Dérivation

Dérivabilité

Exercice 1 [01354] [correction]
Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes

$$\text{a) } x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3} \quad \text{b) } x \mapsto (x^2-1)\arccos(x^2)$$

Exercice 2 [00736] [correction]
Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$\text{a) } x \mapsto x\,|x| \quad \text{b) } x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

Exercice 3 [00247] [correction]
Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$\text{a) } f : x \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{b) } g : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 4 [01359] [correction]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On définit une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0,1/2] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

A quelle condition(s) la fonction g est-elle dérivable ?

Exercice 5 [01360] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.
Montrer que $|f| : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas et exprimer sa dérivée.

Calcul de dérivées

Exercice 6 [01355] [correction]
Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a) } x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1} \quad \text{b) } x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{c) } x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$$

Exercice 7 [00737] [correction]
Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a) } x \mapsto x^x \quad \text{b) } x \mapsto (\text{ch}x)^x \quad \text{c) } x \mapsto \ln|x|$$

Exercice 8 [00249] [correction]
Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \arctan(\mathrm{e}^x),\ f_2(x) = \arctan(\text{sh}x) \text{ et } f_3(x) = \arctan\left(\text{th}\frac{x}{2}\right)$$

Qu'en déduire ?

Dérivation d'application réciproque

Exercice 9 [01367] [correction]
Soit $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Application de la dérivation

Exercice 10 [01356] [correction]
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}$$

a) Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
b) Observer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 11 [01366] [correction]
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(0) = -1 \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Montrer que si f s'annule au moins deux fois alors f' aussi.

Exercice 12 [01365] [correction]
Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Calcul de limites

Exercice 13 [01357] [correction]
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en soit pas une extrémité. Si le rapport

$$\frac{1}{2h}\left(f(a+h) - f(a-h)\right)$$

admet une limite finie quand h tend vers 0, celle-ci est appelée dérivée symétrique de f en a.
a) Montrer que, si f est dérivable à droite et à gauche en a, elle admet une dérivée symétrique en a.
b) Que dire de la réciproque ?

Exercice 14 [01358] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Etudier

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Calcul de dérivées n-ième

Exercice 15 [01362] [correction]
Calculer la dérivée n-ième de

$$\text{a) } x \mapsto x^2(1+x)^n \quad \text{b) } x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$$

Exercice 16 [01361] [correction]
Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \; x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 17 [00251] [correction]
Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 18 [00743] [correction]
Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos^3 x$

Exercice 19 [03863] [correction]
Calculons la dérivée n-ième de la fonction réelle $t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^t$.

Exercice 20 [01363] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin x$. Montrer que

$$f^{(n)}(x) = 2^n \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

Exercice 21 [00254] [correction]
Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$ est

$$(-1)^n x^{-(n+1)} \mathrm{e}^{1/x}$$

Exercice 22 [00252] [correction]
Soit $f : x \mapsto \arctan x$.
a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2)$$

b) En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 23 [01364] [correction]
Calculer de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$.
En déduire une expression de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Théorème de Rolle

Exercice 24 [01370] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas.
Montrer que f ne peut être périodique.

Exercice 25 [01371] [correction]
Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x\in\left]0,1\right[$ tel que

$$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$$

Exercice 26 [00256] [correction]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a)>0$ et $f'(b)<0$.
Montrer que la dérivée de f s'annule.

Exercice 27 [01372] [correction]
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.
a) Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.
b) Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ -ième de $f'+\alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.
(indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire.)

Exercice 28 [00262] [correction]
On pose $f:x\mapsto\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$.
a) Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n.
b) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
c) Montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $\left]-1,1\right[$.

Exercice 29 [02820] [correction]
Soient $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a,b,c trois points distincts de I.
Montrer

$$\exists d\in I,\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(d)$$

Exercice 30 [01376] [correction]
Soient $n\in\mathbb{N}$, $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.
Montrer que si

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0\text{ et }f(b)=0$$

alors il existe $c\in\left]a,b\right[$ tel que $f^{(n)}(c)=0$.

