Calculs algébriques

Equations et systèmes

Exercice 1 [02116] [correction]
Observer que
$$x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$
est solution d'une équation de la forme $x^3 = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Résoudre cette dernière et déterminer x.

Exercice 2 [02117] [correction]
Résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

Exercice 3 [02118] [correction]
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 [02119] [correction]
Résoudre le système
$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases}$$
d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a désignant un paramètre réel.

Exercice 5 [02115] [correction]
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$\text{a) } x = 2x - 1 \quad [1] \quad \text{b) } 3x = 2 - x \quad [\pi] \quad \text{c) } nx = 0 \quad [\pi] \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^\star)$$

Sommes

Exercice 6 [02062] [correction]
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha + a_i = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i + b_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^\alpha = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\alpha$ f) $\displaystyle\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}$?

Exercice 7 [02063] [correction]
Etablir l'une des trois formules suivantes :
a) $\sum\limits_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ b) $\sum\limits_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ c) $\sum\limits_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 8 [02064] [correction]
A partir des valeurs connues de $\sum\limits_{k=1}^n k$ et $\sum\limits_{k=1}^n k^2$, calculer :
a) $\sum\limits_{k=1}^n k(k+1)$
b) $1.n + 2.(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1$.

Exercice 9 [02065] [correction]
Calculer
$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k$$

Exercice 10 [02066] [correction]
Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ est strictement croissante.

Exercice 11 [02067] [correction]
Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$$

Exercice 12 [02068] [correction]
Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice 13 [02069] [correction]
a) Calculer
$$\sum_{k=1}^{p} kk!$$
b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in [\![0, (p+1)! - 1]\!]$, il existe un $(p+1)$ uplet $(n_0, n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que
$$\forall k \in [\![0, p]\!], 0 \leqslant n_k \leqslant k \text{ et } n = \sum_{k=0}^{p} n_k k!$$
c) Justifier l'unicité d'une telle suite.

Sommes géométriques

Exercice 14 [02070] [correction]
Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

Exercice 15 [02071] [correction]
Calculer, pour tout $q \in \mathbb{C}$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} q^{2k}$.

Exercice 16 [02072] [correction]
Pour $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} kq^k$.
En calculant $qS_n - S_n$, déterminer la valeur de S_n.

Exercice 17 [02053] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre, lorsqu'elle a un sens, l'équation :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$$

Sommes doubles

Exercice 18 [02073] [correction]
A partir des valeurs connues de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$, calculer :
$$\text{a) } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 \quad \text{b) } \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij \quad \text{c) } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$$

Exercice 19 [02074] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $C_n = \sum\limits_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (p+q)$ en remarquant
$$\sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} p + q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

Produits

Exercice 20 [02075] [correction]
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :
a) $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ b) $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i \prod\limits_{i=1}^{n} b_i$ c) $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i + b_i = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i + \prod\limits_{i=1}^{n} b_i$?

Exercice 21 [02076] [correction]
Calculer
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 22 [02077] [correction]
On désire calculer le produit $P(x) = \prod\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \cos(2^k x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
a) Commencer par traiter le cas $x = 0 \quad [\pi]$.
b) Pour $x \neq 0 \quad [\pi]$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et exprimer $P(x)$.

Exercice 23 [02078] [correction]
Soient $a \in \mathbb{R}$ et
$$P = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})$$
a) Calculer P quand $a = 1$.
b) Calculer $(1 - a)P$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P.
c) Comment expliquer la formule obtenue ?

Exercice 24 [03498] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, simplifier
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$$

Nombres factoriels

Exercice 25 [02079] [correction]
Exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ puis $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factoriels

Exercice 26 [02080] [correction]
Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Formule du binôme

Exercice 27 [02082] [correction]
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
$$\text{a) } S_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{b) } S_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad \text{c) } S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

Exercice 28 [02083] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer
$$A = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} \text{ et } B = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$$
en formant un système dont A et B seraient solutions.

Exercice 29 [02084] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p$$
En déduire
$$A = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}, B = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1} \text{ et } C = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+2}$$

Exercice 30 [02085] [correction]
[Formule de Chu-Vandermonde]
Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant p + q$.
En développant de deux manières $(1+x)^p \times (1+x)^q$, établir
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

Exercice 31 [02088] [correction]
Développer $(a+b+c)^n$.

