Fonctions réelles

Limites

Exercice 1 [00227] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et on désire établir

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell$$

a) Pour $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$

$$\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t)-\ell)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

b) Conclure en écrivant

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \ell = \frac{1}{x}\int_0^A (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 [00228] [correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

en commençant par étudier le cas $\ell = 0$.

Exercice 3 [00230] [correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) + f'(t) = \ell \in \mathbb{R}$$

Montrer que

$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$$

Exercice 4 [02812] [correction]
Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1$$

Trouver un équivalent simple en 0 de f.

Continuité

Exercice 5 [00241] [correction]
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$.
a) On suppose que f est continue. Montrer que f admet un point fixe.
b) On suppose que f est croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6 [02813] [correction]
Soient f et g des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f\circ g = g\circ f$.
a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.
b) Montrer l'existence de $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 7 [00563] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels de $[0,1]$ de limite 1.
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}$$

Dérivation

Exercice 8 [00253] [correction]
Soit $f : x \mapsto \arctan x$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right)$$

En déduire les zéros de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 9 [02811] [correction]
Soient des réels a, b où $a \notin \{0, 1\}$. On pose $h(x) = ax + b$ pour tout x réel. On note S l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f \circ f = h$$

a) Montrer que $S = \emptyset$ si $a < 0$.
Désormais on suppose $a > 0$ (et $a \neq 1$).
b) Montrer que h est une homothétie ; préciser son centre et son rapport.
c) Soit $f \in S$. Montrer

$$h^{-1} \circ f \circ h = f$$

En déduire une expression de f ; on commencera par le cas $0 < a < 1$.

Exercice 10 [02819] [correction]
On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour x réel non nul et $f(0) = 0$.
a) Montrer l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) f(x)$$

Quel est le degré de P_n ?
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées étant nulles en 0.
c) Montrer que toute racine de P_n est réelle.

Exercice 11 [00248] [correction]
[Théorème de Darboux]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
a) Montrer que f' prend toutes les valeurs intermédiaires entre

$$f'(a) \text{ et } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

b) Conclure que f' prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
Ainsi, bien qu'une fonction dérivée ne soit pas nécessairement continue, elle satisfait au théorème des valeurs intermédiaires !

Exercice 12 [00266] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Exercice 13 [00264] [correction]
Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Montrer que pour chaque $x_0 \in [a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ vérifiant

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1)(x_0 - a_2)\ldots(x_0 - a_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

On pourra, lorsque cela est possible, introduire un réel K tel que

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1)\ldots(x_0 - a_n)}{n!} K$$

et établir que la dérivée n-ième de $x \mapsto f(x) - \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{n!} K$ s'annule.

Exercice 14 [00265] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
a) Montrer que

$$\forall x_0 \in [a, b]\,,\ \exists \xi \in]a, b[\,, f(x_0) = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(\xi)$$

b) En déduire que

$$\sup_{[a,b]} |f| \leqslant \frac{(b - a)^2}{8} \sup_{[a,b]} |f''|$$

Exercice 15 [02815] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall t \in [0, 1]\,, f'(t) > 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_{k,n})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}\,,\ \frac{k - 1}{n} \leqslant f(x_{k,n}) \leqslant \frac{k}{n} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

Exercice 16 [02822] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable.
a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Si $|f'(x)| \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, montrer que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 17 [00360] [correction]
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$f \circ f = f$$

Intégration

Exercice 18 [00272] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < c < \frac{b-a}{2}$ et

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter

$$g(t) = \int_a^b f(t-x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 19 [03072] [correction]
Résoudre l'équation

$$2^x + 4^{x^2} = 3^x + 3^{x^2}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 20 [01981] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 21 [00193] [correction]
Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 [02610] [correction]
Pour $x \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$, on pose

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

a) Justifier l'existence de $f(x)$ pour chaque $x \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$

b) Etablir que pour tout $x > 1$,

$$\int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

En déduire la limite de f en 1^+
c) Etudier de même la limite de f en 1^-.
d) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et exprimer

$$f'(x)$$

e) Etablir que le prolongement par continuité de f en 1 est de classe $\mathcal{C}^1$ puis de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

Exercice 23 [00273] [correction]
On introduit sur $\mathbb{R}^\star$ la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

a) Prolonger f par continuité en 0.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 [00278] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $a > 0$. On pose

$$I(x) = \frac{1}{x^{a+1}} \int_0^x t^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de $I(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 25 [02977] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}\right)_{n\geqslant 0}$$

Exercice 26 [03181] [correction]
Déterminer un équivalent de

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

Convexité

Exercice 27 [01405] [correction]
Etudier la fonction
$$f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$$
afin d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 28 [01391] [correction]
Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications telles que f soit convexe et g soit à la fois convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 29 [01392] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe.
Etudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

Exercice 30 [01393] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante.
Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 31 [01394] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.
Montrer que f est constante.

Exercice 32 [01395] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et majorée. Montrer que f est constante.
La conclusion subsiste-t-elle pour $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$?

Exercice 33 [01396] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est continue.

Exercice 34 [01397] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
a) On suppose $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que f est positive.
b) On suppose que f présente une droite asymptote en $+\infty$. Cela signifie qu'il existe une droite d'équation $y = px + q$ vérifiant
$$f(x) - (px + q) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$
Etudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 35 [03049] [correction]
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
a) On suppose que, pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$
Montrer que f est convexe.
b) On suppose qu'il existe un réel M tel que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)| \leqslant My^2$$
Montrer que f est dérivable.
Indice : Considérer $x \mapsto f(x) \pm Mx^2/2$.

Exercice 36 [03155] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable, concave et vérifiant $f(0) \geqslant 0$. Montrer que f est sous-additive i.e.
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$$

Exercice 37 [03357] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si $a \in I$ est un minimum local de f alors a est un minimum global.

Exercice 38 [02640] [correction]
[Inégalité d'entropie]
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur I intervalle non singulier.

a) Etablir que pour tout $a, x \in I$ on a l'inégalité

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$$

b) Soit $f : [0,1] \to I$ continue. Etablir

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t$$

c) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, strictement positive et d'intégrale égale à 1.
Montrer

$$\int_0^1 f(t)\ln(f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

d) Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, strictement positives et d'intégrales sur $[0,1]$ égales à 1.
En justifiant et en exploitant l'inégalité $x\ln x \geqslant x - 1$ pour $x > 0$, montrer

$$\int_0^1 f(t)\ln f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 f(t)\ln g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 39 [01730] [correction]
Soient C_1 et C_2 deux parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer que l'ensemble C formé des milieux des vecteurs u_1 et u_2 avec $u_1 \in C_1$ et $u_2 \in C_2$ est convexe.

Exercice 40 [01731] [correction]
Soit V une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer que si tout barycentre d'éléments de V est encore dans V alors V est un sous-espace affine.