Exercice 31 [01373] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty}f=\lim_{+\infty}f=+\infty$$

Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 32 [01374] [correction]
Soit $f:\left[0,+\infty\right[\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty}f=f(0)$$

Montrer qu'il existe $c>0$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 33 [01377] [correction]
Soit $a>0$ et f une fonction réelle continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $\left]0,a\right]$.
On suppose

$$f(0)=0\text{ et }f(a)f'(a)<0$$

Montrer qu'il existe $c\in\left]0,a\right[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 34 [01380] [correction]
Soit $a>0$ et $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0)=f(a)=0\text{ et }f'(0)=0$$

a) Montrer que la dérivée de $x\mapsto f(x)/x$ s'annule sur $\left]0,a\right[$.
b) En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 35 [01378] [correction]
[Règle de L'Hôpital]
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que

$$\forall x \in [a, b]\,, g'(x) \neq 0$$

a) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 36 [01375] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } f'(a) > 0,\ f'(b) > 0$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in \left]a, b\right[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et

$$f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$$

Exercice 37 [03436] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b)$$

Montrer qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que

$$f(c) = f''(c)$$

Indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et e^x

Théorème des accroissements finis

Exercice 38 [01386] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

Exercice 39 [01381] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Montrer que

$$\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

Exercice 40 [01382] [correction]
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a + 2h]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).
Montrer

$$\exists c \in \left]a, a + 2h\right[,\ f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

(indice : introduire $\varphi(x) = f(x + h) - f(x)$.)

Exercice 41 [01384] [correction]
A l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x + 1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$

Exercice 42 [00267] [correction]
Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$\sqrt[n+1]{n + 1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 43 [01385] [correction]
Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1 + x} < \ln(1 + x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

Exercice 44 [01341] [correction]
Soit $f : \left]0, 1\right] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose de $f(x) \to \ell$ et $xf'(x) \to \ell'$ quand $x \to 0$.
Que dire de ℓ' ?

Exercice 45 [00727] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.
a) Si f'' est bornée, que dire de $f'(x)$ quand $x \to +\infty$?
b) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse du a) ?

Exercice 46 [03886] [correction]
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|^\alpha$$

a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que f est höldérienne d'exposant $\alpha = 1$.
b) Démontrer que les fonctions höldériennes d'exposant > 1 sont constantes.
c) On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ définie sur $]0, 1]$.
Montrer que la fonction f n'est pas höldérienne d'exposant 1.
d) Vérifier cependant que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Obtention d'inégalités

Exercice 47 [01383] [correction]
Etablir les inégalités suivantes :
a) $\forall x \in]-1, +\infty[, \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$
b) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 48 [01402] [correction]
Soit $p \in]0, 1]$.
a) Etablir que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$(1 + t)^p \leqslant 1 + t^p$$

b) En déduire que pour tout $x, y \geqslant 0$,

$$(x + y)^p \leqslant x^p + y^p$$

Classe d'une fonction

Exercice 49 [01387] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 50 [01388] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique.
Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 51 [01389] [correction]
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 52 [01390] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 53 [01368] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x^2)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est définie et continue sur $]-\infty, 1]$.
Par opérations, f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
Quand $h \to 0^+$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sqrt{1 - h} \to 1$$

et quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \to -1$$

f n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.
Quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{-h - 2h^2 - h^3}}{h} \to -\infty$$

f n'est pas dérivable en 1, il y a une tangente verticale à son graphe en cet abscisse.
b) $f(x) = (x^2 - 1) \arccos x^2$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.
Par opération f est dérivable sur $]-1, 1[$.
Quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = (2 + h) \arccos((1 + h)^2) \to 0$$

f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) $f(x) = x\,|x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0^+$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \to 0$$

et quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = -h \to 0$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
b)$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{|h| + 1} \to 1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

n'a pas de limite donc f n'est pas dérivable en 0.
b) g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, g est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0$,

