Fonctions usuelles

Radicaux

Exercice 1 [01832] [correction]
a) Etablir que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y - x|}$.
b) Ce résultat est-il encore vrai en terme de racine cubique ?

Logarithmes

Exercice 2 [01827] [correction]
Etablir, pour tout $x \geqslant 0$, l'encadrement

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$$

Exercice 3 [01828] [correction]
a) Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1 + x) \leqslant x$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 4 [01829] [correction]
Montrer que pour tout $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln \frac{a + b}{2}$$

Exercice 5 [01830] [correction]
Soit $0 < a \leqslant b$. On pose $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Etudier la monotonie de f et en déduire que $\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$.

Exercice 6 [01831] [correction]
Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier $n > 0$ est $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Exercice 7 [03626] [correction]
[Lemme de Gibbs]
a) Justifier

$$\forall x > 0, \ln x \leqslant x - 1$$

b) Soient $(p_1, \ldots, p_n)$ et $(q_1, \ldots, q_n)$ des n-uplets formés de réels strictement positifs vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1$$

Etablir

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

Puissances et exponentielles

Exercice 8 [01833] [correction]
Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \frac{1}{x} \ln x^{1/x}$.

Exercice 9 [01834] [correction]
Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

a) $(a^b)^c = a^{bc}$	b) $a^b a^c = a^{bc}$	c) $a^{2b} = (a^b)^2$
d) $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$	e) $(a^b)^c = a^{(b^c)}$	f) $(a^b)^c = (a^c)^b$?

Exercice 10 [01835] [correction]
Comparer

$$\lim_{x \to 0^+} x^{(x^x)} \text{ et } \lim_{x \to 0^+} (x^x)^x$$

Exercice 11 [01836] [correction]
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} \quad \text{c) } \lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$$

Exercice 12 [01837] [correction]
Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a) } \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}=\mathrm{e}+1 \quad \text{b) } x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x \quad \text{c) } 2^{2x}-3^{x-1/2}=3^{x+1/2}-2^{2x-1}$$

Exercice 13 [01838] [correction]
Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{2y}=a \\ 2xy=1 \end{cases}$$

Exercice 14 [03438] [correction]
Montrer

$$\forall x\in\,]0,1[\,, x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\frac{1}{2}$$

Exercice 15 [03652] [correction]
Résoudre le système

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^c=3 \end{cases}$$

d'inconnue $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

Fonctions trigonométriques

Exercice 16 [01839] [correction]
Etablir que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on a $\sin x\leqslant x$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}$.

Exercice 17 [01840] [correction]
Développer :

$$\text{a) } \cos(3a) \quad \text{b) } \tan(a+b+c)$$

Exercice 18 [01841] [correction]
Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ en observant $2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 19 [01842] [correction]
Simplifier

$$\frac{\cos p-\cos q}{\sin p+\sin q}$$

En déduire la valeur de

$$\tan\frac{\pi}{24}$$

Exercice 20 [01843] [correction]
Linéariser :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \cos^2 x & \text{b) } \cos x\sin^2 x & \text{c) } \cos^2 x\sin^2 x \\ \text{d) } \cos a\cos b & \text{e) } \cos a\cos b\cos c & \end{array}$$

Exercice 21 [01844] [correction]
Ecrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ les expressions suivantes :

$$\text{a) } \cos x+\sin x \quad \text{b) } \cos x-\sqrt{3}\sin x$$

Exercice 22 [01845] [correction]
Pour $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $b\neq 0\quad[2\pi]$, calculer simultanément

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$$

Exercice 23 [01846] [correction]
Soit $x\neq 0\quad[2\pi]$.
a) Montrer

$$\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin(nx)=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

en procédant par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
b) En exploitant les nombres complexes.