Inégalité de convexité

Exercice 41 [01398] [correction]
Observer les inégalités suivantes par un argument de convexité.

a) $\forall x \in [0, \pi/2],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0,\ x^{n+1} - (n+1)\,x + n \geqslant 0$

Exercice 42 [01399] [correction]
Montrer que $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave.
En déduire

$$\forall (x,y) \in \left]1, +\infty\right[^2,\ \ln\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x . \ln y}$$

Exercice 43 [01400] [correction]
Montrer

$$\forall x_1, \dots, x_n > 0,\ \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 44 [01401] [correction]
Soient $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Montrer que pour tout $a, b > 0$ on a

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$$

Exercice 45 [03172] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $t \in]0, 1[$. Montrer

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b$$

Exercice 46 [01404] [correction]
[Inégalité de Hölder]
Soient $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a) En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

b) Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$, déduire de ce qui précède :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

c) Conclure que

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leqslant \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$$

d) Plus généralement, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

Exercice 47 [01403] [correction]
a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$
b) Etablir

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+\star}, 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1 + x_k\right)^{1/n}$$

c) En déduire, pour tout $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^{+\star}$, l'inégalité

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 48 [02945] [correction]
Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels positifs.
Montrer

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} + (y_1 \dots y_n)^{1/n} \leqslant ((x_1 + y_1) \times \dots \times (x_n + y_n))^{1/n}$$

Exercice 49 [02823] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, a, b réels avec $a < b$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\,\mathrm{d}t$$

Exercice 50 [02942] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, concave et vérifiant $f(0) = 1$. Etablir

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

Exercice 51 [04058] [correction]
Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Montrer

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

Etude asymptotique

Exercice 52 [00237] [correction]
On pose $f(x) = x + \ln x - 1$ pour $x > 0$.
a) Justifier que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
b) Former le développement limité à l'ordre 2 de f^{-1} en 0.
c) Donner un équivalent simple à $f^{-1}(y)$ quand $y \to +\infty$.
d) Donner un équivalent simple à $f^{-1}(y)$ quand $y \to -\infty$.

Exercice 53 [00238] [correction]
Montrer que $x \mapsto x + \ln(1 + x)$ admet au voisinage de 0 une fonction réciproque.
Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de celle-ci.

Exercice 54 [00239] [correction]
Soit $f : [\mathrm{e}, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

a) Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
b) Déterminer un équivalent simple à f^{-1} en $+\infty$.
c) Réaliser un développement asymptotique à trois termes de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 55 [03228] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) > 0$$

a) Montrer l'existence de $a > 0$ tel que f est strictement décroissante sur $[-a, 0]$ et strictement croissante sur $[0, a]$.
b) On pose

$$b = \min\{f(-a), f(a)\}$$

Montrer que pour tout $\lambda \in [0, b]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution $x_1(\lambda)$ dans $[-a, 0]$ et une unique solution $x_2(\lambda)$ dans $[0, a]$.

c) Déterminer les limites puis des équivalents de $x_1(\lambda)$ et de $x_2(\lambda)$ quand $\lambda \to 0^+$.
d) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^3$. Etudier la limite quand $\lambda \to 0^+$ de

$$\frac{x_1(\lambda) + x_2(\lambda)}{\lambda}$$

Exercice 56 [03230] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{x}\mathrm{e}^x$$

a) Montrer que l'équation

$$f(x) = \lambda$$

admet deux solutions $a(\lambda) < b(\lambda)$ pour λ assez grand.
b) Déterminer

$$\lim_{\lambda \to +\infty} b(\lambda)^{a(\lambda)}$$

Exercice 57 [00234] [correction]
a) Former le DL à l'ordre 3 en 0 de

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

b) Prolonger le DL à l'ordre 5 en exploitant

$$\tan(\arctan x) = x$$

c) Prolonger le DL à l'ordre 7 en exploitant

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Soit $\varepsilon > 0$, puisque $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \geqslant A, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour $x \geqslant A$ et pour tout $t \in [A, x]$, $|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc

$$\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_A^x |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x-A}{x}\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

b) On peut écrire

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \ell = \frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t = \frac{C^{te}}{x} \to 0$$

donc il existe $A' \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$x \geqslant A' \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

et alors pour $A'' = \max(A, A')$, on a

$$x \geqslant A'' \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Exercice 2 : [énoncé]
Dans le cas $\ell = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \geqslant A, |f(x+1) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Or

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\lfloor x-A\rfloor - 1}[f(x-k) - f(x-k-1)] + \frac{1}{x}f(x - \lfloor x-A\rfloor)$$

donc

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\lfloor x-A\rfloor}{A}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(x - \lfloor x-A\rfloor)|}{x}$$

Puisque f est continue sur le segment $[A, A+1]$, elle y est bornée par un certain M.
Or $x - \lfloor x-A\rfloor \in [A, A+1]$ donc

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{x}$$

et pour x assez grand

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas général, il suffit d'introduire la fonction $g : x \mapsto f(x) - \ell x$ pour conclure.

Exercice 3 : [énoncé]
Commençons par le cas $\ell = 0$.
On remarque que $(f(t)\mathrm{e}^t)' = (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^t$ donc

$$f(x)\mathrm{e}^x = f(0) + \int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

puis

$$f(x) = f(0)\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t$$

Il reste à montrer

$$\int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$, pour $t \geqslant A$,

$$|f(t) + f'(t)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\left|\int_A^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\left|\int_0^A (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{e}^{A-x}\int_0^A |f(t) + f'(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi pour x assez grand,

$$\left|\int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Finalement $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Cas général : il suffit de considérer $g : x \mapsto f(x) - \ell$.

Exercice 4 : [énoncé]
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, \alpha], (1-\varepsilon)\sqrt{x} \leqslant f(x) - f(x/2) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x}$$

Pour $x \in]0, \alpha]$, $x/2^n \in]0, \alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x/2^n} \leqslant f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x/2^{n+1}}$$

En sommant ces inégalités et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}} \leqslant f(x) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}$$

La phrase quantifiée ainsi obtenue permet d'affirmer

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{1-1/\sqrt{2}}$$

Exercice 5 : [énoncé]
a) Considérons $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue, $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$ donc il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
b) L'ensemble $A = \{x \in [0,1] / f(x) \geqslant x\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (0 y appartient) et est majorée (par 1).
On peut donc poser

$$\alpha = \sup A$$

Si $\alpha \in A$ alors $\alpha \leqslant f(\alpha)$ donc $f(\alpha) \leqslant f(f(\alpha))$ d'où $f(\alpha) \in A$. Or α est majorant de A donc $f(\alpha) \leqslant \alpha$ puis $f(\alpha) = \alpha$.
Si $\alpha \notin A$ alors $f(\alpha) < \alpha$. Puisque α est le plus petit des majorants de A, il existe $t \in A$ vérifiant $f(\alpha) < t \leqslant \alpha$. Or par croissance de f, $f(t) \leqslant f(\alpha) < t$ ce qui est contradictoire avec la propriété $t \in A$.
On peut aussi procéder par dichotomie...

Exercice 6 : [énoncé]
a) L'ensemble des points fixes de f est $(f - \mathrm{Id})^{-1}\{0\}$, c'est donc une partie fermée de $[0,1]$. Etant fermée et bornée c'est une partie compacte. Etant de plus non vide, cette partie admet un plus petit et un plus grand élément.
b) Soient $a \leqslant b$ les deux éléments précédents. L'égalité $f \circ g = g \circ f$ donne $f(g(a)) = g(a)$ et $f(g(b)) = g(b)$.
Les réels $g(a)$ et $g(b)$ étant points fixes de f, on a l'encadrement

$$a \leqslant g(a), g(b) \leqslant b$$

Considérons alors la fonction continue $\varphi = f - g$.
On a $\varphi(a) = a - g(a) \leqslant 0$ et $\varphi(b) = b - g(b) \geqslant 0$.
Par application du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction φ s'annule.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit f une fonction solution. Puisque celle-ci est continue sur un segment, elle y admet un minimum en un certain $x_0 \in [0,1]$.
On a alors

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x_0 + 1 - x_0)}{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x_0)}{2^n} = f(x_0)$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n x_0 + 1 - x_0) = f(x_0)$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$f(1) = f(x_0)$$

Ainsi $f(1)$ est la valeur minimale de f sur $[0,1]$
Un raisonnement symétrique assure aussi que $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $[0,1]$.
On en déduit que f est constante.
La réciproque est immédiate.

