# Dérivation et intégration des fonctions vectorielles

## Dérivation

**Exercice 1** [ 00564 ] [correction]
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en 0. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que $f$ est linéaire

**Exercice 2** [ 00565 ] [correction]
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathcal{C}^1([a, b[\,, E)$.
Montrer que $f$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à $[a, b]$ si, et seulement si, $f'$ admet une limite en $b$.

**Exercice 3** [ 00566 ] [correction]
Pour tout réel $x$, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

a) Montrer que $D_n$ est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$.
b) En déduire l'expression de $D_n(x)$.

**Exercice 4** [ 00568 ] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Etablir que pour tout $t \neq 0$,

$$\left(t^{n-1} f(1/t)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} f^{(n)}(1/t)$$

**Exercice 5** [ 00569 ] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to E$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0) = 0$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(k/n^2\right)$$

## Formules de Taylor

**Exercice 6** [ 00567 ] [correction]
a) Montrer que pour tout $0 \leqslant p < n$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n = (-1)^n n!$$

b) En déduire, pour $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$, la limite quand $h \to 0$ de

$$\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(kh)$$

**Exercice 7** [ 01732 ] [correction]
Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f$ et $f''$ soient bornées.
Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que

$$\|f'\|_\infty^2 \leqslant 4 \|f\|_\infty \|f''\|_\infty$$

**Exercice 8** [ 00570 ] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ et } \|f(1)\| = 1$$

Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f''\|_\infty \geqslant 4$.

**Exercice 9** [ 00571 ] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f$ et $f''$ soient bornées. On pose

$$M_0 = \|f\|_\infty \text{ et } M_2 = \|f''\|_\infty$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Etablir que pour tout $h > 0$ :

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

b) En déduire

$$M_1 = \|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$$

# Arcs paramétrés

**Exercice 10** [ 03964 ] [correction]
Soit $t \mapsto f(t)$ une fonction vectorielle dérivable définissant un arc paramétré régulier du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.
On suppose $t \mapsto \|f(t)\|$ constante. Montrer que pour tout $t$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

**Exercice 11** [ 00579 ] [correction]
Etudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

**Exercice 12** [ 03965 ] [correction]

a) Etudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

b) On note $A$ et $B$ les points d'intersection des axes $(Ox)$ et $(Oy)$ avec la tangente au point de paramètre $t \neq 0 \quad [\pi/2]$ de la courbe précédente. Calculer la distance $A(t)B(t)$.

**Exercice 13** [ 03966 ] [correction]
[Cycloïde]
Etudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

**Exercice 14** [ 03967 ] [correction]
a) Etudier la courbe définie par

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = 1/\operatorname{ch} t \end{cases}$$

b) On note $A$ le point d'intersection de l'axe $(Ox)$ avec la tangente au point $M$ de paramètre $t$ de la courbe ci-dessus. Calculer la distance $AM$.

**Exercice 15** [ 00585 ] [correction]
[Lemniscate de Bernoulli]
a) Etudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \\ y = \dfrac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \end{cases}$$

b) On introduit les points

$$F(1/\sqrt{2}, 0) \text{ et } F'(-1/\sqrt{2}, 0)$$

Montrer que pour tout point $M$ de la courbe ci-dessus

$$MF \times MF' = \frac{1}{2}$$

**Exercice 16** [ 03969 ] [correction]
Soient $a, b > 0$ avec $a > b$
a) Montrer que

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

définit un paramétrage de la courbe d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Exploiter le paramétrage pour donner l'allure de cette courbe.
c) On pose $c > 0$ tel que $a^2 = b^2 + c^2$ et l'on introduit les points $F$ et $F'$ de l'axe des abscisses déterminés par

$$OF = OF' = c$$

Vérifier que pour tout point $M$ de la courbe étudiée on a

$$MF + MF' = 2a$$

**Exercice 17** [ 03968 ] [correction]
[Cardioïde]
Etudier la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t + \sin 2t \end{cases}$$

**Exercice 18** [ 03970 ] [correction]
Soit $t \mapsto f(t)$ définissant un arc régulier tel qu'en tout point de paramètre $t$ la tangente soit

$$D_t : (t^3 + 3t)x - 2y = t^3$$

Réaliser un paramétrage en coordonnées cartésiennes de l'arc étudié et le représenter.