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin \frac{1}{h} \to 0$$

donc g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
g est dérivable sur $[0, 1/2[$ et $]1/2, 1]$.
g est continue en $1/2$ si, et seulement si, $f(1) = f(0)$.
Si tel est le cas,

$$g'_g(1/2) = 2f'(1) \text{ et } g'_d(1/2) = 2f'(0)$$

Finalement g est dérivable si, et seulement si,

$$f(0) = f(1) \text{ et } f'(0) = f'(1)$$

Exercice 5 : [énoncé]
$|f(t)| = \sqrt{f(t)\overline{f(t)}}$ est dérivable par opérations en tout $t \in I$ tel que $f(t) \neq 0$.

$$|f(t)|' = \frac{(f(t)\overline{f(t)})'}{2\sqrt{f(t)\overline{f(t)}}} = \frac{f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)}}{2\,|f(t)|} = \frac{\operatorname{Re}(f'(t)\overline{f(t)})}{|f(t)|}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\left(\frac{\arctan x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-2x\arctan x}{(x^2+1)^2}$$

b) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

c) $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\left(\frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}\right)' = \frac{\cos x}{(\cos x+2)^4} + \frac{4\sin^2 x}{(\cos x+2)^5} = \frac{4+2\cos x-3\cos^2 x}{(\cos x+2)^5}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) $x \mapsto x^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$,

$$(x^x)' = (\mathrm{e}^{x\ln x})' = (1+\ln x)x^x$$

b) $x \mapsto (\mathrm{ch}x)^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$((\mathrm{ch}x)^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln \mathrm{ch}x}\right)' = (\ln \mathrm{ch}x + x\mathrm{th}x)(\mathrm{ch}x)^x$$

c) $x \mapsto \ln|x|$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$,

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Exercice 8 : [énoncé]

$$f_1'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}},\ f_2'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \text{ et } f_3'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

On en déduit

$$f_1(x) = \frac{1}{2}f_2(x) + \frac{\pi}{4} = f_3(x) + \frac{\pi}{4}$$

Exercice 9 : [énoncé]
f est continue et strictement croissante, $f(0)=0$ et $f(\pi/2) = 1+\pi/2$ donc f réalise une bijection de $[0,\pi/2]$ vers $[0,1+\pi/2]$ et son application réciproque f^{-1} est continue.
f est dérivable sur $]0,\pi/2]$ avec

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0,\pi/2]) =]0,1+\pi/2]$.
Etude de la dérivabilité de f^{-1} en 0
Quand $h \to 0^+$, en posant $x = f^{-1}(h) \to 0$

$$\frac{f^{-1}(h)-f^{-1}(0)}{h} = \frac{x}{f(x)}$$

Or

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})+x} \sim \sqrt{x} \to 0$$

donc f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$.

Exercice 10 : [énoncé]
f_λ est dérivable et

$$f_\lambda'(x) = \frac{-x^2-2x\lambda+1}{(x^2+1)^2}$$

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f_\lambda'(0) = 1$ donc les tangentes en 0 sont parallèles.
b) L'équation de la tangente en 1 à f_λ est

$$y = -\frac{\lambda}{2}(x-1) + \frac{\lambda+1}{2}$$

ou encore

$$y = -\frac{\lambda}{2}(x-2) + \frac{1}{2}$$

Ces tangentes concourent au point d'abscisse 2 et d'ordonnée 1/2.

Exercice 11 : [énoncé]
Si f' ne s'annule pas alors f est strictement croissante donc injective. Elle ne s'annule alors qu'une fois.
Si f' ne s'annule qu'une fois alors le tableau de signe de f' est de la forme

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	

ou

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	

et le tableau de variation de f est

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f(x) & -1 & \searrow & f(\alpha) & \nearrow & +\infty \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f(x) & -1 & \nearrow & f(\alpha) & \nearrow & +\infty \end{array}$$

La fonction f ne peut donc s'annuler qu'une fois.