Exercice 32 [02089] [correction]
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$
b) Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant k \leqslant n$. Comparer
$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \text{ et } \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$
c) Soit (x_n) une suite de réels. On pose
$$\forall k \in \mathbb{N}, y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

Coefficients binomiaux

Exercice 33 [02081] [correction]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

En déduire

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$$

Exercice 34 [02086] [correction]
Calculer, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k}$$

Exercice 35 [02087] [correction]
Calculer pour $n, p \in \mathbb{N}^\star$, la somme

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)$$

Exercice 36 [02090] [correction]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Exercice 37 [02091] [correction]
Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}$$

Exercice 38 [03682] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) On suppose que n est premier. Montrer

$$\forall k \in \{2, \ldots, n-1\}, n \text{ divise } \binom{n}{k}$$

b) Inversement, on suppose que n est composé. Montrer

$$\exists k \in \{2, \ldots, n-1\}, n \text{ ne divise pas } \binom{n}{k}$$

Exercice 39 [03688] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Justifier

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

b) En déduire que pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

et pour tout entier k vérifiant $n/2 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$$

c) Comment interpréter simplement les inégalités qui viennent d'être obtenues ?

Exercice 40 [03689] [correction]
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On remarque
$$x^3 = 6x + 40$$
4 est solution apparente de cette équation.
$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2 + 4x + 10)$$
Les solutions de l'équation sont $4, -2 + i\sqrt{6}, -2 - i\sqrt{6}$. Le nombre x correspond à la seule solution réelle donc $x = 4$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) Si (x, y) est solution alors $(2) \Rightarrow x(x + y) = 0$ donc $x = 0$ ou $y = -x$.
Si $x = 0$ alors (1) donne $y = \pm 1/\sqrt{2}$.
Si $y = -x$ alors (1) donne $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
Inversement : ok
Finalement : $\mathcal{S} = \left\{(0, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\right\}$.
b) Si (x, y) est solution alors $(1) - (2)$ donne $(x - y)^2 = 0$ d'où $x = y$ puis (1) donne $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \left\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\right\}$.
c) Si (x, y) est solution alors (1) et (2) donnent $x^4 = x$ d'où $x = 0$ ou $x = 1$.
Si $x = 0$ alors $y = 0$. Si $x = 1$ alors $y = 1$.
Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Si (x, y, z) est solution alors (3) donne $x = 0, y = 0$ ou $z = 0$.
Si $x = 0$ alors $y = 3, z = 5$. Si $y = 0$ alors $x = \frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}$. Si $z = 0$ alors $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3}$.
Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \left\{(0, 3, 5), (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0)\right\}$.
b) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)\right\}$.
c) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\}$.

Exercice 4 : [énoncé]
On a
$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ ay + az = 1 \\ ay + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ ay + az = 1 \\ (1-a)z = 0 \end{cases}$$
Si $a = 1$ alors le système a pour solution les triplets
$$(3 - 2z, 1 - z, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$
Si $a \neq 1$ alors le système équivaut à
$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ay = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$
Si $a = 0$, il n'y a pas de solutions.
Si $a \neq 0, 1$ alors le système possède pour solution l'unique le triplet
$$(3, 1/a, 0)$$

Exercice 5 : [énoncé]
a) $x = 2x - 1 \quad [1] \Leftrightarrow -x = -1 \quad [1] \Leftrightarrow x = 1 \quad [1]$, $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$.
b) $3x = 2 - x \quad [\pi] \Leftrightarrow 4x = 2 \quad [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$, $\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi + 2}{4} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
c) $nx = 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{n}\right]$, $\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi}{n} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 6 : [énoncé]
b) c) f)

Exercice 7 : [énoncé]
Par récurrence.