**Exercice 19** [ 03971 ] [correction]
a) Etudier la courbe

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$$

b) Donner une équation de la tangente et de la normale en le point $M$ de paramètre $t$ .
c) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.

**Exercice 20** [ 03972 ] [correction]
a) Etudier et représenter la courbe définie par

$$\begin{cases} x = 4t^3 \\ y = 3t^4 \end{cases}$$

b) Former une équation de la tangente au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.
c) Déterminer un paramétrage du lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la courbe précédente orthogonales et figurer cette courbe.

**Exercice 21** [ 04077 ] [correction]
Soit $D$ le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ du plan $\mathbb{R}^2$.
Montrer que les vecteurs tangents à $D$ aux points du cercle limite sont orthogonaux au vecteur rayon.

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
Notons que $f(2\times 0) = 2\times f(0)$ implique $f(0) = 0$.
On a
$$f(x) = f(2\times x/2) = 2f(x/2)$$
Par récurrence
$$f(x) = 2^n f(x/2^n)$$
Donc
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} \to f'(0)$$
puis
$$f(x) = f'(0)x$$

**Exercice 2 :** [énoncé]
Un tel résultat est déjà connu pour les fonctions à valeurs réelles par application du théorème des accroissements finis. En raisonnant via parties réelles et imaginaires on peut étendre ce résultat au cas d'une fonction complexe. En raisonnant via les fonctions coordonnées dans une base de $E$, on prolonge ce résultat aux fonctions à valeurs dans $E$.

**Exercice 3 :** [énoncé]
a) Notons $A(x) = (a_{i,j}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont $D_n(x)$ est le déterminant.
La fonction $x \mapsto A(x)$ est dérivable car ses fonctions coordonnées le sont et par multilinéarité du déterminant, la fonction $D_n$ est dérivable avec
$$D_n' = \det(C_1', C_2, \dots, C_n) + \det(C_1, C_2', \dots, C_n) + \dots + \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$$
et donc
$$D_n' = \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$$
En développant par rapport à la dernière colonne ce dernier déterminant, on obtient :
$$D_n'(x) = D_{n-1}(x)$$
b) Sachant $D_n(0) = 0$ et $D_1(x) = x$ on peut conclure, par récurrence,
$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

**Exercice 4 :** [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ via :
$$\left(t^n f(1/t)\right)^{(n+1)} = \left(t\times t^{n-1} f(1/t)\right)^{(n+1)} = t\times\left(\left(t^{n-1}f(1/t)\right)^{(n)}\right)' + (n+1)\left(t^{n-1}f(1/t)\right)^{(n)}$$
en vertu de la formule de Leibniz, puis
$$\left(t^n f(1/t)\right)^{(n+1)} = t\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{t^{n+2}}f^{(n)}(1/t) + t\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\frac{-1}{t^2}f^{(n+1)}(1/t) + (n+1)\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}f^{(n)}(1/t)$$
et la formule attendue après simplification.

**Exercice 5 :** [énoncé]
Par la dérivabilité à droite de $f$ en 0, on peut écrire
$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + x\varepsilon(x)$$
avec $\varepsilon \underset{0^+}{\to} 0$.
Puisque $f(0) = 0$, on obtient
$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k.f'(0) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k.\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$
En exploitant
$$\left\|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right\| \leqslant \max_{]0,1/n]}\|\varepsilon\|$$
et
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$
on obtient
$$\left\|S_n - \frac{n+1}{2n}f'(0)\right\| \leqslant \frac{n+1}{2n}\max_{]0,1/n]}\|\varepsilon\|$$
Or $\varepsilon \underset{0^+}{\to} 0$ donc $\max_{]0,1/n]}\|\varepsilon\| \to 0$ puis
$$S_n \to \frac{1}{2}f'(0)$$

**Exercice 6 :** [énoncé]
a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ et $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = -1$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.
Pour $0 \leqslant p < n+1$.
Si $p = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^p = (1-1)^{n+1} = 0$.
Si $0 < p < n+1$ alors $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^p = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}k^{p-1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(k+1)^{p-1} = 0$ après développement du $(k+1)^{p-1}$.
Si $p = n+1$ alors
$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}k^{n+1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(k+1)^n = (-1)^{n+1}(n+1)!$.
Récurrence établie.
b) Par Taylor Young : $f(x) = \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + o(x^n)$ donc
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(kh) = \sum_{p=0}^{n}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p + o(h^n) \to (-1)^n f^{(n)}(0)$.