Exercice 12 : [énoncé]
Soit f solution. En dérivant la relation par rapport à x, on obtient :

$$f'(x+y) = f'(x)$$

La fonction f est donc de dérivée constante et par suite f est affine.
De plus la relation $f(0+0) = f(0) + f(0)$ entraîne $f(0) = 0$ et donc f est linéaire.
Inversement : ok.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent alors

$$\frac{1}{2h}\left(f(a+h) - f(a-h)\right) = \frac{1}{2h}\left(f(a+h) - f(a)\right) + \frac{1}{-2h}\left(f(a-h) - f(a)\right)$$

et donc

$$\frac{1}{2h}\left(f(a+h) - f(a-h)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}\left(f'_d(a) + f'_g(a)\right)$$

b) Pour $f(x) = \sqrt{|x|}$, la dérivée symétrique en 0 existe alors que la fonction n'y est pas dérivable ni à droite, ni à gauche.

Exercice 14 : [énoncé]
Quand $x \to a$,

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \frac{(x-a)f(a) + a(f(a) - f(x))}{x-a} \to f(a) - af'(a)$$

Exercice 15 : [énoncé]
On exploite la formule de Leibniz
a)

$$\left(x^2(1+x)^n\right)^{(n)} = \binom{n}{0} x^2\left((1+x)^n\right)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)'\left((1+x)^n\right)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)''\left((1+x)^n\right)^{(n-2)}$$

donc

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = n!x^2 + 2n.n!x(1+x) + n(n-1)\frac{n!}{2}(1+x)^2$$

b)

$$\left((x^2+1)\mathrm{e}^x\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+1)^{(k)}(\mathrm{e}^x)^{(n-k)} = \left(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1\right)\mathrm{e}^x$$

Exercice 16 : [énoncé]
En calculant les dérivées successives

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

on montre par récurrence

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

De même, mais en gérant de plus un signe

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Enfin

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}$$

Exercice 17 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

Or

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ et } \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}$$

Exercice 18 : [énoncé]
a) On a
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
donc on peut linéariser
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(3\cos x + \cos 3x\right)$$
On sait
$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2) \text{ et } (\cos 3x)^{(n)} = 3^n \cos(3x + n\pi/2)$$
et on obtient donc
$$(\cos^3 x)^{(n)} = \frac{1}{4}\left(3\cos(x+n\pi/2) + 3^n\cos(3x+n\pi/2)\right)$$

Exercice 19 : [énoncé]
On peut écrire
$$\cos(t)\mathrm{e}^t = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+i)t}\right)$$
et donc
$$(\cos(t)\mathrm{e}^t)^{(n)} = \left(\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(1+i)t})\right)^{(n)} = \mathrm{Re}\left((1+i)^n\mathrm{e}^{(1+i)t}\right)$$
Or $(1+i)^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{in\pi/4}$ puis
$$(\cos(t)\mathrm{e}^t)^{(n)} = 2^{n/2}\mathrm{e}^t\cos(t + n\pi/4)$$

Exercice 20 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
$$f^{(n+1)}(x) = \left(2^n\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)'$$
donc
$$f^{(n+1)}(x) = 2^n\left(\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}$$
puis
$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}$$
Récurrence établie.
On peut aussi écrire
$$f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin x = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(\sqrt{3}+i)x}\right)$$
et exploiter ceci pour calculer directement la dérivée d'ordre n.

Exercice 21 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
$$\left(x^n\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = \left(x.x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = x\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)}$$
donc
$$\left(x^n\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = x\left((-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}\right)' + (n+1)(-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}$$
ce qui donne
$$\left(x^n\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1}x^{-(n+2)}\mathrm{e}^{1/x}$$
Récurrence établie.

Exercice 22 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \cos(f(x))\sin(f(x)+\pi/2) = \cos^2\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$
Supposons la propriété vérifiée au rang $n \geqslant 1$
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{1+x^2}\begin{bmatrix} -\sin(f(x))\sin\left(nf(x)+n\pi/2\right) \\ +\cos\left(nf(x)+n\pi/2\right)\cos(f(x))\end{bmatrix}\cos^{n-1}(f(x))$$
Or
$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2(f(x))$$
donc
$$f^{(n+1)}(x) = n!\begin{bmatrix}\sin(f(x))\cos\left(nf(x)+(n+1)\pi/2\right) \\ +\sin\left(nf(x)+(n+1)\pi/2\right)\cos(f(x))\end{bmatrix}\cos^{n+1}(f(x))$$

puis
$$f^{(n+1)}(x) = n!\sin\left((n+1)f(x) + (n+1)\pi/2\right)\cos^{n+1}(f(x))$$