Exercice 8 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right)$$

Il suffit ensuite de dériver à l'ordre n...
Après résolution de l'équation

$$(x-i)^n = (x+i)^n$$

à l'aide des racines de l'unité, on obtient que les racines de $f^{(n)}$ sont les $\cot \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) En dérivant la relation $(f \circ f)(x) = ax + b$ on obtient

$$f'(x)f'(f(x)) = a$$

On observe que h admet un unique point fixe $\alpha = b/(1-a)$.
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$ alors $h(x) = f(f(x)) < f(x) < x$ ce qui est contradictoire avec l'existence d'un point fixe pour h.
De même, on ne peut avoir $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La continuité de f permet alors d'assurer l'existence d'un point fixe à f (qui ne peut d'ailleurs qu'être α car un point fixe de f est aussi point fixe de h).
La relation

$$f'(x)f'(f(x)) = a$$

en $x = \alpha$ donne

$$(f'(\alpha))^2 = a$$

Par suite si $a < 0$, $S = \emptyset$.
b) On observe

$$h(x) = a(x-\alpha) + \alpha$$

L'application h est une homothétie de centre α et de rapport a.
c) On a

$$h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ f \circ f = h^{-1} \circ h \circ f = f$$

En itérant la relation précédente

$$(h^{-1})^n \circ f \circ h^n = f$$

avec $h^n(x) = \alpha + a^n(x-\alpha)$ et $(h^{-1})^n(x) = \alpha + a^{-n}(x-\alpha)$.
Supposons $a \in]0,1[$.
On peut écrire

$$f(x) = ((h^{-1})^n \circ f \circ h^n) = (h^{-1})^n \circ f(\alpha + a^n(x-\alpha))$$

Puisque $a^n \to 0$ et que f est dérivable en α

$$f(\alpha + a^n(x-\alpha)) = \alpha + a^n(x-\alpha)f'(\alpha) + o(a^n)$$

donc

$$f(x) = (h^{-1})^n \circ f(\alpha + a^n(x-\alpha)) = \alpha + (x-\alpha)f'(\alpha) + o(1)$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on peut affirmer que la fonction f est affine. Puisque de plus α est point fixe, f est une homothétie de centre α et son rapport ne peut qu'être $\pm\sqrt{a}$.
La réciproque est immédiate.

Dans le cas $a > 1$, la même étude en partant de

$$h \circ f \circ h^{-1} = f$$

permet aussi d'affirmer que f est affine et d'obtenir une conclusion analogue.

Exercice 10 : [énoncé]
a) Il suffit de raisonner par récurrence. On obtient $P_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = (2 - 3nX^2)P_n + X^3 P_n'$$

Par récurrence, pour $n > 0$, $\deg P_n = 2(n-1)$.
b) f est continue en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ dont par le théorème « limite de la dérivée », on peut conclure.
c) $P_1 = 2$ a toutes ses racines réelles.
$f'(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 0$ donc par une généralisation du théorème de Rolle, on peut affirmer que f'' s'annule sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$. Ses annulations sont aussi des zéros de P_2 qui est de degré 2, donc P_2 a toutes ses racines réelles.
f'' s'annule aussi en 0 et en $\pm\infty$. Par la généralisation du théorème de Rolle, on obtient 2 annulations sur $]0,+\infty[$ et 2 annulations sur $]-\infty,0[$ qui seront toutes quatre zéros de P_3 qui est un polynôme de degré 4,... on peut itérer la démarche.

Exercice 11 : [énoncé]
Soit y une valeur strictement intermédiaire à $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Considérons $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - y(x-a)$.
La fonction φ est dérivable et

$$\varphi(a) = f(a),\ \varphi'(a) = f'(a) - y < 0,\ \varphi(b) = f(b) - y(b-a) > f(a)$$

Puisque $\varphi'(a) < 0$, φ prend des valeurs strictement inférieures à $f(a)$.
Ainsi il existe $\alpha \in]a,b]$ tel que $\varphi(\alpha) < f(a)$.
φ est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué entre α et b, il existe$x \in]\alpha,b[\subset]a,b[$ tel que $\varphi(x) = f(a)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre a et x, il existe $c \in]a,x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ i.e. $f'(c) = y$.
Par le même principe que ci-dessus, f' prend aussi les valeurs intermédiaires à $f'(b)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et donc les valeurs intermédiaires à $f'(a)$ et $f'(b)$.

Exercice 12 : [énoncé]
Soit (a_n) une suite de valeurs d'annulation deux à deux distinctes de f. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée (a_n) une sous-suite convergente $(a_{\varphi(n)})$. Posons α sa limite. Par continuité, on a $f(\alpha) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle entre $a_{\varphi(n)}$ et $a_{\varphi(n+1)}$, il existe b_n compris entre ces deux nombres tel que $f'(b_n) = 0$. Quand $n \to +\infty$, on a $b_n \to \alpha$ par encadrement et donc par continuité de f', on a $f'(\alpha) = 0$. Finalement
$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Exercice 13 : [énoncé]
Si $x_0 \in \{a_1, \dots, a_n\}$ n'importe quel c convient.
Si $x_0 \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, il existe une constante K telle que

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1)\dots(x_0 - a_n)}{n!}K$$

La fonction $x \mapsto f(x) - \frac{(x-a_1)\dots(x-a_n)}{n!}K$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et s'annule en $a_1, \dots, a_n$ et x_0 ce qui fournit au moins $n+1$ valeurs d'annulation et permet, par le théorème de Rolle, de conclure que sa dérivée $n$ème s'annule en un $c \in]a, b[$. Or

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(f(x) - \frac{(x - a_1)\dots(x - a_n)}{n!}K\right) = f^{(n)}(x) - K$$

donc $K = f^{(n)}(c)$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$: ok. Sinon introduisons un réel K tel que la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}K$$

s'annule en x_0.
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ et s'annule en $a < t < b$ donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g''(\xi) = 0$ ce qui résout le problème.
b) Notons que les sup engagés existent car les fonctions considérées sont continues sur le segment $[a, b]$.
On a

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leqslant \frac{(x - a)(b - x)}{2}\sup_{[a,b]}|f''|$$

Or $x \mapsto \frac{(x-a)(b-x)}{2}$ est maximum en $x = \frac{a+b}{2}$ ce qui donne :

$$|f(x)| \leqslant \frac{(b - a)^2}{8}\sup_{[a,b]}|f''|$$

puis

$$\sup_{[a,b]}|f| \leqslant \frac{(b - a)^2}{8}\sup_{[a,b]}|f''|$$

Exercice 15 : [énoncé]
La bijection réciproque f^{-1} est dérivable car la dérivée de f ne s'annule pas et

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction f^{-1} entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$, il existe $y_{k,n} \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$ tel que

$$f^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) - f^{-1}\left(\frac{k-1}{n}\right) = \left(f^{-1}\right)'(y_{k,n})\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)$$

En posant $x_{k,n} = f^{-1}(y_{k,n})$, on a

$$\frac{k-1}{n} \leqslant f(x_{k,n}) \leqslant \frac{k}{n}$$

En sommant les relations précédentes pour k allant de 1 à n on obtient :

$$f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_{k,n})}\frac{1}{n}$$

car

$$(f^{-1})'(y_{k,n}) = \frac{1}{f'(x_{k,n})}$$

Puisque $f^{-1}(1) = 1$ et $f^{-1}(0) = 0$ car f bijection croissante de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$, on obtient finalement,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est lipschitzienne donc uniformément continue.
b) Supposons que f soit uniformément continue. Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x + \alpha) - f(x)| \leqslant 1$. Or par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in]x, x + \alpha[$ vérifiant $|f(x + \alpha) - f(x)| = \alpha\,|f'(\xi_x)|$ et donc
$|f'(\xi_x)| \leqslant 1/\alpha$. Cette propriété est incompatible avec $|f'(x)| \to +\infty$.