**Exercice 7 :** [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

donc

$$h|f'(x)| \leqslant |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$$

puis

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}$$

Si $f$ ou $f''$ est la fonction nulle, on peut conclure. Sinon, pour $h = 2\sqrt{\|f\|_\infty/\|f''\|_\infty} > 0$, on obtient

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$$

et l'on peut à nouveau conclure.

**Exercice 8 :** [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\left\|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - \frac{1}{2}f'(0)\right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_\infty$$

et

$$\left\|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) + \frac{1}{2}f'(1)\right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_\infty$$

On en déduit

$$\left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_\infty \text{ et } \left|\left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| - \|f(1)\|\right| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_\infty$$

donc

$$1 = \|f(1)\| \leqslant \|f(1)\| - \left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| + \left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| \leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_\infty$$

puis $\|f''\|_\infty \geqslant 4$.

**Exercice 9 :** [énoncé]
a) Par l'inégalité de Taylor Lagrange

$$\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$$

donc

$$h\|f'(x)\| \leqslant \|f(x+h)\| + \|f(x)\| + \frac{h^2}{2}M_2$$

puis

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

b) La fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ atteint son minimum en $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$ et celui-ci vaut : $2\sqrt{M_0M_2}$. On en déduit

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$$

Remarquons, qu'il est possible de proposer une meilleure majoration en exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $x$ et $x+h$ d'une part et $x$ et $x-h$ d'autre part. On parvient alors à $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

**Exercice 10 :** [énoncé]
Il y a constance de l'application

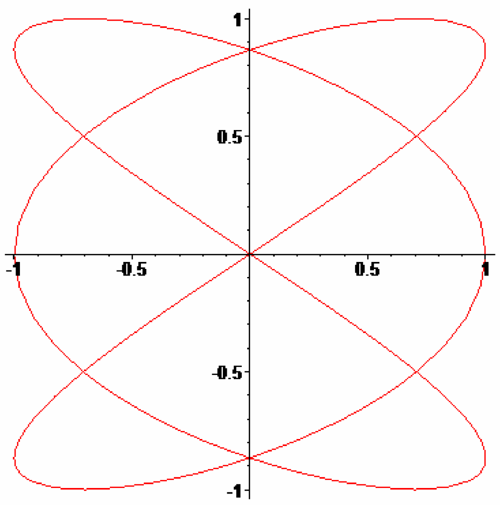
$$t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle$$

Sa dérivée est donc nulle ce qui donne

$$\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$$

**Exercice 11 :** [énoncé]
L'application $t \mapsto M(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$M(t + 2\pi) = M(t)$.
$M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe $(Ox)$.
$M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport au point $O$.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi/2]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries de centre $O$ et d'axe $(Ox)$.
Tableau des variations simultanées

| $t$ | $0$ | | $\pi/4$ | | $\pi/3$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $3$ |
| $x(t)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1/\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\sqrt{3}/2$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $-2$ |
| $m(t)$ | $\infty$ | | $0$ | | $\infty$ | | $-2/3$ |




La courbe paramétrée $x = \cos 3t, y = \sin 2t$

Il y a deux points doubles. Pour des raisons de symétrie, ceux-ci correspondent à une abscisse nulle. On obtient un point double pour $t = \pi/6$ et $t' = 7\pi/6$ de coordonnées $(0, \sqrt{3}/2)$. Par symétrie, l'autre point double est de coordonnées $(0, -\sqrt{3}/2)$.