Récurrence établie.
b) Puisque $\arctan x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, $\cos(f(x)) \neq 0$.
Par suite
$$f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(nf(x) + n\pi/2) = 0$$

et donc
$$f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

Au final, les racines de $f^{(n)}$ sont les
$$\cot\frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

Exercice 23 : [énoncé]
D'une part
$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

D'autre part
$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = (x^n \times x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}(x^n)^{(n-k)}$$

et donc
$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}x^n = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 x^n$$

On en déduit
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$$

Exercice 24 : [énoncé]
Si f est T-périodique avec $T > 0$ alors en appliquant le théorème de Rolle entre par exemple 0 et T, la dérivée de f s'annule.

Exercice 25 : [énoncé]
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$$

φ est dérivable et $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

Exercice 26 : [énoncé]
f admet un maximum sur $[a,b]$ qui ne peut être ni en a, ni en b : la dérivée de f s'y annule.

Exercice 27 : [énoncé]
a) Notons $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ les $n+1$ points où nous savons que f s'annule.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a_{i-1}, a_i]$.
En effet f est continue sur $[a_{i-1}, a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}, a_i[$ et $f(a_{i-1}) = 0 = f(a_i)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $b_i \in]a_{i-1}, a_i[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
Puisque $b_1 < a_1 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_n$, les $b_1, \dots, b_n$ sont deux à deux distincts.
Ainsi f' s'annule au moins n fois.
De même, f'' s'annule au moins $n-1$ fois et ainsi de suite jusqu'à $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
b) Considérons $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$. g s'annule $n+1$ fois donc g' s'annule au moins n fois.
Or $g'(x) = (f'(x) + \alpha f(x))\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ donc les annulations de g' sont les annulations de $f' + \alpha f$.
Puisque $f' + \alpha f$ s'annule n fois, la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois.

Exercice 28 : [énoncé]
a) $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ donc $\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ est de degré n.
b) Introduisons $g : x \mapsto (x^2-1)^n$ de sorte que $f = g^{(n)}$
Quand $x \to 1$On a
$$g(x) = (x+1)^n(x-1)^n = 2^n(x-1)^n + o\left((x-1)^n\right)$$

Par la formule de Taylor-Young, on a parallèlement
$$g(x) = \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + o\left((x-1)^n\right)$$

donc
$$f(1) = g^{(n)}(1) = 2^n n!$$
et de manière similaire
$$f(-1) = (-1)^n 2^n n!$$
c) 1 et -1 sont racines de multiplicité n de $g : x \mapsto (x^2-1)^n$, 1 et -1 sont donc racines de $g, g', \dots, g^{(n-1)}$.
En appliquant le théorème de Rolle, on montre que $g', g'', \dots, g^{(n)} = f$ admettent resp. $1, 2, \dots, n$ racines dans $]-1,1[$. Puisque f est de degré n, celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.

Exercice 29 : [énoncé]
Considérons
$$g : x \mapsto (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{1}{2}(a-b)(b-x)(x-a)K$$
où la constante K est choisie de sorte que $g(c) = 0$ (ce qui est possible).
La fonction g s'annule en a, en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d \in I$ tel que $g''(d) = 0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 30 : [énoncé]
En appliquant le théorème de Rolle à f entre a et b : il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à f' entre a et c_1 : il existe $c_2 \in]a,c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.
...
En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n-1)}$ entre a et c_{n-1} : il existe $c_n \in]a,c_{n-1}[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.
$c = c_n$ résout le problème.