Exercice 8 : [énoncé]
a) En séparant la somme
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
b) On réécrit
$$1.n + 2.(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1 = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$
et on réorganise
$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Exercice 9 : [énoncé]
D'une part
$$\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k k=\sum_{\ell=1}^{p}(-(2\ell-1)+2\ell)=p$$
et d'autre part
$$\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k k=p-(2p+1)=-(p+1)$$
Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=\begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ (-1)^n(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Exercice 10 : [énoncé]
$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0.$

Exercice 11 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, sachant
$$(n+1)!+(n+1)!=2.(n+1)!\leqslant(n+2)!$$

Exercice 12 : [énoncé]
$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.$

Exercice 13 : [énoncé]
a) En écrivant $k=(k+1)-1$
$$\sum_{k=1}^{p}kk!=\sum_{k=1}^{p}(k+1)!-k!=(p+1)!-1$$
b) Par récurrence forte sur $p\geqslant 0$.
Pour $p=0$: ok
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $p\geqslant 0$.
Soit $n\in[\![0,(p+2)!-1]\!]$.
Réalisons la division euclidienne de n par $(p+1)!$: $n=q(p+1)!+r$ avec $0\leqslant r<(p+1)!$.
Puisque $0\leqslant n<(p+2)!$ on a $0\leqslant q\leqslant p+1$.
Par hypothèse de récurrence, on peut écrire $r=\sum_{k=0}^{p}n_k k!$ et en prenant $n_{p+1}=q$ on a $n=\sum_{k=0}^{p+1}n_k k!$.
Récurrence établie.
c) Supposons $n=\sum_{k=0}^{p}n_k k!=\sum_{k=0}^{p}n'_k k!$ avec les conditions requises.
Si $n_p<n'_p$ alors
$$\sum_{k=0}^{p}n_k k!\leqslant n_p p!+\sum_{k=0}^{p-1}k.k!=(n_p+1)p!-1<n'_p p!\leqslant\sum_{k=0}^{p}n'_k k!$$
Ceci est absurde donc nécessairement $n_p\geqslant n'_p$ puis par symétrie $n_p=n'_p$.
On simplifie alors le terme $n_p p!$ et on reprend le principe pour conclure à l'unicité.

Exercice 14 : [énoncé]
Si $\theta\neq 0\quad[2\pi]$ alors $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}=\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}$ (somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\theta}\neq 1$)
Si $\theta=0\quad[2\pi]$ alors $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$.

Exercice 15 : [énoncé]
Si $q^2\neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n}q^{2k}=\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$ (somme géométrique de raison q^2)
Si $q^2=1$ alors $\sum_{k=0}^{n}q^{2k}=n+1$.

Exercice 16 : [énoncé]
On a
$$qS_n-S_n=\sum_{k=0}^{n}kq^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}kq^k=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)q^k-\sum_{k=0}^{n}kq^k$$
En combinant les deux sommes
$$qS_n-S_n=nq^{n+1}-\sum_{k=1}^{n}q^k=\frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{q-1}$$
puis
$$S_n=\frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(q-1)^2}$$

Exercice 17 : [énoncé]
L'équation a un sens pour $x \neq \pi/2 \quad [\pi]$. En exploitant $\cos(kx) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ikx})$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x}\right)$$

ce qui apparaît comme une somme géométrique.
Si $x \neq 0 \quad [\pi]$ alors $q = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos x} \neq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x} \frac{\cos^{n+1} x - \mathrm{e}^{i(n+1)x}}{\cos x - \mathrm{e}^{ix}}$$

Il reste à en déterminer la partie réelle. Puisque

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x} \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{-i\sin x}$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x(\cos x)^n}$$

Finalement, pour les x considérés

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} = 0 \Leftrightarrow \sin(n+1)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad [\pi/(n+1)]$$

Si $x = 0 \quad [\pi]$ alors x n'est pas solution car

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = n+1$$

Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi}{(n+1)} / k \in \mathbb{Z} \text{ et } (n+1) \not| k\right\}$$

Exercice 18 : [énoncé]
a) $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(i^2 + 2ij + j^2\right)$ puis

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 = n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + n\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$$

b) $\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n-1} \left(i \sum_{j=i+1}^{n} j\right)$ puis

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{n+i+1}{2}(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}$$

c) $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)$ puis

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 19 : [énoncé]
Après réorganisation des termes

$$\sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} p+q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

Or

$$2\sum_{p=1}^{n} p = n(n+1)$$

et

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} p+q = n^2(n+1)$$

d'où

$$C_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

Exercice 20 : [énoncé]
b)