**Exercice 12 :** [énoncé]
a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t + 2\pi) = f(t)$ sont confondus.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe $(Ox)$
$f(\pi - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe $(Oy)$
$f(\pi/2 - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi/4]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries d'axe $\Delta$, $(Oy)$ puis $(Ox)$.
Tableau des variations simultanées

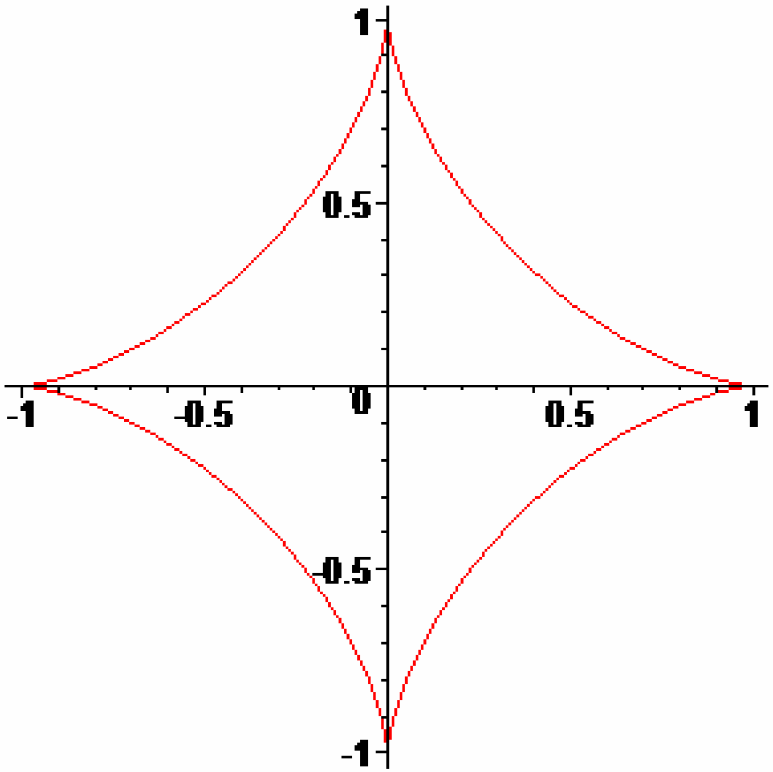
$$\begin{cases} x'(t) = -3 \sin t \cos^2 t \\ y'(t) = 3 \cos t \sin^2 t \end{cases}$$

| $t$ | $0$ | | $\pi/4$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $-$ | $-3/\sqrt{8}$ |
| $x(t)$ | $1$ | $\searrow$ | $2^{-3/2}$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2^{-3/2}$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | $3/\sqrt{8}$ |
| $m(t)$ | ? | $-$ | $-1$ |

Etude en $t = 0$, le paramètre n'est pas régulier. Cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^3}{-3/2t^2} \to 0$$

La tangente est donc dirigée par l'axe des abscisses.




L'astroïde b) L'équation de la tangente au point de paramètre $t$ est

$$y = -\tan t(x - \cos^3 t) + \sin^3 t$$

On a $A(t)\left|\begin{array}{l}0\\ \sin t\end{array}\right.$ et $B(t)\left|\begin{array}{l}\cos(t)\\ 0\end{array}\right.$ et donc

$$A(t)B(t) = 1$$

**Exercice 13 :** [énoncé]
L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi)$ est l'image de $f(t)$ par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe $(Oy)$.

On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe $(Oy)$ et par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Tableau des variations simultanées

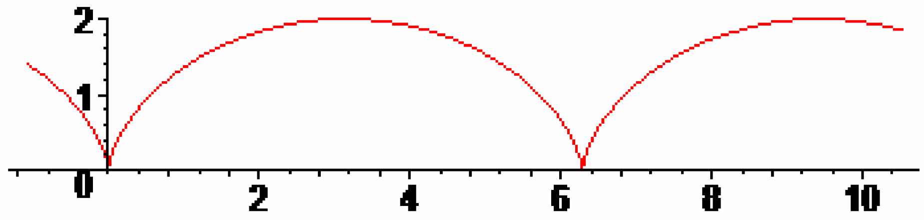
$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \cos(t) \\ y'(t) = \sin t \end{cases}$$

| $t$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | $2$ |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\pi$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ |

Le paramètre $t = 0$ n'est pas régulier. Cependant

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} \to +\infty$$

La courbe présente donc une tangente verticale en l'origine.