Exercice 31 : [énoncé]
Puisque $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que
$$f(a) > f(0) + 1 \text{ et } f(b) > f(0) + 1$$
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et 0, d'une part, et 0 et b d'autre part, il existe $\alpha \in]a,0[$ et $\beta \in]0,b[$ tels que $f(\alpha) = f(0) + 1 = f(\beta)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et β, il existe $c \in]\alpha,\beta[\subset \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 32 : [énoncé]
Si f est constante, la propriété est immédiate.
Sinon, il existe $x_0 \in]0,+\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$.
Posons $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$ qui est une valeur intermédiaire à $f(0)$ et $f(x_0)$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0,x_0[$ tel que $f(a) = y$.
Puisque $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$, y est une valeur intermédiaire à $f(x_0)$ et une valeur $f(x_1)$ avec x_1 suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in]x_0,x_1]$ tel que $f(b) = y$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a,b]$, on peut alors conclure.

Exercice 33 : [énoncé]
Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.
Puisque $f'(a) < 0$, il existe $b \in]0,a[$ tel que $f(b) > f(a)$.
En appliquant le théorème de valeurs intermédiaires entre 0 et b, il existe $\alpha \in]0,b[$ tel que $f(\alpha) = f(a)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et a, on obtient $c \in]\alpha,a[\subset]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 34 : [énoncé]
a) La fonction $g : x \mapsto f(x)/x$ est définie, continue et dérivable sur $]0,a]$.
Quand $x \to 0$,
$$g(x) \to f'(0) = 0$$
Prolongeons g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
Puisque g est continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et puisque $g(0) = g(a)$, le théorème de Rolle assure l'annulation de la dérivée de g en un point $c \in]0,a[$.
b)
$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$
donc $g'(c) = 0$ donne $cf'(c) = f(c)$.
La tangente à f en c a pour équation :
$$y = f'(c)(x-c) + f(c) = f'(c)x$$
Elle passe par l'origine.

Exercice 35 : [énoncé]
a) Si $g(a) = g(b)$ alors on peut appliquer le théorème de Rolle et contredire l'hypothèse
$$\forall x \in [a,b], g'(x) \neq 0$$

b) Soit
$$h : x \mapsto g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$
h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$,
$$h(a) = g(a)f(b) - g(b)f(a) = h(b)$$
En vertu du théorème de Rolle, la dérivée de h s'annule et cela résout le problème posé.

Exercice 36 : [énoncé]
Puisque $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(x_1) > 0$.
En effet, si pour tout $x_1 \in]a, b[$, $f(x_1) \leqslant 0$ alors quand $h \to 0^+$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leqslant 0$ et donc $f'(a) \leqslant 0$.
De même, puisque $f(b) = 0$ et $f'(b) > 0$, il existe $x_2 \in]a, b[$ tel que $f(x_2) < 0$.
Puisque f prend une valeur positive et une valeur négative dans $]a, b[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'y annule.
Ainsi il existe $c_2 \in]a, b[$ tel que $f(c_2) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a, c_2]$ et $[c_2, b]$, on obtient c_1 et c_3.

Exercice 37 : [énoncé]
Introduisons $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\,\mathrm{e}^x$.
La fonction φ est définie et continue sur $[a, b]$, φ est dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$.
Par le théorème de Rolle, on peut affirmer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0$$
Or
$$\varphi'(x) = (f(x) - f''(x))\,\mathrm{e}^x$$
donc $\varphi'(c) = 0$ donne
$$f(c) = f''(c)$$

Exercice 38 : [énoncé]
($\Leftarrow$) En vertu de l'inégalité des accroissements finis.
($\Rightarrow$) Si f est k lipschitzienne alors $\forall x, y \in I$ tels que $x \neq y$ on a $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant k$.
A la limite quand $y \to x$ on obtient $|f'(x)| \leqslant k$. Par suite f' est bornée.

Exercice 39 : [énoncé]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$g(x) = f(x) - f(-x)$$
g est dérivable et $g(0) = 0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que
$$g(x) - g(0) = xg'(c)$$
ce qui résout notre problème.