Exercice 17 : [énoncé]
Si f est solution alors en dérivant $f\circ f=f$ on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=f'(x)\times f'(f(x))$$

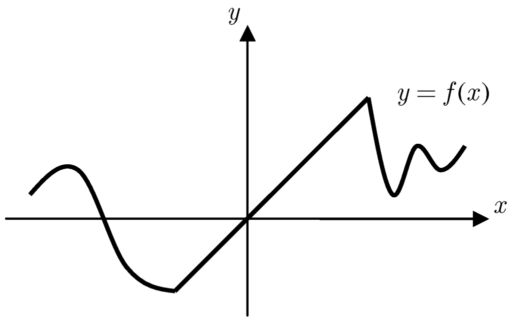
puis en exploitant à nouveau $f\circ f=f$, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(f(x))=f'(f(x))^2$$

Puisque la fonction $f'\circ f$ est continue, on peut affirmer que celle-ci est constante égale à 0 ou 1.
Cas $f'\circ f=0$
La relation $f'(x)=f'(x)\times f'(f(x))$ donne $f'(x)=0$ et on en déduit que f est constante.
Cas $f'\circ f=1$
Nous savons que $I=\mathrm{Im}f=f(\mathbb{R})$ est un intervalle non vide.
Puisque $f'(x)=1$ pour tout $x\in I$, on peut affirmer qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=x+C$ pour tout $x\in I$.
Or on a $f(f(x))=f(x)+C$ (car $f(x)\in I$) et $f(f(x))=f(x)$ donc $C=0$. Ainsi

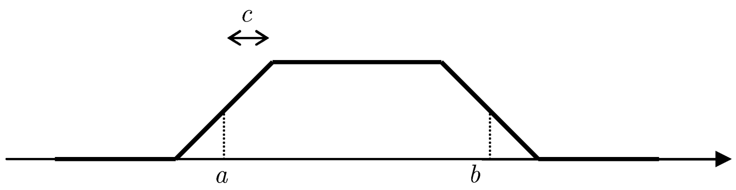
$$\forall x\in I, f(x)=x$$

Pour conclure, il reste à montrer $I=\mathbb{R}$.
Par l'absurde supposons l'intervalle I majoré et posons $m=\sup I$.
Par continuité de f' et de f en m, on a $f(m)=m$ et $f'(m)=1$ Puisque $f'(m)=1$, f prend des valeurs strictement supérieures à $f(m)=m$. Ceci contredit la définition de m.
De même, on obtient qu'il est absurde d'affirmer que I est minoré et donc on conclut $I=\mathbb{R}$.
Finalement, si f est solution alors f est constante ou égale à l'identité.
La réciproque est immédiate.
Notons que sans l'hypothèse classe $\mathcal{C}^1$, de nombreuses fonctions peuvent être solutions comme la suivante



Une fonction continue vérifiant $f\circ f=f$

Exercice 18 : [énoncé]
$-c\leqslant t-x\leqslant c\Leftrightarrow t-c\leqslant x\leqslant t+c$.
Si $t\leqslant a-c$ ou $t\geqslant b+c$ alors $g(t)=0$.
Si $a-c\leqslant t\leqslant a+c$ alors $g(t)=\int_a^{t+c}1\,\mathrm{d}x=t+c-a$.
Si $a+c\leqslant t\leqslant b-c$ alors $g(t)=\int_{t-c}^{t+c}1\,\mathrm{d}t=2c$.
Si $b-c\leqslant t\leqslant b+c$ alors $g(t)=\int_{t-c}^{b}1\,\mathrm{d}x=b-t+c$.
La fonction g est représentée par une fonction continue affine par morceaux.



La fonction g

Exercice 19 : [énoncé]
L'équation étudiée équivaut à

$$4^{x^2}-3^{x^2}=3^x-2^x$$

Or

$$3^x-2^x=\int_0^1 x(2+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ et } 4^{x^2}-3^{x^2}=\int_0^1 x^2(3+t)^{x^2-1}\,\mathrm{d}t$$

et donc l'équation étudiée peut se réécrire

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t=0$$

où φ est l'application continue définie par

$$\varphi(t)=x(x(3+t)^{x^2-1}-(2+t)^{x-1})$$

Si $x\leqslant 0$ ou si $x\geqslant 1$, il est immédiat d'affirmer que l'application φ est de signe constant.
Si $x\in\,]0,1[$, l'étude est plus délicate et nous allons montrer par étude de fonctions que

$$x(3+t)^{x^2-1}\leqslant(2+t)^{x-1}$$

soit encore

$$\ln x + (x^2 - 1)\ln(3 + t) \leqslant (x - 1)\ln(2 + t)$$

Soit $f : x \mapsto \ln x + (x^2 - 1)\ln(3 + t) - (x - 1)\ln(2 + t)$ définie sur $]0, 1]$
La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x\ln(3 + t) - \ln(2 + t)$$

Si $x \geqslant 1/2$ alors $f'(x) \geqslant \frac{1}{x} + \ln(3 + t) - \ln(2 + t) \geqslant 0$.
Si $x \leqslant 1/2$ alors $f'(x) \geqslant 2 - \ln(2 + t) \geqslant 2 - \ln 3 \geqslant 0$.
Dans tous les cas $f'(x) \geqslant 0$ et donc f est croissante.
Puisque $f(1) = 0$, la fonction f est négative et l'on obtient l'inégalité proposée.
Finalement, l'équation initialement étudiée équivaut à une équation de la forme

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

avec φ une fonction continue de signe constant. L'équation est donc vérifiée si, et seulement si, φ est la fonction nulle.
Pour $x \leqslant 0$, cette propriété n'est vérifiée que si $x = 0$.
Pour $x > 0$, si la fonction φ est la fonction nulle alors

$$\forall t \in [0, 1]\,, \frac{1}{x} + (x^2 - 1)\ln(3 + t) - (x - 1)\ln(2 + t) = 0$$

puis en dérivant par rapport à la variable t, on obtient

$$\forall t \in [0, 1]\,, \frac{x^2 - 1}{3 + t} = \frac{x - 1}{2 + t}$$

ce qui n'est possible que pour $x = 1$.
Inversement, $x = 0$ et $x = 1$ sont solutions de l'équation étudiée.
Finalement

$$\mathcal{S} = \{0, 1\}$$

Exercice 20 : [énoncé]
Par intégration par parties

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{f(t)}{n}\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\frac{f(a)\cos(na)}{n}, \frac{f(b)\cos(nb)}{n} \to 0$$

et

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 21 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} f(u/n)\,|\sin u|\,\mathrm{d}u$$

En découpant l'intégrale par la relation de Chasles

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(u/n)\,|\sin u|\,\mathrm{d}u$$

puis par translation de la variable

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{u + k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u$$

et on peut alors écrire

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \left[f\left(\frac{u + k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin$$

D'une part

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

se reconnaît comme étant une somme de Riemann et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u \to 2\int_0^1 f(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'autre part, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi]$ elle y est M-lipschitzienne avec

$$M = \sup_{[0,\pi]} |f'|$$

et on a alors

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin u\,\mathrm{d}u\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}M\frac{u}{n}\sin u\,\mathrm{d}u=\frac{M}{n}\int_0^{\pi}u\sin u\,\mathrm{d}u\to 0$$

On en déduit

$$\int_0^{\pi}f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Notons que le résultat peut aussi être établi d'une façon semblable pour f seulement continue en exploitant l'uniforme continuité de f sur le segment $[0,\pi]$.