Exercice 24 [01847] [correction]
Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$ b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$
c) $\sin x + \sin 3x = 0$ d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
e) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{6}$ f) $2\sin x.\cos x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$

Exercice 25 [01848] [correction]
Résoudre l'équation

$$\tan x \tan 2x = 1$$

Exercice 26 [02645] [correction]
Calculer

$$\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$$

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 27 [01849] [correction]
Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(2\arccos x)$ b) $\cos(2\arcsin x)$ c) $\sin(2\arccos x)$
d) $\cos(2\arctan x)$ e) $\sin(2\arctan x)$ f) $\tan(2\arcsin x)$

Exercice 28 [01850] [correction]
Simplifier la fonction $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ sur son intervalle de définition.

Exercice 29 [01851] [correction]
Simplifier

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 30 [01852] [correction]
Montrer que la courbe représentative de la fonction arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, \pi/2)$.

Exercice 31 [01853] [correction]
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ à l'aide d'un changement de variable judicieux.

Exercice 32 [01854] [correction]
Etudier les fonctions suivantes afin de les représenter :

a) $f : x \mapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$ b) $f : x \mapsto \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$
c) $f : x \mapsto \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ d) $f : x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Exercice 33 [01855] [correction]
Simplifier :
a) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.
b) $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3})$.
c) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65}$.

Exercice 34 [01856] [correction]
Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

a) $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$ b) $\arcsin \tan x = x$
c) $\arccos x = \arcsin 2x$ d) $\arctan x + \arctan x\sqrt{3} = \frac{7\pi}{12}$
e) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \arctan x$ f) $\arcsin \frac{\tan x}{2} = x$

Exercice 35 [01857] [correction]
On appelle argument principal d'un complexe z non nul, l'unique $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ tel que $z = |z|\,e^{i\theta}$.
Montrer que si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ alors $\theta = 2\arctan \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ avec $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Exercice 36 [01858] [correction]
Simplifier $\arctan a + \arctan b$ pour $a, b \geqslant 0$.

Exercice 37 [01859] [correction]
Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\arctan(p+1) - \arctan(p)$$
Etudier la limite de la suite (S_n) de terme général
$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan \frac{1}{p^2+p+1}$$

Exercice 38 [02814] [correction]
Soient $x_1, \dots, x_{13}$ des réels. Montrer qu'il existe i et j dans $\{1, \dots, 13\}$ tels que $i \neq j$ et
$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant 2 - \sqrt{3}$$

Fonctions hyperboliques

Exercice 39 [01861] [correction]
Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\mathrm{sh}x \geqslant x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 40 [01862] [correction]
Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Montrer que $\mathrm{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\mathrm{th}x = \sin y$ et $\mathrm{ch}x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercice 41 [01863] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a+kb)$$

Exercice 42 [01864] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ en calculant $P_n(x)\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Exercice 43 [01865] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, observer
$$\mathrm{th}((n+1)x) - \mathrm{th}(nx) = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}(nx)\mathrm{ch}((n+1)x)}$$
Calculer
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{ch}(kx)\mathrm{ch}((k+1)x)}$$

Exercice 44 [01866] [correction]
Soient a et α deux réels.
Résoudre le système d'inconnues x et y
$$\begin{cases} \mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2a\mathrm{ch}\alpha \\ \mathrm{sh}x + \mathrm{sh}y = 2a\mathrm{sh}\alpha \end{cases}$$

Exercice 45 [01869] [correction]
Etablir :
$$\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(\mathrm{sh}x)| = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Quitte à échanger, on peut supposer $y \geqslant x$.
Par élévation au carré, l'inégalité demandée équivaut à $y - 2\sqrt{xy} + x \leqslant y - x$.
Or $y \geqslant x$ donc $\sqrt{xy} \geqslant x$ puis $y - 2\sqrt{xy} + x \leqslant y - x$ ce qui permet de conclure.
b) Quitte à échanger, on peut encore supposer $y \geqslant x$.
Par élévation au cube, l'inégalité demandée équivaut à
$y - 3\sqrt[3]{y^2x} + 3\sqrt[3]{yx^2} - x \leqslant y - x$.
Or $y \geqslant x$ donc $y^2x \geqslant yx^2$ puis $y - 3\sqrt[3]{y^2x} + 3\sqrt[3]{yx^2} - x \leqslant y - x$.