Exercice 21 : [énoncé]

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1$$

Exercice 22 : [énoncé]
a) Si $x = 0 \quad [2\pi]$ alors $P(x) = 1$. Si $x = \pi \quad [2\pi]$ alors $P(x) = -1$.
b) En exploitant successivement la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$$\sin(x)P(x) = \sin x.\cos x.\cos 2x \ldots \cos 2^n x = \frac{1}{2^{n+1}} \sin 2^{n+1} x$$

donc

$$P(x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$$

Exercice 23 : [énoncé]
a) Si $a = 1$ alors

$$P = \prod_{k=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$$

b) Si $a \neq 1$ alors

$$(1-a)P = (1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

Par application de la formule $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ on obtient

$$(1-a)P = (1-a^2)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

et en répétant l'opération

$$(1-a)P = (1-a^{2^{n+1}})$$

On conclut

$$P = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

c) La formule obtenue correspond à celle exprimant la somme

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2^n - 1}$$

En effet si l'on développe le produit définissant P, on obtient que P est la somme des termes

$$a^{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i 2^i} \text{ avec } \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

Or tout entier k compris entre 0 et 2^{n-1} s'écrit de façon unique sous la forme

$$k = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i 2^i \text{ avec } \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

et donc

$$P = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2^n - 1}$$

Exercice 24 : [énoncé]
Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\times \ldots \times 5}{(2n-1)(2n-3)\times \ldots \times 5 \times 3 \times 1}$$

puis après simplification

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{(2n+3)(2n+1)}{3}$$

et pour $n = 1$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} = 5$$

ce qui rend la formule précédente encore valable.

Exercice 25 : [énoncé]
En extrayant un 2 dans chaque facteur

$$2.4.6 \times \cdots \times (2n) = 2^n 1.2.3 \times \cdots \times n = 2^n n!$$

En introduisant les facteurs pairs intermédiaires

$$1.3.5 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{1.2.3.4.5.6 \times \cdots \times (2n) \times (2n+1)}{2.4.6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 26 : [énoncé]
(1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$:
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

$$\prod_{k=1}^{n+1} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (4k-2) \times (4n+2) \underset{HR}{=} \prod_{k=1}^{n} (n+k) \times (4n+2)$$

et

$$\prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) = (n+2)(n+3)\ldots(2n+2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k) \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}$$

donc
$$\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)\times(4n+2)$$
Récurrence établie.
(2) Directe :
$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=2^n(1\times 3\times\ldots\times(2n-1))=\frac{(2n)!}{n!}$$
et
$$\prod_{k=1}^{n}(n+k)=(n+1)(n+2)\ldots(2n)=\frac{(2n)!}{n!}$$

Exercice 27 : [énoncé]
a) Par la formule du binôme
$$S_0=(1+1)^n=2^n$$
b) $((1+x)^n)'=n(1+x)^{n-1}$ donne
$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$$
donc
$$S_1=n2^{n-1}$$
c)
$$(x((1+x)^n)')'=(nx(1+x)^{n-1})'=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$
donne
$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$
donc
$$S_2=n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}$$

Exercice 28 : [énoncé]
On a
$$A+B=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=(1+1)^n=2^n$$
et
$$A-B=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}=(1-1)^n=0^n=0$$
donc
$$A=B=2^{n-1}$$

Exercice 29 : [énoncé]
Par la formule du binôme
$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}j^p=(1+j)^n=2^n\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}}\cos^n\frac{\pi}{3}$$
On a aussi
$$A+B+C=(1+1)=2^n$$
et par ce qui précède
$$A+jB+j^2C=2^n\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}}\cos^n\frac{\pi}{3}$$
puis aussi par conjugaison
$$A+j^2B+jC=2^n\mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{3}}\cos^n\frac{\pi}{3}$$
On en déduit
$$A=\frac{2^n}{3}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right),\ B=\frac{2^n}{3}\left(1+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right)$$
et
$$C=\frac{2^n}{3}\left(1+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right)$$

Exercice 30 : [énoncé]
Le coefficient de x^n dans $(1+x)^p\times(1+x)^q=(1+x)^{p+q}$ est $\binom{p+q}{n}$.
Lorsqu'on développe le produit $(1+x)^p\times(1+x)^q$, on obtient un x^n en croisant un x^k de $(1+x)^p$ par un x^{n-k} de $(1+x)^q$ (pour $0\leqslant k\leqslant n$). Le coefficient de x^k

dans $(1+x)^p$ est $\binom{p}{k}$ et le coefficient x^{n-k} dans $(1+x)^q$ est $\binom{q}{n-k}$ donc le coefficient de x^n dans $(1+x)^p \times (1+x)^q$ est

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

d'où l'égalité.