Exercice 22 : [énoncé]

a) Pour chaque x considérée, la fonction intégrée est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2.

b) Pour $x>1$ et pour tout $t\in\left[x,x^2\right]$, $x\leqslant t\leqslant x^2$ et $\ln t>0$ donne par intégration en bon ordre

$$\int_x^{x^2}\frac{x\,\mathrm{d}t}{t\ln t}\leqslant f(x)\leqslant\int_x^{x^2}\frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

Puisque

$$\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\left[\ln\left|\ln t\right|\right]_x^{x^2}=\ln 2$$

on obtient

$$f(x)\xrightarrow[x\to 1^+]{}\ln 2$$

c) Pour $x<1$, on a cette fois-ci $x^2\leqslant x$ et $\ln t<0$.

En adaptant ce qui précède, on obtient cette fois-ci $x^2\ln 2\leqslant f(x)\leqslant x\ln 2$ d'où l'on conclut

$$f(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}\ln 2$$

d) On introduit H primitive de $t\mapsto 1/\ln t$ sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.

On peut alors écrire $f(x)=H(x^2)-H(x)$ d'où l'on tire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ avec

$$f'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$$

e) La dérivée de f converge en 1 donc par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que le prolongement par continuité de f en 1, encore noté f, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

La dérivée de f est évidement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Au voisinage de 1, la dérivée de f est l'inverse de $\frac{\ln x}{x-1}$.

En posant $x=1+h$, on a

$$\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{h}\ln(1+h)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n h^n}{n+1}$$

pour $|h|<1$.

Ainsi $\frac{1}{f'(x)}$ est au voisinage de 1 une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas et donc $f'(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1.

Exercice 23 : [énoncé]

a) Quand $x\to 0^+$, on a par croissance de la fonction exponentielle

$$\forall t\in[x,2x]\,,\ \mathrm{e}^x\leqslant\mathrm{e}^t\leqslant\mathrm{e}^{2x}$$

donc

$$\mathrm{e}^x\ln 2\leqslant f(x)\leqslant\mathrm{e}^{2x}\ln 2$$

Par théorème d'encadrement

$$f(x)\to\ln 2$$

De même, quand $x\to 0^-$, $f(x)\to\ln 2$. On prolonge f par continuité en 0 en posant

$$f(0)=\ln 2$$

b) Soit F une primitive de $t\mapsto\mathrm{e}^t/t$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(x)=F(2x)-F(x)$ donc f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{x}$$

Il en est de même sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et puisque $f'(x)\xrightarrow[x\to 0]{}1$, on peut affirmer que la fonction continue f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0)=1$.

Exercice 24 : [énoncé]

On a

$$I(x)-\frac{f(0)}{a+1}=\frac{1}{x^{a+1}}\left(\int_0^x t^a f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t^a f(0)\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{x^{a+1}}\int_0^x t^a\left(f(t)-f(0)\right)\,\mathrm{d}t$$

Pour $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ vérifiant

$$|x|\leqslant\alpha\Rightarrow\left|f(x)-f(0)\right|\leqslant\varepsilon$$

Par suite, si $|x| \leqslant \alpha$, pour tout t compris entre 0 et x, $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ puis par intégration

$$\left|\frac{1}{x^{a+1}} \int_0^x t^a \left(f(t) - f(0)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{x \to 0} I(x) = \frac{f(0)}{a+1}$$

Exercice 25 : [énoncé]
On peut écrire

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = t^{n+1}$

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 f(u^{1/(n+1)})\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée par $\|f\|_\infty$, on obtient

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} \to f(1)$$

Exercice 26 : [énoncé]
Posons $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

prolongée par continuité en 0.
Notons que cette fonction est positive et croissante.
Introduisons $a, b \in]0,1[$ dont les valeurs seront déterminées ultérieurement. On peut écrire

$$-(n+1)I_n = A_n + B_n + C_n$$

avec

$$A_n = \int_0^a (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x,\ B_n = \int_a^b (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x \text{ et } C_n = \int_b^1 (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

Par monotonie de f,

$$0 \leqslant A_n \leqslant \int_0^a \frac{(n+1)x^n}{f(0)} = a^{n+1}$$

Pour $a = 1 - \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{n} \to 0$, on a

$$\ln(n)a^{n+1} = \mathrm{e}^{\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n)} \to 0$$

car

$$\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n) \sim -\ln n \to -\infty$$

On en déduit

$$A_n = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Par la croissance de f

$$0 \leqslant C_n \leqslant \int_b^1 \frac{(n+1)x^n}{f(b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - b^{n+1}}{f(b)}$$

Pour $b = 1 - \eta_n$ avec $\eta_n = \frac{1}{n(\ln n)} \to 0$, on a

$$b^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim \ln n$$

de sorte que

$$C_n \sim o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Enfin, toujours par la croissance de f,

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(b)} \leqslant B_n \leqslant \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(a)}$$

et puisque

$$b^{n+1} - a^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim f(a) \sim \ln n$$

on parvient à

$$-(n+1)I_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

et finalement

$$I_n \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

Remarque :
Par le changement de variable $t = -\ln(1-x)$, $x = 1 - \mathrm{e}^{-t}$

$$I_n = -\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-t})^{n+1}}{t} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

En développant par la formule du binôme

$$I_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t} \,\mathrm{d}t$$

et on peut montrer par découpage d'intégrale et un changement de variable affine que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t} \,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t} \,\mathrm{d}t = \ln(k+1)$$

Ce qui précède permet alors d'établir

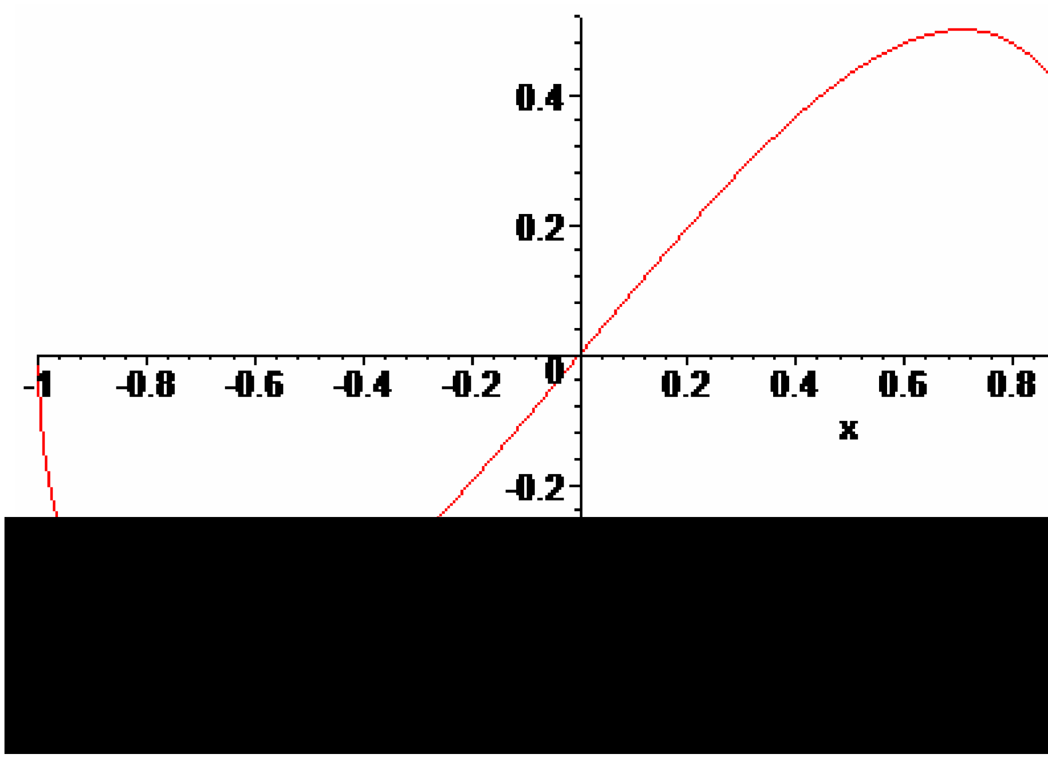
$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \ln(k+1) \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

