Espaces de dimension finie

Dimension d'un espace

Exercice 1 [01634] [correction]
Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x$$

a) Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
b) Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 2 [01635] [correction]
Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques i.e. l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n + p) = u(n)$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.

Exercice 3 [03848] [correction]
Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et E l'ensemble des suites complexes p périodiques i.e. l'ensemble des suites (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n + p) = u(n)$$

a) Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.
b) Déterminer une base de E formée de suites géométriques.

Exercice 4 [01636] [correction]
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.
a) Montrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
b) En déduire $\dim E$.

Exercice 5 [03638] [correction]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et δ une application à valeurs réelles définie sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. On suppose

$$\forall F, F' \text{ sous-espaces vectoriels de } E,\ F \cap F' = \{0_E\} \Rightarrow \delta(F + F') = \delta(F) + \delta(F')$$

Déterminer δ.

Bases en dimension finie

Exercice 6 [01637] [correction]
On pose $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 [01638] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose

$$\varepsilon_1 = e_2 + 2e_3,\ \varepsilon_2 = e_3 - e_1 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 + 2e_2$$

Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E

Exercice 8 [01639] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \text{ et } \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base de E.

Exercice 9 [01640] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$.
a) Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E.
b) Exprimer les composantes dans $\mathcal{B}'$ d'un vecteur en fonction de ses composantes dans $\mathcal{B}$.

Exercice 10 [03724] [correction]
[Lemme d'échange]
Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 11 [01641] [correction]
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

Exercice 12 [01642] [correction]
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs
$u = (1,0,1,0), v = (0,1,-1,0), w = (1,1,1,1), x = (0,0,1,0)$ et $y = (1,1,0,-1)$.
Soit $F = \text{Vect}(u,v,w)$ et $G = \text{Vect}(x,y)$.
Quelles sont les dimensions de $F, G, F+G$ et $F \cap G$?

Supplémentarité

Exercice 13 [01646] [correction]
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :
a) $F = \text{Vect}(u,v)$ où $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,1)$
b) $F = \text{Vect}(u,v,w)$ où $u = (-1,1,0), v = (2,0,1)$ et $w = (1,1,1)$
c) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\right\}$.

Exercice 14 [00182] [correction]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
a) Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer que ceux-ci possèdent un supplémentaire commun.
b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 15 [03409] [correction]
Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie qui sont de même dimension ont un supplémentaire commun.

Exercice 16 [00181] [correction]
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
a) On suppose $\dim F_1 = \dim F_2$. Montrer qu'il existe G sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.
b) On suppose que $\dim F_1 \leqslant \dim F_2$. Montrer qu'il existe G_1 et G_2 sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E$ et $G_2 \subset G_1$.

Exercice 17 [00184] [correction]
Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = \text{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on note

$$F_a = \text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_p + a)$$

a) Montrer que

$$F_a \oplus G = E$$

b) Soient $a, b \in G$. Montrer

$$a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b$$

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 18 [01650] [correction]
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$:
a) (x_1,x_2,x_3) avec $x_1 = (1,1,1,1), x_2 = (1,-1,1,-1)$ et $x_3 = (1,0,1,1)$.
b) (x_1,x_2,x_3,x_4) avec $x_1 = (1,1,0,1), x_2 = (1,-1,1,0), x_3 = (2,0,1,1)$ et $x_4 = (0,2,-1,1)$.

Exercice 19 [01651] [correction]
Dans $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$ on considère :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 20 [01652] [correction]
Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que pour $p \leqslant n$:

$$\text{rg}(x_1,\dots,x_p) \geqslant \text{rg}(x_1,\dots,x_n) + p - n$$

Hyperplans en dimension finie

Exercice 21 [01678] [correction]
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}$$

Soient $u = (1,2,1)$ et $v = (-1,1,1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u,v)$ forme une base de H.