Exercice 40 : [énoncé]
La fonctionφ proposée est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a + h]$.
$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = \varphi(a + h) - \varphi(a)$$
Par le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre a et $a + h$, il existe$b \in]a, a + h[$ tel que
$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = h\varphi'(b) = h(f'(b + h) - f'(b))$$
Par le théorème des accroissements finis appliqué à f' entre b et $b + h$, il existe $c \in]b, b + h[\in]a, a + 2h[$ tel que
$$f'(b + h) - f'(b) = hf''(c) \text{ puis } f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

Exercice 41 : [énoncé]
Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{1/x}$ entre x et $x + 1$:
il existe $c_x \in]x, x + 1[$ tel que
$$(x + 1)\mathrm{e}^{1/(x+1)} - x\mathrm{e}^{1/x} = \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}(x + 1 - x) = \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}$$
Quand $x \to +\infty$, $c_x \to +\infty$ car $c_x \geqslant x$.
Par suite
$$\left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}} \to 1$$
et donc
$$\lim_{x \to +\infty} \left((x + 1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = 1$$

Exercice 42 : [énoncé]
En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/x}$ entre n et $n+1$, on obtient
$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1-\ln c}{c^2} c^{1/c}$$
avec $c \in \left]n, n+1\right[$.
Puisque $c \sim n \to +\infty$, $\ln c \sim \ln n$ et puisque $c^{1/c} \to 1$
$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 43 : [énoncé]
On applique le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln x$ entre x et $x+1$.
Il existe $c \in \left]x, x+1\right[$ tel que
$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{c}$$
Or $x < c < x+1$ donne
$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$
puis l'encadrement voulu.
$$\sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln p \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \ln p - \ln(p-1)$$
donne
$$\ln \frac{kn+1}{n+1} \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leqslant \ln k$$
Par le théorème des gendarmes
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \ln k$$

Exercice 44 : [énoncé]
Nous allons montrer $\ell' = 0$ en raisonnant par l'absurde.
Supposons $\ell' > 0$.
Il existe $\alpha > 0$ tel qu'au voisinage de 0
$$xf'(x) \geqslant \alpha$$
Pour x et $2x$ dans ce voisinage, on peut écrire en vertu du théorème des accroissements finis
$$f(2x) - f(x) = xf'(c)$$
avec c compris entre x et $2x$.
Puisque $cf'(c) \geqslant \alpha$, on obtient
$$f(2x) - f(x) \geqslant x\frac{\alpha}{c} \geqslant \frac{\alpha}{2}$$
Or quand $x \to 0^+$
$$f(2x) - f(x) \to \ell - \ell = 0$$
C'est absurde.
De même, supposer $\ell' < 0$ est absurde.

Exercice 45 : [énoncé]
a) Posons $M \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que $|f''(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) de terme général
$$x_n = n\frac{\varepsilon}{M}$$
diverge vers $+\infty$ et donc
$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \to 0$$
Par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$
$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M}$$
Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in \left]x_n, x_{n+1}\right[$ tel que
$$|f'(c_n)| (x_{n+1} - x_n) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M}$$
ce qui donne
$$|f'(c_n)| \leqslant \varepsilon$$
Puisque f'' est bornée par M, la fonction f' est M-lipschitzienne et donc
$$\forall u \in [x_n, x_{n+1}], |f'(u) - f'(c_n)| \leqslant M|u - c_n| \leqslant \varepsilon$$
puis
$$\forall u \in [x_n, x_{n+1}], |f'(u))| \leqslant \varepsilon + |f'(c_n)| \leqslant 2\varepsilon$$

et, puisque ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $A = x_N$,

$$\forall u \geqslant A, |f'(u)| \leqslant 2\varepsilon$$

On peut conclure que f' converge vers 0 en $+\infty$.
b) Posons

$$f(t) = \frac{\cos(t^2)}{t+1}$$

On vérifie aisément que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et converge en $+\infty$ sans que f' converge en 0.