Exercice 2 : [énoncé]
L'étude des variations des fonctions $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ montre que celles-ci sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$, puisqu'elles s'annulent en 0, on peut conclure.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Posons $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$. f est dérivable, $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{x}{1+x}$.
Le tableau de variation de f donne f positive.
b) D'une part

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \leqslant \mathrm{e}^{n\times\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}$$

et d'autre part

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1-\frac{1}{n})} \geqslant \mathrm{e}$$

car

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$$

Exercice 4 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

or

$$a + b = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \geqslant 2\sqrt{ab}$$

donc

$$\ln\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geqslant 0$$

Exercice 5 : [énoncé]
$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\ln(1+bx)^2}$ avec $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.
$g(0) = 0$ et $g'(x) = ab\ln\frac{1+bx}{1+ax} \geqslant 0$ donc g est positive et par suite f croissante.
$\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$ donc $f\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{a}\right)$ ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 6 : [énoncé]
Notons m le nombre de décimale dans l'écriture de n.
On a $10^{m-1} \leqslant n < 10^m$ donc $m - 1 \leqslant \log_{10} n < m$ puis $m = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Exercice 7 : [énoncé]
a) Une étude de la fonction $x \mapsto \ln x - x + 1$ assure l'inégalité écrite.
De plus on observe qu'il y a égalité si, et seulement si, $x = 1$.
b) On étudie la différence

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^n p_i \ln\frac{q_i}{p_i}$$

Par l'inégalité précédente

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \leqslant \sum_{i=1}^n p_i\left(\frac{q_i}{p_i} - 1\right) = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) = 0$$

De plus il y a égalité si, et seulement si,

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, p_i = q_i$$

Cette inégalité est fameuse lorsqu'on s'intéresse à l'entropie d'une source d'information...

Exercice 8 : [énoncé]
$(\exp x^2)^{\frac{\ln x^{1/x}}{x}} = x$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) c) f)

Exercice 10 : [énoncé]
Quand $x \to 0^+$

$$x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x) = \exp(\exp(x \ln x) \ln x) \to 0$$

et

$$(x^x)^x = \exp(x \ln x^x) = \exp(x^2 \ln x) \to 1$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x} = 1$
b) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sqrt{x}} = 1$
c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/x} = 0$.

Exercice 12 : [énoncé]
a) $\mathcal{S} = \{0, 1\}$
b) $\mathcal{S} = \{0, 1, 4\}$
c) Obtenir $2^{2x-3} = 3^{x-3/2}$ puis $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) $x = 1/2, y = \sqrt{2}/5$
b) Obtenir un système somme/produit en x et $2y$ puis le résoudre.

Exercice 14 : [énoncé]
On a

$$x^x(1-x)^{1-x} = \exp \varphi(x)$$

avec

$$\varphi(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$$

La fonction φ est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\varphi'(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

On en déduit que φ est décroissante sur $]0, 1/2]$ puis croissante sur $[1/2, 1[$ donc

$$\forall x \in \left]0, 1\right[, \varphi(x) \geqslant \varphi(1/2) = \ln(1/2)$$

Exercice 15 : [énoncé]
Il est clair que le triplet nul est solution de ce système.
Inversement, soit (a, b, c) solution. Posons $x = \mathrm{e}^a$, $y = \mathrm{e}^b$ de sorte que $\mathrm{e}^c = \mathrm{e}^{-(a+b)} = 1/xy$.
On a donc $x, y > 0$ et

$$x + y + \frac{1}{xy} = 3$$

Pour $y > 0$ fixé, étudions la fonction $f : x \mapsto x + y + 1/xy$.
Cette fonction est dérivable et admet un minimum strict en $x = 1/\sqrt{y}$ valant $g(y) = y + 2/\sqrt{y}$.
La fonction g est dérivable et admet un minimum strict en $y = 1$ valant $g(1) = 3$.
On en déduit que si $(x, y) \neq (1, 1)$ alors $f(x, y) > 3$ et donc

$$f(x, y) = 3 \Rightarrow x = y = 1$$

On peut alors conclure $a = b = c = 0$.