La cycloïde

**Exercice 14 :** [énoncé]
a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe $(Oy)$.
On peut limiter l'étude à $[0,+\infty[$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe $(Oy)$.
Tableau des variations simultanées.

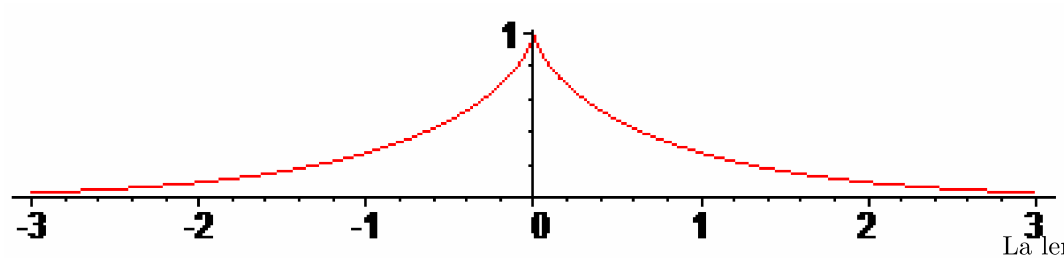
$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{th}^2 t \\ y'(t) = -\mathrm{sh} t/\mathrm{ch}^2 t \end{cases}$$

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $-$ | |
| $m(t)$ | $?$ | $-$ | |

Etude en $t=0$. Le paramètre n'est pas régulier, cependant

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-3}{2t} \to -\infty$$

La tangente en le point de paramètre $t=0$ est donc verticale.
Etude quand $t\to+\infty$.
$x(t)\to+\infty$ et $y(t)\to 0^+$
L'axe $(Ox)$ est asymptote, courbe au dessus




La tractrice b) Pour $t\neq 0$, l'équation de la tangente au point $M$ de paramètre $t$ est

$$y=-\frac{1}{\mathrm{sh} t}(x-t)$$

Les coordonnées du point $A$ sont

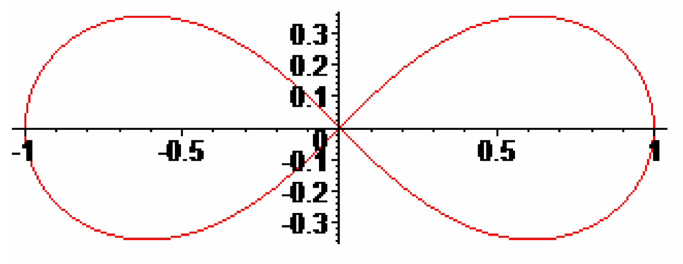
$$A\left|\begin{array}{l} t \\ 0 \end{array}\right.$$

et donc

$$AM^2=\mathrm{th}^2 t+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}=1$$

**Exercice 15 :** [énoncé]
a) L'application $t\mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi)$ et $f(t)$ sont confondus.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport au point $O$.
$f(\pi-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe $(Ox)$
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0,\pi/2]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe $(Ox)$ et la symétrie de centre $O$.
Tableau des variations simultanées
On pose $t_0=\arccos(1/\sqrt{3})$. On a $\cos t_0=1/\sqrt{3}$ et $\sin t_0=\sqrt{2/3}$.

| $t$ | $0$ | | $t_0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $1/2$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{3/8}$ | $\nearrow$ | $1$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/\sqrt{8}$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | $1/2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ |
| $m(t)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\infty$ |




La lemniscate de Bernoulli b) On a

$$MF^2=\frac{\sin^2}{(1+\cos^2 t)}+\frac{1}{2}-\sqrt{2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t} \text{ et } MF'^2=\frac{\sin^2}{(1+\cos^2 t)}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}$$

donc

$$MF^2MF'^2=\frac{1}{4}$$

**Exercice 16 :** [énoncé]
a) Posons $x(t)=a\cos t$ et $y(t)=b\sin t$ avec $t\in\mathbb{R}$. On vérifie

$$\frac{(x(t))^2}{a^2}+\frac{(y(t))^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