Exercice 22 [01643] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2.
Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts.
Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 23 [01644] [correction]
Soient H un hyperplan et F un sous-espace vectoriel non inclus dans H.
Montrer

$$\dim F \cap H = \dim F - 1$$

Exercice 24 [01645] [correction]
Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de E.
Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?

Exercice 25 [01647] [correction]
Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que si $D \not\subset H$ alors D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 26 [01648] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, H un hyperplan de E et D une droite vectorielle de E.
A quelle condition H et D sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 27 [00175] [correction]
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.
Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $E = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_0(x) = \cos x$, $f_1(x) = x \cos x$ et $f_2(x) = x^2 \cos x$.
E est donc un sous-espace vectoriel et (f_0, f_1, f_2) en est une famille génératrice.
b) Supposons $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta x + \gamma x^2) \cos x = 0$.
Pour $x = 2n\pi$, on obtient $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $\gamma \neq 0$ alors $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma \to \pm\infty$. C'est exclu. Nécessairement $\gamma = 0$.
On a alors $\alpha + 2n\pi\beta = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, puis $n = 1$ on obtient successivement $\alpha = \beta = 0$.
Finalement (f_0, f_1, f_2) est une famille libre. C'est donc une base de E et $\dim E = 3$

Exercice 2 : [énoncé]
On vérifie aisément que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on note e_i la suite définie par

$$e_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \quad [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que les suites $e_0, \ldots, e_{p-1}$ sont linéairement indépendantes et on a

$$\forall u \in E, u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$$

La famille $(e_0, \ldots, e_{p-1})$ est donc une base de E et par suite $\dim E = p$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on note e_i la suite définie par

$$e_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \quad [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que les suites $e_0, \ldots, e_{p-1}$ sont linéairement indépendantes et on a

$$\forall u \in E, u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$$

La famille $(e_0, \ldots, e_{p-1})$ est donc une base de E et par suite $\dim E = p$.
b) Soit $q \in \mathbb{C}^\star$. La suite géométrique (q^n) est élément de E si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+p} = q^n$$

ce qui équivaut à affirmer que q est une racine p-ième de l'unité.
Considérons alors les suites $u_1, \ldots, u_p$ avec

$$u_j(n) = \left(\mathrm{e}^{2i\pi j/p}\right)^n = \omega_j^n \text{ avec } \omega_j = \mathrm{e}^{2i\pi j/p}$$

Les suites $u_1, \ldots, u_p$ sont éléments de E. Pour affirmer qu'elles constituent une base de E, il suffit de vérifier qu'elles forment une famille libre. Supposons

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a l'équation

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \omega_j^n = 0$$

Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$ fixé. En multipliant l'équation précédente par ω_k^{-n} et en sommant les équations obtenues pour $n = 0, 1, \ldots, p-1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left(\omega_j \omega_k^{-1}\right)^n = 0$$

En permutant les deux sommes

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{n=0}^{p-1} \left(\omega_j \omega_k^{-1}\right)^n = 0$$

Le nombre $\omega_j \omega_k^{-1}$ est une racine p-ième de l'unité et, lorsque $j \neq k$, celle-ci diffère de 1, de sorte que

$$\sum_{n=0}^{p-1} \left(\omega_j \omega_k^{-1}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ p & \text{si } j = k \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_p p \delta_{j,k} = 0$$

et donc $\lambda_k = 0$. Ceci valant pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, on peut conclure à la liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) Supposons $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = 0$.
Si $\lambda_n \neq 0$ alors $\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ c'est absurde.
Nécessairement $\lambda_n = 0$ puis de même $\lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_0 = 0$.
Finalement $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
b) Par suite $n + 1 \leqslant \dim E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\dim E = +\infty$

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $F = F' = \{0_E\}$, on obtient

$$\delta(\{0_E\}) = 0$$

Pour $x \neq 0_E$, posons $f(x) = \delta(\text{Vect}x)$.
On a évidemment

$$\forall x \neq 0_E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^\star, f(\lambda x) = f(x)$$