Exercice 16 : [énoncé]
Posons $f(x) = x - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
f est dérivable, $f' \geqslant 0$ et $f(0) = 0$ donc f est positive.
Posons $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
g est deux fois dérivable, $g'' \geqslant 0$, $g'(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de g' puis de g. On conclut g positive.

Exercice 17 : [énoncé]
a) $\cos(3a) = \cos(2a + a)$ puis

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

b) $\tan(a + b + c) = \tan((a + b) + c)$ puis

$$\tan(a + b + c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan c \tan a}$$

Exercice 18 : [énoncé]
On sait $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc

$$2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puis

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

et enfin

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

Exercice 19 : [énoncé]
Par factorisation

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}} = -\tan\frac{p-q}{2}$$

Pour $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$ on obtient

$$\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

Exercice 20 : [énoncé]
a) $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$.
b) $\cos x \sin^2 x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x$.
c) $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$
d) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$
e) $\cos a \cos b \cos c =$
$\frac{1}{4}\left(\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a-b-c)\right)$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$.
b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x + \pi/3)$.

Exercice 22 : [énoncé]
En passant aux nombres complexes

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{i.(a+kb)}$$

Par sommation géométrique puis factorisation de l'exponentielle équilibrée

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{i.(a+kb)} = \mathrm{e}^{i.a}\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)b}-1}{\mathrm{e}^{ib}-1} = \mathrm{e}^{i(a+nb/2)}\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+k.b) = \frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\cos(a+\frac{nb}{2})$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+k.b) = \frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\sin(a+\frac{nb}{2})$$

Exercice 23 : [énoncé]
a) L'hérédité de la récurrence s'obtient via :

$$\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2} + \sin(n+1)x\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{nx}{2} + 2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}$$

en exploitant

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

avec

$$p = \frac{(n+2)x}{2} \text{ et } q = \frac{nx}{2}$$

b) Par les nombres complexes

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx}) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\right)$$

donc

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \sin\frac{(n+1)x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos(2x - \pi/3) = \cos(x + \pi/4)$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{7\pi}{12}\quad[2\pi] \text{ et } x = \frac{\pi}{36}\quad\left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

b) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2$$

soit encore

$$2\cos^2 x \sin^2 x = 0$$

On obtient pour solutions

$$x = 0 \quad [\pi/2]$$

c) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sin 2x \cos x = 0$$

On obtient pour solutions

$$x = 0 \quad [\pi/2]$$

d) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sin(2x)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

On obtient pour solutions

$$x = 0 \quad [\pi/2]\,, x = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \text{ et } x = -\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

e) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{6}$$

soit encore

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{12} \quad [2\pi] \text{ et } x = -\frac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$$

f) L'équation étudiée équivaut à

$$2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 0$$

soit encore

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{3} \quad [\pi] \text{ et } x = -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]$$

Exercice 25 : [énoncé]
Pour $x \neq \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ et $x \neq \frac{\pi}{4} \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$,
$\tan x \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \left[\frac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 26 : [énoncé]
En linéarisant et en faisant quelques transformations angulaires de simplification

$$\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9} = \frac{7}{4}$$

Exercice 27 : [énoncé]
a) $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$.
b) $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2 \arcsin x = 1 - 2x^2$.
c) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$
d) $\cos(2\arctan x) = 2\cos^2 \arctan x - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
e) $\sin(2\arctan x) = 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
f) $\tan(2\arcsin x) = \frac{2\tan(\arcsin x)}{1-\tan^2(\arcsin x)} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

Exercice 28 : [énoncé]
$f : x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ est définie sur $[-1, 1]$.
Pour $x \in [-1, 1]$, posons $\theta = \arccos x$, on a alors
$f(x) = \arccos(4\cos^3 \theta - 3\cos\theta) = \arccos(\cos 3\theta)$.
Si $\theta \in [0, \pi/3]$ i.e. $x \in [1/2, 1]$ alors $f(x) = 3\theta = 3\arccos x$.
Si $\theta \in [\pi/3, 2\pi/3]$ i.e. $x \in [-1/2, 1/2]$ alors $f(x) = 2\pi - 3\theta = 2\pi - 3\arccos x$.
Si $\theta \in [2\pi/3, \pi]$ i.e. $x \in [-1, -1/2]$ alors $f(x) = 3\theta - 2\pi = 3\arccos x - 2\pi$.