Exercice 27 : [énoncé]
f est définie sur $[-1,1]$ et impaire, étude limitée à $[0,1]$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$,

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}$$

f présente une inflexion en 0, tangente $y = x$.
f présente un maximum en $x = 1/\sqrt{2}$ de valeur $1/2$.
$f(1) = 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$, il y a une tangente verticale en 1.

```
plot(x*sqrt(1-x^2), x=-1..1);
```



La fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$

Exercice 28 : [énoncé]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$,
Puisque f est convexe

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Puisque g est croissante

$$(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant g(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b))$$

Puisque g est convexe

$$(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda (g \circ f)(a) + (1-\lambda)(g \circ f)(b)$$

Finalement $g \circ f$ est convexe.

Exercice 29 : [énoncé]
f réalise une bijection continue de I vers $f(I)$. f^{-1} a même monotonie que f.
Soient $y, z \in f(I)$ et $\lambda \in [0,1]$, posons $a = f^{-1}(y)$ et $b = f^{-1}(z)$.

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

donne, sachant f^{-1} décroissante :

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geqslant f^{-1}(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))$$

i.e.

$$\lambda f^{-1}(y) + (1-\lambda)f^{-1}(z) \geqslant f^{-1}(\lambda y + (1-\lambda)z)$$

Ainsi f^{-1} est convexe.

Exercice 30 : [énoncé]
Par la convexité de f, pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant f(1) - f(0)$$

donc

$$f(x) \geqslant (f(1) - f(0))\, x + f(0) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Exercice 31 : [énoncé]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Pour tout $x > b$ on a $\tau(a,b) \leqslant \tau(a,x)$ donc

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b)$$

Si $\tau(a,b) > 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Par suite $\tau(a,b) \leqslant 0$.
Pour tout $x < a$ on a $\tau(x,a) \leqslant \tau(a,b)$ donc

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b)$$

Si $\tau(a,b) < 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Par suite $\tau(a,b) \geqslant 0$.
Finalement $\tau(a,b) = 0$ et donc $f(a) = f(b)$.

Exercice 32 : [énoncé]
Soit $a < b \in \mathbb{R}$. Par l'absurde supposons $f(a) \neq f(b)$.
Si $f(b) > f(a)$ alors pour tout $x \geqslant b$, $\tau(a,x) \geqslant \tau(a,b)$ donne

$$f(x) \geqslant (x-a)\tau(a,b) + f(a)$$

avec $\tau(a,b) > 0$.
Cette minoration donne $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
Si $f(b) < f(a)$ alors pour tout $x \leqslant a$, $\tau(x,a) \leqslant \tau(a,b)$ donne

$$f(a) - (a-x)\tau(a,b) \leqslant f(x)$$

avec $\tau(a,b) < 0$.
Cette minoration donne $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.
Dans les deux cas, f n'est pas majorée. Absurde.

Exercice 33 : [énoncé]
Etudions la continuité en $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < x_0 < b$.
Quand $x \to x_0^+$:
$x_0 < x < b$ donc $\tau(x_0, x) \leqslant \tau(x_0, b)$ puis

$$f(x) \leqslant f(x_0) + (x - x_0)\tau(x_0, b)$$

et $a < x_0 < x$ donc $\tau(a, x_0) \leqslant \tau(x_0, x)$ puis

$$f(x_0) + (x - x_0)\tau(a, x_0) \leqslant f(x)$$

Par le théorème des gendarmes

$$f(x) \to f(x_0)$$

Même étude pour $x \to x_0^-$ puis la conclusion.

Exercice 34 : [énoncé]
a) Soient $a < b$. Pour tout $x > b$, on a $\tau(a,x) \geqslant \tau(a,b)$. A la limite quand $x \to +\infty$, $0 \geqslant \tau(a,b)$.
Par suite f est décroissante et puisque $f \underset{+\infty}{\to} 0$, on peut conclure $f \geqslant 0$.
b) Posons $y = px + q$ l'équation de l'asymptote engagée et considérons $g : x \mapsto f(x) - (px+q)$.
La fonction g est convexe et g tend vers 0 en $+\infty$. Par suite g est positive et f est au dessus de son asymptote.

Exercice 35 : [énoncé]
a) Soie,t $a, b \in I$ et

$$A = \{\lambda \in [0,1], f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\}$$

On a $0, 1 \in A$ et par l'hypothèse de travail, on montre

$$\lambda, \mu \in A \Rightarrow (\lambda + \mu)/2 \in A$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}, k/2^n \in A$$

Enfin pour tout $\lambda \in [0,1]$, pour $k_n = \lfloor 2^n \lambda \rfloor$, on a $\lambda_n = k_n/2^n \to \lambda$ et

$$f(\lambda_n a + (1-\lambda_n)b) \leqslant \lambda_n f(a) + (1-\lambda_n) f(b)$$

donne à la limite

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Ainsi la fonction f est convexe.
b) Par ce qui précède, on montre que la fonction $g : x \mapsto f(x) - Mx^2/2$ est convexe.
On en déduit qu'en tout $x \in I$, g est dérivable à droite et à gauche et on a

$$g_g'(x) \leqslant g_d'(x)$$

Or la fonction $x \mapsto Mx^2/2$ est dérivable donc, par opérations, f est dérivable à droite et à gauche et on vérifie

$$f_g'(x) \leqslant f_d'(x)$$

De même, on montre que la fonction $h : x \mapsto f(x) + Mx^2/2$ est concave et on en déduit que pour tout $x \in I$,

$$f_g'(x) \geqslant f_d'(x)$$

Finalement $f_g'(x) = f_d'(x)$ et donc f est dérivable.

Exercice 36 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$$

La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(y) = f'(x+y) - f'(y)$$

Puisque f est concave, sa dérivée f' est décroissante et donc

$$f'(x+y) \leqslant f'(y)$$

On en déduit que φ est décroissante et puisque $\varphi(0) \leqslant 0$, la fonction φ est négative ce qui fournit l'inégalité demandé

Exercice 37 : [énoncé]
Soit $b \in I$.
Cas $b > a$.
Puisque a est minimum local de f, il existe $a < c < b$ tel que

$$f(c) \geqslant f(a)$$

La fonction taux de variation en a étant croissante (car f convexe), on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geqslant 0$$

et donc $f(b) \geqslant f(a)$
Le cas $b < a$ est analogue avec considération des signes de $b - a$ et $c - a$.