Exercice 46 : [énoncé]
a) La fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc bornée. En introduisant

$$M = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$$

l'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$$

b) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ höldérienne d'exposant $\alpha > 1$. Pour $x \in I$

$$\left|\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)\right| \leqslant M|h|^{\alpha-1} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

La fonction f est donc dérivable et sa dérivée est nulle. C'est donc une fonction constante.
c) Par l'absurde, supposons f höldérienne d'exposant 1. Il existe alors $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x, y \in \left]0,1\right], |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$$

Pour $y = 2x$, on obtient

$$\forall x \in \left]0,1/2\right], |x\ln x + 2x\ln 2| \leqslant Mx$$

puis

$$\forall x \in \left]0,1/2\right], |\ln x + 2\ln 2| \leqslant M$$

Quand $x \to 0^+$, on obtient une absurdité.
d) Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$ et $x, y > 0$. Quitte à échanger, on peut supposer $x < y$. On peut écrire

$$y\ln y - x\ln x = (y-x)\ln y + x\ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right)$$

Or, on sait $\ln(1+u) \leqslant u$ pour tout $u > -1$ donc

$$|y\ln y - x\ln x| \leqslant (y-x)(|\ln y| + 1)$$

puis

$$\frac{|y\ln y - x\ln x|}{|y-x|^\alpha} = (y-x)^{1-\alpha}(1 + |\ln y|)$$

Puisque $0 < y - x \leqslant y$ et $1 - \alpha \geqslant 0$, on obtient encore

$$\frac{|y\ln y - x\ln x|}{|y-x|^\alpha} = y^{1-\alpha}(1 + |\ln y|)$$

Considérons maintenant la fonction

$$y \mapsto y^{1-\alpha}(1 + |\ln y|)$$

Cette fonction est continue sur $\left]0,1\right]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 car $1 - \alpha > 0$. Cette fonction est donc bornée et l'on peut introduire $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall y \in \left]0,1\right], y^{1-\alpha}(1 + |\ln y|) \leqslant M$$

On obtient alors

$$\forall x, y \in \left]0,1\right], |f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|^\alpha$$

Exercice 47 : [énoncé]
a) Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1,+\infty\right[$.

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

Le tableau des variations de f est alors

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f est positive.
Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - x/(1+x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1,+\infty\right[$.

$$g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Le tableau des variations de g est alors

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que g est positive.
b) Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$f'''(x) = \mathrm{e}^x \geqslant 0$$

On obtient les variations suivantes

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f est positive.

Exercice 48 : [énoncé]
a) Etudions la fonction $\delta : t \mapsto 1 + t^p - (1+t)^p$ définie continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
On a $\delta(0) = 0$ et pour $t > 0$,

$$\delta'(t) = p\left(t^{p-1} - (1+t)^{p-1}\right)$$

Puisque $p - 1 \leqslant 0$, $t^{p-1} \geqslant (1+t)^{p-1}$ et donc $\delta'(t) \geqslant 0$. On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $\delta(t) \geqslant 0$ puis l'inégalité demandée.
b) Pour $x = 0$, l'inégalité est immédiate et pour $x > 0$,

$$(x+y)^p = x^p\left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \leqslant x^p\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = x^p + y^p$$

Exercice 49 : [énoncé]
f' est continue sur le segment $[a, b]$ elle y est donc bornée par un certain M.
Par l'inégalité des accroissements finis, f est M lipschitzienne.

Exercice 50 : [énoncé]
La dérivée de f est continue et périodique donc bornée par son max sur une période (qui existe par continuité sur un segment). Par l'inégalité des accroissements finis, il en découle que f est lipschitzienne.

Exercice 51 : [énoncé]
f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x\ln x + x$.
Quand $x \to 0^+$, $f'(x) \to 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
De plus, f' est continue en 0 et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 52 : [énoncé]
Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, la fonction considérée est continue.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
f_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Pour $x \neq 0$, $f'_{n+1}(x) = (n+2)f_n(x)$.
Quand $x \to 0$, $f'_{n+1}(x) \to 0 = (n+2)f_n(0)$ donc f_{n+1} est dérivable en 0 et $f'_{n+1}(0) = 0$.
Ainsi f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_{n+1} = (n+2)f_n$.
Par hypothèse de récurrence, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Récurrence établie.

Exercice 53 : [énoncé]
Posons $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\sqrt{t})$$

Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\forall x > 0, g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

g est continue et

$$g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t}) - f'(0)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

donc g est dérivable et g' est continue en 0.
Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$.