Exercice 29 : [énoncé]
La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable et à valeurs dans $]-1, 1[$ donc
$x \mapsto \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable et

$$\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2}$$

On en déduit

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x + C$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $C = 0$.

Exercice 30 : [énoncé]
Calculons $\arccos(x) + \arccos(-x)$.
On a $\cos(\arccos(x) + \arccos(-x)) = -x^2 - (1 - x^2) = -1$ et
$\arccos(x) + \arccos(-x) \in [0, 2\pi]$ donc $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$ ce qui permet de justifier la symétrie avancée.

Exercice 31 : [énoncé]
Quand $x \to 0^+$: $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{y}{\sqrt{1-\cos(y)}}$ avec $y = \arccos(1 - x) \to 0^+$.
Or $1 - \cos(y) \sim \frac{y^2}{2}$ donc $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{y}{\sqrt{1-\cos(y)}} \to \sqrt{2}$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) f est 2π périodique.
Sur $[-\pi/2, 0]$: $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arccos(\cos x) = -x$ donc $f(x) = 0$.
Sur $[0, \pi/2]$: $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arccos(\cos(x)) = x$ donc $f(x) = 2x$.
Sur $[\pi/2, \pi]$: $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ et $\arccos(\cos x) = x$ donc $f(x) = \pi$.
Sur $[-\pi, -\pi/2]$: $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$ et $\arccos(\cos(x)) = -x$ donc $f(x) = -2x - \pi$.
b) f est 2π périodique.
Sur $[0, \pi/2]$, $f(x) = x + x = 2x$. Sur $[\pi/2, \pi]$, $f(x) = \pi - x + \pi - x = 2\pi - 2x$.
Sur $[-\pi/2, 0]$, $f(x) = x - x = 0$. Sur $[-\pi, -\pi/2]$, $f(x) = -x - \pi + \pi + x = 0$.
c) $f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \arccos|\cos(x/2)|$. f est 2π périodique, paire, sur $[0, \pi]$ $f(x) = x/2$.
d) $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \arctan|\tan x/2|$. f est 2π périodique, paire. Sur $[0, \pi[$, $f(x) = x/2$. On retrouve la fonction ci-dessus.

Exercice 33 : [énoncé]
a) Posons $\theta = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.
On a $0 \leqslant \theta < 3\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/2$ et $\tan\theta = 1$ donc $\theta = \pi/4$.
b) Posons $\theta = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan\left(2 + \sqrt{3}\right)$.
On a $3\arctan 1 = \frac{3\pi}{4} \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$ et $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\theta = \frac{7\pi}{6}$.
c) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right) = \frac{3}{5}\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\frac{5}{13} = \frac{16}{65}$ et
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{16}{65}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{16}{65}\right) = \frac{16}{65}$.
Or $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{16}{65} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où l'égalité
$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 34 : [énoncé]
a) $\mathcal{S} = \{63/65\}$.
b) $\mathcal{S} = \{0\}$.
c) $\mathcal{S} = \left\{1/\sqrt{5}\right\}$.
d) $\mathcal{S} = \{1\}$.
e) $\mathcal{S} = \left\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$.
f) $\mathcal{S} = \{0, \pi/3, -\pi/3\}$.

Exercice 35 : [énoncé]
Posons θ l'argument principal de $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. On a $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Posons $\alpha = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$. On a $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right[$, $t = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$,
$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et
$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{y(x+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donc $\alpha = \theta$.

Exercice 36 : [énoncé]
On a $\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}$ donc
$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \quad [\pi]$.
Si $ab = 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \pi/2$.
Si $ab < 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.
Si $ab > 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$.