Exercice 38 : [énoncé]
a) φ étant convexe, la courbe est au dessus de chacune de ses tangentes.
b) Posons $a = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u \in I$ et considérons $x = f(t) \in I$:
$\varphi(f(t)) \geqslant \varphi(a) + \varphi'(a)(f(t) - a)$
En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant \varphi\left(\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

car

$$\int_0^1 \varphi'(a)(f(t) - a)\,\mathrm{d}t = \varphi'(a)\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u\right) = 0$$

c) $\varphi : x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ car $(x \ln x)' = 1 + \ln x$ qui est croissant.
L'inégalité précédente donne alors

$$0 \leqslant \int_0^1 f(t) \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$$

puisque $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ annule φ.

d) $x \mapsto x\ln x$ étant convexe et de tangente d'équation $y = x - 1$ en 1, on a

$$x\ln x \geqslant x - 1 \text{ pour tout } x > 0$$

Par suite

$$\int_0^1 f(t)\ln f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ln g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 39 : [énoncé]
Soient $\lambda \in [0,1]$ et $u, v \in C$. Etudions $\lambda u + (1-\lambda)v$.
On peut écrire $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ et $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ avec $u_1, v_1 \in \mathcal{C}_1$ et $u_2, v_2 \in \mathcal{C}_2$.
On observe alors

$$\lambda u + (1-\lambda)v = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$$

avec

$$w_1 = (\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1) \in \mathcal{C}_1 \text{ et } w_2 = \frac{1}{2}(\lambda u_2 + (1-\lambda)v_2) \in \mathcal{C}_2$$

Ainsi $\lambda u + (1-\lambda)v \in \mathcal{C}$.

Exercice 40 : [énoncé]
Soient $a \in V$ et $F = \{b - a / b \in V\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E, ce qui, puisque $V = a + F$ assure que V est un sous-espace affine.
$F \subset E$ et $0_E = a - a \in F$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in F$. Puisque $a \in V$ et $a + u \in V$ on a

$$a + \lambda u = (1-\lambda)a + \lambda(a+u) \in V$$

donc $\lambda.u \in F$.
Soient $u, v \in F$. On a $a + u \in V$ et $b + v \in V$ donc

$$a + \frac{1}{2}(u+v) = \frac{1}{2}(a+u) + \frac{1}{2}(a+v) \in V$$

et donc $\frac{1}{2}(u+v) \in F$ puis $u + v \in F$ en vertu de la propriété précédente.
Finalement F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 41 : [énoncé]
a) La fonction $x \mapsto \sin x$ est concave sur $[0, \pi/2]$, la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0 et la droite d'équation $y = 2x/\pi$
supporte la corde joignant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$.
Le graphe d'une fonction concave est en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes et cela fournit l'inégalité.
b) La fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et sa tangente en 1 a pour équation

$$y = (n+1)x - n$$

Le graphe d'une fonction convexe est au dessus de chacune de ses tangentes et cela fournit l'inégalité.

Exercice 42 : [énoncé]
f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln x} \text{ et } f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2} \leqslant 0$$

f est concave.
Puisque f est concave :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

i.e.

$$\ln\left(\ln\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(\ln x) + \ln(\ln y)}{2} = \ln\sqrt{\ln x \ln y}$$

La fonction exp étant croissante :

$$\ln\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$$

Exercice 43 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

d'où

$$\frac{n}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

puis l'inégalité voulue.

Exercice 44 : [énoncé]
La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave. En appliquant l'inégalité de concavité entre a^p et b^q on obtient

$$\ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q$$

puis l'inégalité voulue.

Exercice 45 : [énoncé]
La propriété est immédiate pour $a = 0$ ou $b = 0$.
Supposons désormais $a, b > 0$.
Par concavité de la fonction logarithme, on peut affirmer

$$\ln(ta + (1-t)b) \geqslant t\ln a + (1-t)\ln b$$

et donc

$$\ln(a^t b^{1-t}) \leqslant \ln(ta + (1-t)b)$$

puis l'inégalité proposée en composant avec la fonction exponentielle qui est croissante.

Exercice 46 : [énoncé]
a) Par la concavité de $x \mapsto \ln x$, on a pour tout $a, b > 0$ et tout $\lambda \in [0,1]$ l'inégalité :

$$\lambda \ln a + (1-\lambda)\ln b \leqslant \ln(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

Appliquée à $\lambda = 1/p$, elle donne

$$\ln \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$

puis l'inégalité voulue. Enfin celle-ci reste vraie si $a = 0$ ou $b = 0$.
b) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à

$$a = \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} \text{ et } b = \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

c) De même on a aussi

$$\frac{a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_2^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_2^q}{b_1^q + b_2^q}$$

donc en sommant les inégalités obtenues puis en simplifiant on obtient celle voulue.

d) En reprenant l'inégalité du a) avec

$$a = \frac{a_j^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} \text{ et } b = \frac{b_j^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}$$

puis en sommant les inégalités obtenues, on obtient celle voulue.

Exercice 47 : [énoncé]
a) $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \text{ et } f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \geqslant 0$$

f est donc convexe.
b)

$$f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n}$$

donne

$$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{a_1+\dots+a_n}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^n 1 + \mathrm{e}^{a_k}\right)$$

puis

$$1 + \mathrm{e}^{\frac{a_1+\dots+a_n}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1 + \mathrm{e}^{a_k}\right)^{1/n}$$

qui donne l'inégalité voulue en partant de $a_k = \ln x_k$.
c) En factorisant

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right)$$

puis en vertu de ce qui précède

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^n 1 + \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 48 : [énoncé]
Si l'un des x_i ou des y_i est nul, la relation est immédiate. On suppose désormais $x_i, y_i > 0$.
En divisant par $(x_1 \dots x_n)^{1/n}$, la propriété demandée équivaut à
$1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leqslant ((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n))^{1/n}$ pour tout $\alpha_i > 0$. Etablissons cette identité.
Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
f est dérivable et $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction f' est croissante donc f est convexe.
Par l'inégalité de Jensen :

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(f(a_1) + \dots + f(a_n)\right)$$

Pour $a_i = \ln \alpha_i$, on obtient

$$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\ln(1+\alpha_1) + \dots + \ln(1+\alpha_n)\right)$$

puis

$$\ln\left(1 + (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{1/n}\right) \leqslant \ln\left((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)\right)^{1/n}$$

et par la croissance de la fonction exponentielle, on obtient

$$1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leqslant ((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n))^{1/n}$$

Exercice 49 : [énoncé]
Il est bon de savoir qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe est obligatoirement continue bien que ce résultat n'est pas explicitement au programme. Par les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

donc par continuité

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Par l'inégalité de Jensen

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

En passant cette relation à la limite, on peut alors conclure grâce à la continuité de f.

Exercice 50 : [énoncé]
Par un argument géométrique (trapèze sous la courbe) la concavité donne

$$x\frac{f(0) + f(x)}{2} \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $xf(x) \leqslant 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x$ donc

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_{x=0}^1 \left(\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

Or

$$\int_{x=0}^1\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^1\int_{x=t}^1 f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$$

La relation (1) donne alors

$$3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \text{ (2)}$$

Enfin

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

donne

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \text{ (3)}$$

Les relations (2) et (3) permettent alors de conclure.

Exercice 51 : [énoncé]
L'inégalité arithmético-géométique (qui découle de la concavité du logarithme et de l'inégalité de Jensen) fournit

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Il suffit alors de l'appliquer avec $a_i = x_i/x_{i+1}$ en notant $x_{n+1} = x_1$.