Soient x et y non colinéaires. On a

$$\text{Vect}(x) \oplus \text{Vect}(y) = \text{Vect}(x, y)$$

Or on a aussi

$$\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, x + y) = \text{Vect}(x) \oplus \text{Vect}(x + y)$$

car x et $x + y$ ne sont pas colinéaires. On en déduit

$$f(x) + f(y) = f(x) + f(x + y)$$

Ainsi $f(x + y) = f(x)$ et de façon analogue $f(x + y) = f(y)$ donc $f(x) = f(y)$.
Finalement la fonction f est constante. En posant α la valeur de cette constante, on peut affirmer

$$f = \alpha.\dim$$

car, par introduction d'une base, un sous-espace vectoriel peut s'écrire comme somme directe de droites vectorielles engendrées par ces vecteurs de base.

Exercice 6 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$.
On a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0_E$. On a

$$(\lambda_3 - \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)e_2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0_E$$

Or (e_1, e_2, e_3) est libre donc

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille ε est une famille libre formée de $3 = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

Exercice 8 : [énoncé]
Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires donc forme une famille libre.
Pour $\varepsilon_3 = e_2$ (ou encore par exemple $\varepsilon_3 = e_3$ mais surtout pas $\varepsilon_3 = e_1$), on montre que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre et donc une base de E.

Exercice 9 : [énoncé]
a) Supposons $\lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n = 0_E$. On a $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$ donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases}$$

qui donne $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
La famille ε est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.
b) $\lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ donne

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mu_1 \\ \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mu_2 \\ \vdots \\ \lambda_n = \mu_n \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} = \mu_{n-1} - \mu_n \\ \lambda_n = \mu_n \end{cases}$$

Exercice 10 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ liée pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$.
Puisque la sous-famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre, le vecteur e'_j est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$ et donc

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, e'_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

Cela entraîne

$$e_n \in E = \mathrm{Vect}(e'_1, \dots, e'_n) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

ce qui est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]
On sait

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

donc

$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G$$

or $\dim F + G \leqslant \dim E = n$ donc $\dim F \cap G > 0$.
Par suite $F \cap G$ possède un vecteur non nul.

Exercice 12 : [énoncé]
(u, v, w) forme une famille libre donc une base de F. Ainsi $\dim F = 3$.
(x, y) forme une famille libre donc une base de G. Ainsi $\dim G = 2$.
(u, v, w, x) forme une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi $F + G = E$ et $\dim F + G = 4$.
Enfin

$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G = 1$$

Exercice 13 : [énoncé]
a) (u, v) est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et (u, v) génératrice de F. C'est donc une base de F.
$D = \mathrm{Vect}(w)$ avec $w = (1, 0, 0)$ est un supplémentaire de F car la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) $w = u + v$ donc $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. (u, v) est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et (u, v) génératrice de F. C'est donc une base de F.
$D = \mathrm{Vect}(t)$ avec $t = (1, 0, 0)$ est un supplémentaire de F car la famille (u, v, t) est une base de $\mathbb{R}^3$.
c) $F = \{(2y - 3z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-3, 0, 1)$.
(u, v) est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et (u, v) génératrice de F. C'est donc une base de F.
$D = \mathrm{Vect}(w)$ avec $w = (1, 0, 0)$ est un supplémentaire de F car la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Si $H = H'$ alors n'importe quel supplémentaire de H est convenable et il en existe.
Sinon, on a $H \not\subset H'$ et $H' \not\subset H$ donc il existe $x \in H$ et $x' \in H'$ tels que $x \notin H'$ et $x' \notin H$.
On a alors $x + x' \notin H \cup H'$ et par suite $\mathrm{Vect}(x + x')$ est supplémentaire commun à H et H'.
b) Raisonnons par récurrence décroissante sur $n = \dim F = \dim G \in \{0, 1, \dots, \dim E\}$.
Si $n = \dim E$ et $n = \dim E - 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n + 1 \in \{1, \dots, \dim E\}$.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension n.
Si $F = G$ alors n'importe quel supplémentaire de F est convenable.
Sinon, on a $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ donc il existe $x \in F$ et $x' \in G$ tels que $x \notin G$ et $x' \notin F$.
On a alors $x + x' \notin F \cup G$.
Posons $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$.
Comme $\dim F' = \dim G' = n + 1$, par hypothèse de récurrence, F' et G' possède un supplémentaire commun H et par suite $H \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ est supplémentaire commun à F et G.
Récurrence établie.

