial y}(M)$$

Sachant $\vec{u}_\rho = \cos(\varphi).\vec{i} + \sin(\varphi).\vec{j}$ et $\vec{u}_\varphi = -\sin(\varphi).\vec{i} + \cos(\varphi).\vec{j}$, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}(M)\vec{u}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}(M)\vec{k} = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(M)\vec{k}$$

Ainsi

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

Exercice 94 : [énoncé]
$\vec{F}(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$.
a) $\text{div}\vec{F}(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) = \frac{1}{OM}$.
b) $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(M) = \sqrt{x^2+y^2} = OM$.

Exercice 95 : [énoncé]
$\vec{F}(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\vec{k}$
a) $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(M) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{OM}$.
b) $\text{div}\vec{F}(M) = \left(\frac{1}{OM^3} - 3\frac{x^2}{OM^5}\right) + \left(\frac{1}{OM^3} - 3\frac{y^2}{OM^5}\right) + \left(\left(\frac{1}{OM^3} - 3\frac{z^2}{OM^5}\right)\right) = -\frac{2}{OM^3}$.
$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F} = \vec{o}$ car $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

Exercice 96 : [énoncé]
$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$.

$$\vec{F}(M) = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}$$

a) $\text{div}\vec{F}(M) = 0$. $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F}(M) = 2\omega_x\vec{i} + 2\omega_y\vec{j} + 2\omega_z\vec{k} = 2\vec{\omega}$.
b) Lorsque $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, le champ $\vec{F}$ ne dérive pas d'un potentiel.
Lorsque $\vec{\omega} = \vec{0}$, le champ $\vec{F}$ est nul et donc d'un dérive de n'importe quel potentiel constant.

Exercice 97 : [énoncé]
a) $\vec{\gamma}_2$ paramètre le quart d'une ellipse partant du sommet $A(a,0)$ jusqu'au sommet $B(0,b)$.
$\vec{\gamma}_1$ paramètre le segment $[A,B]$ de A vers B.
b) Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive du potentiel U si, et seulement si,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = y \text{ et } \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 2x$$

Un tel potentiel est alors de classe $\mathcal{C}^2$ et l'égalité de Schwarz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

n'étant pas vérifiée, on peut conclure à l'inexistence de U.

c) La circulation de $\vec{V}$ le long de $\vec{\gamma}_1$ est

$$\int_0^1 -abt + 2ab(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}$$

et celle le long de $\vec{\gamma}_2$ est

$$\int_0^{\pi/2} -ab\sin^2(s) + 2ab\cos^2(s)\,\mathrm{d}s = \frac{ab\pi}{4}$$

Par la différence des deux valeurs obtenues, on retrouve que $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.