Exercice 37 : [énoncé]
Posons $\theta = \arctan(p + 1) - \arctan(p)$. Comme $0 \leqslant \arctan p \leqslant \arctan(p + 1) < \pi/2$ on a $\theta \in [0, \pi/2[$.
De plus $\tan\theta = \frac{1}{p^2+p+1}$ donc

$$\theta = \arctan\frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Par télescopage $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\frac{1}{p^2+p+1} = \arctan(n + 1) \to \pi/2$.

Exercice 38 : [énoncé]
Posons $\alpha_i = \arctan x_i$. Les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{13}$ évoluent dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.
En découpant cet intervalle en 12 intervalles contiguës de longueur $\pi/12$, on peut affirmer que deux éléments parmi les $\alpha_1, \ldots, \alpha_{13}$ appartiennent au même intervalle (c'est le principe des tiroirs : s'il y a $n+1$ chaussettes à répartir dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir contenant deux chaussettes). Ainsi, il existe $i \neq j$ vérifiant

$$0 \leqslant \alpha_i - \alpha_j \leqslant \frac{\pi}{12}$$

et donc

$$0 \leqslant \tan(\alpha_i - \alpha_j) \leqslant \tan\frac{\pi}{12}$$

Or

$$\tan(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j}$$

et

$$\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

On peut donc conclure.

Exercice 39 : [énoncé]
Posons $f(x) = \mathrm{sh}x - x$ définie sur $\mathbb{R}^+$. f est dérivable, $f' \geqslant 0$ et $f(0) = 0$ donc f est positive.
Posons $g(x) = \mathrm{ch}x - 1 - \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. g est deux fois dérivable, $g'' \geqslant 0$, $g'(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de g' puis de g. On conclut g positive.

Exercice 40 : [énoncé]
$\mathrm{th}\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1} = \frac{\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{y}{2}\sin\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{y}{2}$.
$\mathrm{th}x = \frac{\tan^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1} = \sin^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \sin y$.
$\mathrm{ch}x = \frac{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sin^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin(y+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos y}$.

Exercice 41 : [énoncé]
Posons

$$C = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kb) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a+kb)$$

On a

$$C + S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{a+kb} = \begin{cases} \mathrm{e}^a \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)b}}{1-\mathrm{e}^b} & \text{si } b \neq 0 \\ (n+1)\mathrm{e}^a & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

et

$$C - S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-(a+kb)} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-a} \frac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)b}}{1-\mathrm{e}^{-b}} & \text{si } b \neq 0 \\ (n+1)\mathrm{e}^{-a} & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

On en déduit C et S.

Exercice 42 : [énoncé]
Si $x = 0$ alors $P_n(x) = 1$, sinon $P_n(x)\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ldots = \frac{1}{2^n}\mathrm{sh}(x)$ donc $P_n(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{2^n \mathrm{sh}(x/2^n)}$.

Exercice 43 : [énoncé]
Après quelques calculs

$$\mathrm{th}((n+1)x) - \mathrm{th}(nx) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}(nx)\,\mathrm{ch}((n+1)x)}$$

Par télescopage

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{ch}(kx)\mathrm{ch}((k+1)x)} = \frac{\mathrm{th}((n+1)x)}{\mathrm{sh}(x)}$$

Exercice 44 : [énoncé]
Si $a < 1$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si $a = 1$ alors $\mathcal{S} = \{(\alpha, \alpha)\}$.
Si $a > 1$ alors en faisant apparaître un système somme produit :

$$\mathcal{S} = \left\{(\ln(a - \sqrt{a^2-1}) + \alpha, \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \alpha), (\ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \alpha, \ln(a - \sqrt{a^2-1})\right.$$

Exercice 45 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(\mathrm{sh}x) - \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{ch}x}{1+\mathrm{sh}^2 x} - \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x}\frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\mathrm{ch}x} - \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\frac{1}{\mathrm{sh}x} = 0$$

Donc f est constante sur $]0,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}^+$ par continuité.
Puisque $f(0)=0$, on peut conclure que

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, |\arctan(\mathrm{sh}x)| = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$$

Par parité, le résultat se prolonge aussi à $x\in\mathbb{R}^-$.