Exercice 15 : [énoncé]
Notons F et G les sous-espaces vectoriels de même dimension d'un espace vectoriel E.

Raisonnons par récurrence décroissante sur
$n = \dim F = \dim G \in \{0, 1, \dots, \dim E\}$.
Si $n = \dim E$, l'espace nul est un supplémentaire commun.
Supposons la propriété établie au rang $n + 1 \in \{1, \dots, \dim E\}$.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension n.
Si $F = G$ alors n'importe quel supplémentaire de F est convenable.
Sinon, on a $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ donc il existe $x \in F$ et $x' \in G$ tels que $x \notin G$ et $x' \notin F$.
On a alors $x + x' \notin F \cup G$.
Posons $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$.
Comme $\dim F' = \dim G' = n + 1$, par hypothèse de récurrence, F' et G' possède un supplémentaire commun H et par suite $H \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ est supplémentaire commun à F et G.
Récurrence établie.

Exercice 16 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $p = \dim E - \dim F_1$.
Si $\dim E - \dim F_1 = 0$ alors $G = \{0_E\}$ convient.
Supposons la propriété établie au rang $p \geqslant 0$.
Soient F_1 et F_2 de même dimension tels que $\dim E - \dim F_1 = p + 1$.
Si $F_1 = F_2$ l'existence d'un supplémentaire à tout sous-espace vectoriel en dimension finie permet de conclure.
Sinon, on a $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$ ce qui assure l'existence de $x_1 \in F_1 \backslash F_2$ et de $x_2 \in F_2 \backslash F_1$.
Le vecteur $x = x_1 + x_2$ n'appartient ni à F_1, ni à F_2. On pose alors $F_1' = F_1 \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et $F_2' = F_2 \oplus \mathrm{Vect}(x)$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à F_1' et F_2' : on obtient l'existence d'un supplémentaire commun G' à F_1' et F_2'. $G = G' \oplus \mathrm{Vect}(x)$ est alors supplémentaire commun à F_1 et F_2.
Récurrence établie.
b) Soit F_1' un sous-espace vectoriel contenant F_1 et de même dimension que F_2. F_1' et F_2 possèdent un supplémentaire commun G. Considérons H un supplémentaire de F_1 dans F_1'. En posant $G_1 = H \oplus G$ et $G_2 = G$ on conclut.

Exercice 17 : [énoncé]
a) Soit $x \in F_a \cap G$, on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a)$$

Mais alors

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . a \in F \cap G = \{0_E\}$$

donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ puis $x = 0_E$.
Soit $x \in E$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . e_i \in F$ et $v \in G$.
On a alors

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a) + \left(v - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a \right) \in F_a + G$$

Ainsi $F_a \oplus G = E$.
b) Par contraposée :
Si $F_a = F_b$ alors on peut écrire

$$e_1 + a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + b)$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - e_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b - a \in F \cap G$$

donc $\lambda_1 = 1$ et $\forall 2 \leqslant i \leqslant p, \lambda_i = 0$.
La relation initiale donne alors $e_1 + a = e_1 + b$ puis $a = b$.