Exercice 31 : [énoncé]

$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{\ell} a^{n-k}b^{k-\ell}c^{\ell}$ et $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \frac{n!}{(n-k)!(k-\ell)!\ell!}$.

Exercice 32 : [énoncé]

a) Par la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1+(-1))^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

b) On a

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{(n-\ell)!}{(n-k)!(k-\ell)!} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

c) On a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}x_\ell = \sum_{\ell=0}^{n}x_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}$$

Or

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = (-1)^{n-\ell}\binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

avec

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell=n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k = x_n$$

Exercice 33 : [énoncé]

On a

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n\binom{n-1}{p-1}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p} = n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Exercice 34 : [énoncé]

On a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+2}{2}+\cdots+\binom{p+n}{n}$$

En regroupant les deux premiers termes par la formule du triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p+2}{1}+\binom{p+2}{2}+\cdots+\binom{p+n}{n}$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p+3}{2}+\cdots+\binom{p+n}{n} = \binom{p+n+1}{n}$$

Exercice 35 : [énoncé]

On commence par exprimer le produit comme un rapport de nombres factoriels

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!}$$

puis on introduit un coefficient du binôme

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right) = p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i}$$

La somme introduite peut être calculée grâce à la formule de Pascal

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right) = p!\binom{p+n+1}{n} = \frac{(p+n+1)!}{(p+1)n!}$$

Exercice 36 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geqslant 1$ sachant :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Exercice 37 : [énoncé]
Exploitons

$$\binom{2n+1}{k} = \binom{2n}{k-1} + \binom{2n}{k}$$

On obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}$$

Par décalage d'indice

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}$$

Après simplification,

$$S_n = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

Exercice 38 : [énoncé]
a) On suppose n premier. On sait

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

donc

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

ce qui permet d'affirmer que n divise l'entier $k \binom{n}{k}$. Or n est premier et donc premier avec k puisque $k < n$. Par le théorème de Gauss, on peut alors affirmer que n divise $\binom{n}{k}$.
b) Supposons maintenant n composé. On peut introduire p un facteur premier de n avec $p < n$. Nous allons alors montrer que n ne divise par $\binom{n}{p}$ ce qui permet de conclure.
Par l'absurde, supposons que $m = \frac{1}{n} \binom{n}{p}$ soit un entier. On peut écrire

$$(n-1)! = m.p!(n-p)!$$

Puisque p divise n, on peut aussi écrire $n = pq$ avec q entier et donc

$$(pq-1)! = mp!\,(p(q-1))!$$

Dans les produits définissant $(pq-1)!$ et $(p(q-1))!$, on retrouve les mêmes multiples de p, à savoir $p, 2p, \dots (q-1)p$. On peut donc écrire

$$(pq-1)! = ka \text{ et } (p(q-1))! = kb$$

avec k regroupant le produit des multiples de p précédents et a et b non divisibles par p.
La relation initiale se simplifie alors pour donner

$$a = mp!b$$

ce qui entraîne que a est divisible par p. C'est absurde !

Exercice 39 : [énoncé]
a) On peut écrire

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)}{k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

ce qui donne directement la relation soumise.

b) Si $1 \leqslant k \leqslant n/2$ alors $2k < n+1$ et donc $n-k+1 > k$ puis

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}$$

La deuxième inégalité s'en déduit par la relation de symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

c) Pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux croît puis décroît en étant extrémale en son milieu.

Exercice 40 : [énoncé]
On a

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

Or, pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux est maximale en son milieu donc

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant 2n, \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$$

et donc

$$2^{2n} \leqslant (2n+1)\binom{2n}{n}$$

puis l'inégalité proposée.