Exercice 52 : [énoncé]
a) f est continue et strictement croissante. L'étude des limites de f permet d'affirmer que f réalise une bijection $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

b) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par suite f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la forme

$$f^{-1}(y) = a + by + cy^2 + o(y^2)$$

Comme $f(1) = 0$, $f^{-1}(0) = 1$ et donc $a = 1$.
La relation $f(f^{-1}(y)) = y$ donne

$$1 + by + cy^2 + o(y^2) + \ln(1 + by + cy^2 + o(y^2)) - 1 = y$$

soit encore

$$2by + \left(2c - \frac{1}{2}b^2\right) y^2 + o(y^2) = y$$

Par unicité des développements limités

$$b = 1/2 \text{ et } c = 1/16$$

c) Le tableau de variation de f permet de d'obtenir celui de f^{-1} et d'affirmer

$$f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$$

Puisque

$$f^{-1}(y) + \ln(f^{-1}(y)) - 1 = y$$

avec

$$\ln(f^{-1}(y)) - 1 = o(f^{-1}(y))$$

on obtient

$$f^{-1}(y) \sim y$$

d) On a

$$f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$$

La relation

$$f^{-1}(y) + \ln(f^{-1}(y)) - 1 = y$$

donne

$$\ln(f^{-1}(y)) = y + 1 - f^{-1}(y)$$

puis

$$f^{-1}(y) = \mathrm{e}^{1+y}\mathrm{e}^{-f^{-1}(y)} \sim \mathrm{e}^{1+y}$$

Exercice 53 : [énoncé]
$f : x \mapsto x + \ln(1 + x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2 > 0$.
Sur un intervalle voisinage de 0, la dérivée de f ne s'annule pas et donc f induit une bijection au départ de cet intervalle. De plus, sa bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et admet un développement limité à l'ordre 3 de la forme

$$f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o(y^3)$$

Puisque $f(f^{-1}(y)) = y$, on obtient

$$2ay + \left(2b - \frac{a^2}{2}\right) y^2 + (2c - ab + \frac{1}{3}a^3)y^3 + o(y^3) = y$$

On en déduit $a = 1/2$, $b = 1/16$ et $c = -1/192$.

Exercice 54 : [énoncé]
a) f est continue et

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0$$

sauf en $x = \mathrm{e}$ donc f est strictement croissante et réalise donc une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ vers $[\mathrm{e}, +\infty[$.
b) Quand $y \to +\infty$, $f^{-1}(y) \to +\infty$.

$$\frac{f^{-1}(y)}{\ln(f^{-1}(y))} = y$$

donc

$$\ln(f^{-1}(y)) - \ln(\ln(f^{-1}(y))) = \ln(f^{-1}(y)) + o(\ln(f^{-1}(y))) = \ln y$$

d'où

$$\ln(f^{-1}(y)) \sim \ln y$$

Par suite

$$f^{-1}(y) \sim y \ln y$$

c) $f^{-1}(y) = y\ln(f^{-1}(y)) = y\ln(y\ln y + o(y\ln y)) = y\ln y + y\ln(\ln y + o(\ln y)) = y\ln y + y\ln(\ln y) + o(y\ln(\ln y))$.
puis $f^{-1}(y) = y\ln(f^{-1}(y)) = y\ln(y\ln y + y\ln(\ln y) + o(y\ln(\ln y)) = y\ln(y\ln y) + y\ln\left(1 + \frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(\frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right)\right)$
et enfin

$$f^{-1}(y) = y\ln y + y\ln(\ln y) + y\frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(y\frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right)$$

Exercice 55 : [énoncé]

a) Puisque f'' est continue et $f''(0) > 0$, on peut introduire $a > 0$ tel que $f'' > 0$ sur $[-a, a]$.

On a alors f' strictement croissante sur $[-a, a]$ et puisque $f'(0) = 0$, on peut exprimer le signe de f' sur $[0, a]$ et constater que f est strictement décroissante sur $[-a, 0]$ et strictement croissante sur $[0, a]$.

b) Puisque f est continue, par stricte monotonie, f réalise une bijection f_1 de $[-a, 0]$ sur $[0, f(-a)]$ et une bijection f_2 de $[0, a]$ sur $[0, f(a)]$. L'existence et l'unicité de $x_1(\lambda)$ et de $x_2(\lambda)$ en découlent et

$$x_1(\lambda) = f_1^{-1}(\lambda) \text{ et } x_2(\lambda) = f_2^{-1}(\lambda)$$

c) Par continuité de f_1^{-1} et f_2^{-1}, on a

$$\lim_{\lambda\to 0^+} x_1(\lambda) = 0^- \text{ et } \lim_{\lambda\to 0^+} x_2(\lambda) = 0^+$$

Par la formule de Taylor-Young, quand $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, puisque $x_i(\lambda) \to 0$,

$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{1}{2}x_i^2(\lambda)f''(0) + o(x_i^2(\lambda))$$

donc

$$x_i^2(\lambda) \sim \frac{2\lambda}{f''(0)}$$

Ainsi

$$x_1(\lambda) \sim -\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}} \text{ et } x_2(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}}$$

d) On peut écrire

$$x_i(\lambda) = \pm\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}} + y_i(\lambda) \text{ avec } y_i = o(\sqrt{\lambda})$$

Par la formule de Taylor-Young, quand $\lambda \to 0$

$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{1}{2}x_i^2(\lambda)f''(0) + \frac{1}{6}x_i^3(\lambda)f^{(3)}(0) + o(x_i^3(\lambda))$$

et on obtient

$$y_1(\lambda) \sim -\frac{1}{3}\frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2}\lambda \text{ et } y_2(\lambda) \sim -\frac{1}{3}\frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2}\lambda$$

donc

$$\frac{x_1(\lambda) + x_2(\lambda)}{\lambda} \to -\frac{2}{3}\frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2}$$

Exercice 56 : [énoncé]

a) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ avec

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x$$

Notons $\alpha < \beta$ les deux racines réelles de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. On a le tableau des variations suivant

x	$-\infty$		α		0^-	0^+		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $\lambda > \max(f(\beta), f(\alpha))$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet deux solutions, l'une dans $a(\lambda) \in]0, \beta[$ et l'autre $b(\lambda) \in]\beta, +\infty[$.

b) On a

$$a(\lambda) = \left(f_{\restriction]0,\beta[}\right)^{-1}(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0^+ \text{ et } b(\lambda) = \left(f_{\restriction]\beta,+\infty[}\right)^{-1}(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} +\infty$$

Puisque $a(\lambda) \to 0$ et

$$\frac{a(\lambda) + 1}{a(\lambda)}\mathrm{e}^{a(\lambda)} = \lambda$$

on a

$$\lambda a(\lambda) = (a(\lambda) + 1)\mathrm{e}^{a(\lambda)} \to 1$$

donc

$$a(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}$$

Puisque $b(\lambda) \to +\infty$ et

$$\frac{b(\lambda) + 1}{b(\lambda)}\mathrm{e}^{b(\lambda)} = \lambda$$

donc

$$\mathrm{e}^{b(\lambda)} \sim \lambda$$

Or $\lambda \to +\infty \neq 1$ donc

$$b(\lambda) \sim \ln\lambda$$

et puisque $\ln\lambda \to +\infty \neq 1$, on a encore

$$\ln b(\lambda) \sim \ln(\ln\lambda)$$

Par suite
$$b(\lambda)^{a(\lambda)} = \mathrm{e}^{a(\lambda)\ln b(\lambda)}$$
avec
$$a(\lambda)\ln b(\lambda) \sim \frac{\ln(\ln\lambda)}{\lambda} \to 0$$
donc
$$b(\lambda)^{a(\lambda)} \to 1$$

Exercice 57 : [énoncé]
a) Par opérations
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
b) Par la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 5 existe et est de la forme
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + ax^5 + o(x^5)$$
On a alors
$$\tan(\arctan x) = x + \frac{1}{3}x^3 + ax^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) = x$$
et donc
$$a = \frac{2}{15}$$
c) Par la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 7 existe et est de la forme
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + bx^7 + o(x^7)$$
En intégrant le développement à l'ordre 6 de $1 + \tan^2 x$ on conclut
$$b = \frac{17}{315}$$