Ainsi, les points du paramétrage figurent sur la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Inversement, soit $M$ de coordonnées $(x,y)$ figurant sur la courbe précédente. Posons $\alpha = x/a$ et $\beta = y/b$. On a $\alpha^2+\beta^2 = 1$ et donc il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que

$$\alpha = \cos t \text{ et } \beta = \sin t$$

On a alors $(x,y) = (x(t), y(t))$ et le point $M$ figure donc sur la courbe paramétrée introduite.
b) Les fonctions $x$ et $y$ sont définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction de paramétrage $f : t\mapsto (x(t),y(t))$ est donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a

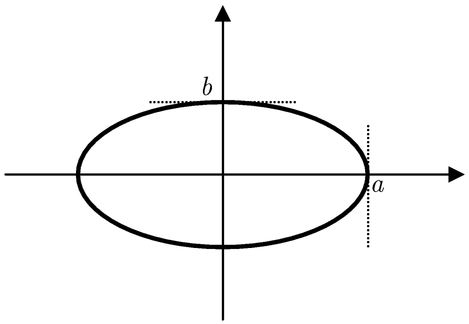
$$\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x(\pi-t) = -x(t) \\ y(\pi-t) = y(t) \end{cases}$$

On peut alors limiter l'étude à $[0,\pi/2]$ et compléter la courbe obtenue par les symétries d'axe $(Ox)$ et $(Oy)$.

$$\begin{cases} x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{cases}$$

| $t$ | $0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $-$ | |
| $x(t)$ | $a$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $b$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ |

En $t=0$, il y a une tangente verticale.
En $t=\pi$, il y a une tangente horizontale.




c) Quitte à échanger considérons $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$. Pour $M\,(a\cos t, b\sin t)$, on a

$$MF^2 = (a\cos t - c)^2 + b\sin t^2 = a^2\cos^2 t - 2ac\cos t + c^2 + b^2\sin^2 t$$

puis, en écrivant $a^2\cos^2 t = b^2\cos^2 t + c^2\cos^2 t$

$$MF^2 = c^2\cos^2 t - 2ac\cos t + a^2 = (a - c\cos t)^2$$

De même

$$MF'^2 = (a + c\cos t)^2$$

Enfin, puisque $a > c$

$$MF + MF' = |a - c\cos t| + |a + c\cos t| = 2a$$

**Exercice 17 :** [énoncé]
L'application $t\mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(t+2\pi)$ et $f(t)$ sont confondus.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe $(Ox)$.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe $(Ox)$.
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t \\ y'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t \end{cases}$$

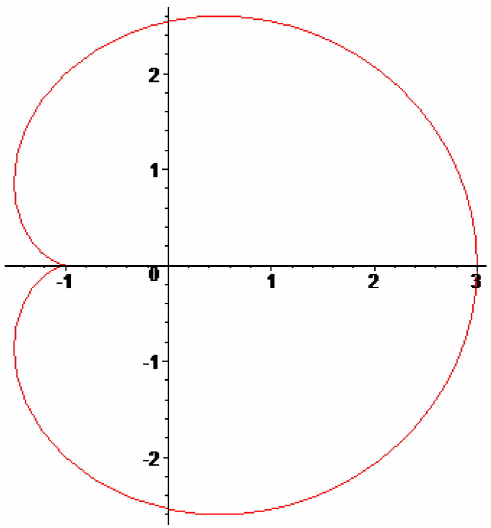
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, 2\pi/3, \pi \\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi/3, \pi \end{cases}$$

| $t$ | $0$ | | $\pi/3$ | | $2\pi/3$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $x(t)$ | $3$ | $\searrow$ | $1/2$ | $\searrow$ | $-3/2$ | $\nearrow$ | $-1$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $3\sqrt{3}/2$ | $\searrow$ | $\sqrt{3}/2$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $m(t)$ | $\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\infty$ | $-$ | $?$ |

Le point de paramètre $t=\pi$ est stationnaire. Cependant

$$\frac{y(t)-y(\pi)}{x(t)-x(\pi)} \underset{t\to\pi}{\sim} t-\pi \to 0$$

La courbe présente donc une tangente horizontale en $t=\pi$.