Exercice 18 : [énoncé]
a) (x_1, x_2, x_3) est libre donc $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3$.
b) Comme $x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = x_1 - x_2$, on a $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$.
Comme (x_1, x_2) est libre, on a $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{rg}(x_1, x_2) = 2$.

Exercice 19 : [énoncé]
On a

$$f_1(x) = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} = f_3(x) + f_4(x), f_2(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}} = f_3(x) - f_4(x)$$

donc

$$\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{rg}(f_3, f_4) = 2$$

car (f_3, f_4) est libre.

Exercice 20 : [énoncé]
$\text{Vect}(x_1,\dots,x_n) = \text{Vect}(x_1,\dots,x_p) + \text{Vect}(x_{p+1},\dots,x_n)$.
donc $\text{rg}(x_1,\dots,x_n) \leqslant \text{rg}(x_1,\dots,x_p) + \text{rg}(x_{p+1},\dots,x_n) \leqslant \text{rg}(x_1,\dots,x_p) + n - p$.

Exercice 21 : [énoncé]
$u, v \in H$ car ces vecteurs vérifient l'équation définissant H.
(u, v) est libre et $\dim H = 2$ car H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
On secoue, hop, hop, le résultat tombe.

Exercice 22 : [énoncé]
$H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient H_1 donc
$\dim H_1 + H_2 = n - 1$ ou n.
Si $\dim H_1 + H_2 = n - 1$ alors par inclusion et égalité des dimensions :
$H_2 = H_1 + H_2 = H_1$.
C'est exclu, il reste $\dim H_1 + H_2 = n$ et alors
$\dim H_1 \cap H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 + H_2 = n - 2$.

Exercice 23 : [énoncé]
On a $F \subset F + H \subset E$ et $F \not\subset H$ donc $F + H = E$ d'où $\dim F \cap H = \dim F - 1$ via le théorème des quatre dimensions.

Exercice 24 : [énoncé]
Posons $n = \dim E$ et $p = \dim F$. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de F que l'on complète en $(e_1,\dots,e_n)$ base de E. Posons $H_i = \text{Vect}(e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_n)$ où $\hat{e}_i$ signifie que le terme est absent de la liste. Par double inclusion
$F = H_{p+1} \cap \dots \cap H_n$.
On ne peut pas avoir moins d'hyperplans dans cette intersection puisque par récurrence on peut montrer que l'intersection de q hyperplans est de dimension supérieure à $n - q$.

Exercice 25 : [énoncé]
$D + H$ est un sous-espace vectoriel de E contenant H donc $\dim D + H = n - 1$ ou n.
Si $\dim D + H = n - 1$ alors par inclusion et égalité des dimensions $D + H = H$ or $D \subset D + H$ et $D \not\subset H$, ceci est donc exclu. Il reste $\dim D + H = n$ d'où $D + H = E$.
Puisque $D + H = E$ et $\dim D + \dim H = \dim E$, D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 26 : [énoncé]
Si $D \subset H$ alors H et D ne sont pas supplémentaires car

$$H \cap D = D \neq \{0_E\}$$

Supposons $D \not\subset H$.
Soit $x \in D \cap H$. Si $x \neq 0_E$ alors $D = \text{Vect}(x) \subset H$ ce qui est exclu.
Nécessairement $D \cap H = \{0_E\}$.
De plus $\dim H + \dim D = \dim E$ donc

$$H \oplus D = E$$

Exercice 27 : [énoncé]
Posons $n = \dim E$ et $p = \dim F$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de F que l'on complète en $(e_1,\dots,e_n)$ base de E.
Posons

$$H_i = \text{Vect}(e_1,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_n)$$

Par double inclusion, on montre

$$F = \bigcap_{i=p+1}^{n} H_i$$

On ne peut construire une intersection avoir moins d'hyperplans car on peut montrer par récurrence que l'intersection de q hyperplans est de dimension supérieure à $n - q$.
Ainsi, le nombre minimum d'hyperplans intersecté pour écrire F est de $n - p$.