La cardioïde

**Exercice 18 :** [énoncé]
Posons avec et fonctions dérivables.
Le point de paramètre appartient à la droite donc (1) Le vecteur dirige la droite donc (2) En dérivant (1) et en exploitant (2) on obtient :
donc puis .
L'application correspondante est définie et de classe sur .
est le symétrique de par rapport à l'axe .
On peut limiter l'étude à l'intervalle . La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe
Tableau des variations simultanées
Etude en . Le point n'est pas régulier, cependant
Il y a donc une tangente horizontale en le point de paramètre
Etude quand
et
La droite est asymptote à la courbe et celle-ci est à gauche de la droite.
La courbe

**Exercice 19 :** [énoncé]
Notons $f(t)$ la fonction définissant ce paramétrage.

a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Les points désignés par $f(-t)$ et $f(t)$ sont symétriques par rapport à $(Ox)$.
Etude limitée à $[0, +\infty[$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe $(Ox)$

$$\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 6t^2 \end{cases}$$

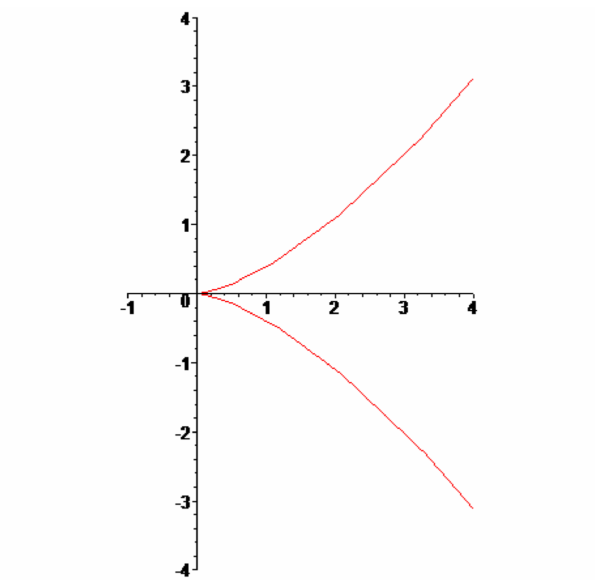
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \end{cases}$$

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | |

Etude en $t = 0$. Le point n'est pas régulier, cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

Il y a une tangente horizontale en $t = 0$



La courbe $x = 3t^2, y = 2t^3$

b) Pour $t \neq 0$, la tangente $\mathcal{D}_t$ en $M$ a pour équation

$$-t^2(x - 3t^2) + t(y - 2t^3) = 0$$

soit

$$tx - y = t^3$$

Pour $t \neq 0$, la normale $\mathcal{N}_t$ en $M$ a pour équation

$$t(x - 3t^2) - t^2(y - 2t^3) = 0$$

soit

$$tx - t^2 y = 3t^3 - 2t^5$$

Ces équations sont encore valables pour $t = 0$.
c) La tangente $\mathcal{D}_t$ est normale à la courbe au point $N$ de paramètre $\tau$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 3t\tau^2 - 2\tau^3 = t^3 \\ t\tau + t^2\tau^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui traduit $N \in \mathcal{D}_t$ et l'orthogonalité des tangentes en $M$ et $N$.
Si $t = 0$ alors $\tau = 0$ mais le couple $(0, 0)$ n'est pas solution.
Si $t \neq 0$ alors $\tau \neq 0$ et $\tau = -1/t$ puis $\frac{3}{t} + \frac{2}{t^3} = t^3$ d'où $(t^2 + 1)^2(t^2 - 2) = 0$ ce qui donne $t = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

**Exercice 20 :** [énoncé]
Notons $f(t)$ la fonction définissant ce paramétrage.
a) L'application $t \mapsto f(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à l'axe $(Oy)$.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, +\infty[$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe $(Oy)$.
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = 12t^2 \\ y'(t) = 12t^3 \end{cases}$$

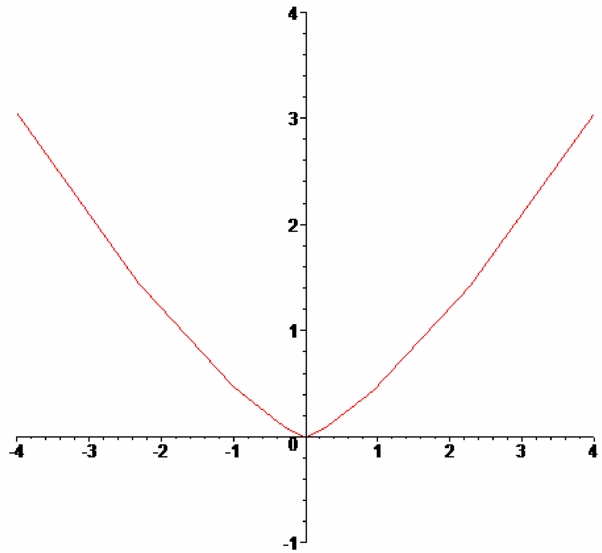
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \end{cases}$$

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | |

Etude en $t = 0$. Le point n'est pas régulier, cependant

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

Il y a une tangente horizontale




La courbe $x = 4t^3, y = 3t^2$

b) Pour $t \neq 0$, la tangente en $M$ a pour équation :

$$tx - y = t^4$$

En $t = 0$ : cette équation convient encore.
c) Les tangentes en $M$ et $N$ de paramètres $t$ et $\tau$ et $M(\tau)$ sont orthogonales si, et seulement si, $1 + t\tau = 0$
Si tel est le cas leur intersection est solution du système

$$\begin{cases} tx - y = t^4 \\ -\dfrac{1}{t}x - y = \dfrac{1}{t^4} \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} x = t^3 - t + \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^3} \\ y = -t^2 + 1 - \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Notons $g(t)$ la fonction définissant le paramétrage de la courbe ainsi obtenue, $t \in \mathbb{R}^\star$

$g(-t)$ est le symétrique de $g(t)$par rapport à l'axe $(Oy)$.

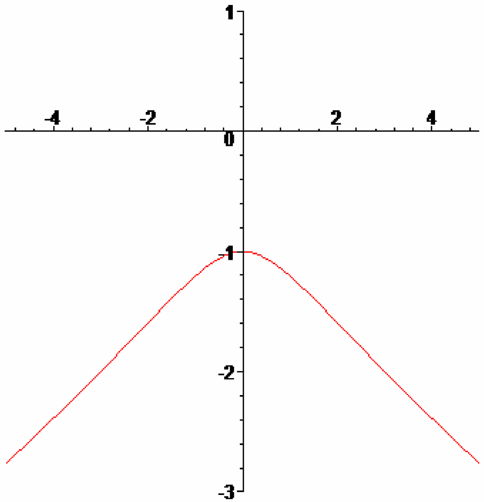
Les points $g(t)$ et $g(1/t)$ sont confondus.

On peut limiter l'étude à l'intervalle $]0, 1]$.

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 1 - \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{3}{t^4} = \dfrac{(1+t^2)(3t^4 - 4t^2 + 3)}{t^4} \\ y'(t) = -2t + \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{2(1-t^4)}{t^3} \end{cases}$$

Tableau des variations simultanées

| $t$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | $4$ |
| $x(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ |




La courbe des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales

**Exercice 21 :** [énoncé]

Soit $a$ un point du cercle limite de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$.

Soit $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to D$ une application dérivable en 0 avec $\gamma(0) = a$.

Puisque l'application $\gamma$ est à valeurs dans $D$, on a

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[\,, \|\gamma(t)\|^2 \leqslant R^2$$

Or $\|\gamma(0)\|^2 = R^2$ et donc l'application $t \mapsto \|\gamma(t)\|^2$ admet un maximum en $t = 0$. Son nombre dérivé y est alors nul ce qui fournit

$$2\,\langle \gamma'(0), \gamma(0)\rangle = 0$$

Ainsi, le vecteur tangent $v = \gamma'(0)$ est orthogonal au vecteur rayon $a = \gamma(0)$.