

# Limite et continuité

## Généralités sur les fonctions

### Exercice 1 [01779] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \circ f$  est croissante tandis que  $f \circ f \circ f$  est strictement décroissante.

Montrer que  $f$  est strictement décroissante.

### Exercice 2 [01780] [correction]

Etudier la parité de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

### Exercice 3 [01783] [correction]

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction croissante. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

### Exercice 4 [00501] [correction]

Soit  $f$  une fonction croissante de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .

a) Montrer que s'il existe  $x \in [0, 1]$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  tels que  $f^k(x) = x$  alors  $x$  est un point fixe pour  $f$ .

b) Montrer que  $f$  admet un point fixe.

## Calcul de limites

### Exercice 5 [01784] [correction]

Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln(\ln x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\arccos x} \end{array}$$

### Exercice 6 [01785] [correction]

Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos e^x}{x^2 + 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \arctan x}{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor 1/x \rfloor & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \lfloor 1/x \rfloor \end{array}$$

### Exercice 7 [01786] [correction]

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor 1/x \rfloor \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor 1/x \rfloor \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \lfloor 1/x \rfloor$$

## Propriétés des limites

### Exercice 8 [01789] [correction]

a) Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique convergeant en  $+\infty$ . Montrer que  $g$  est constante.

b) Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f$  converge en  $+\infty$ ,  $g$  périodique et  $f + g$  croissante.

Montrer que  $g$  est constante.

### Exercice 9 [01788] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$  périodique (avec  $T > 0$ ) telle que  $\lim_{+\infty} f$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $f$  est constante.

### Exercice 10 [01787] [correction]

Soient  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante.

Montrer que l'application  $x \mapsto \lim_{x^+} f$  est croissante.

## Etude de continuité

### Exercice 11 [01793] [correction]

Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

**Exercice 12** [ 01794 ] [correction]

Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

**Exercice 13** [ 01795 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est totalement discontinue.

**Exercice 14** [ 01796 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $x \mapsto f(x)$  est croissante et  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante.

Montrer que  $f$  est continue.

**Exercice 15** [ 01797 ] [correction]

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues.

Montrer que  $\sup(f, g)$  est une fonction continue sur  $I$ .

**Exercice 16** [ 00240 ] [correction]

Étudier la continuité de la fonction

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

## Théorème des valeurs intermédiaires

**Exercice 17** [ 01803 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\lim_{-\infty} f = -1$  et  $\lim_{+\infty} f = 1$ . Montrer que  $f$  s'annule.

**Exercice 18** [ 01800 ] [correction]

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**Exercice 19** [ 03719 ] [correction]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

a) Montrer que si  $f([a, b]) \subset [a, b]$  alors  $f$  admet un point fixe.

b) Montrer que si  $[a, b] \subset f([a, b])$  alors  $f$  admet un point fixe.

**Exercice 20** [ 01806 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et décroissante.

Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.

**Exercice 21** [ 01807 ] [correction]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, positive et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$$

Montrer qu'il existe  $\alpha \in [0, +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

**Exercice 22** [ 01801 ] [correction]

Montrer que les seules applications continues de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{Z}$  sont les fonctions constantes.

**Exercice 23** [ 01804 ] [correction]

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0$$

Montrer que  $f = g$  ou  $f = -g$ .

**Exercice 24** [ 01809 ] [correction]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que  $|f| \xrightarrow{+\infty} +\infty$ . Montrer que

$$f \xrightarrow{+\infty} +\infty \text{ ou } f \xrightarrow{+\infty} -\infty.$$

**Exercice 25** [ 01802 ] [correction]

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $p, q \in \mathbb{R}^+$ .

Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$p.f(a) + q.f(b) = (p + q).f(c)$$

**Exercice 26** [ 01805 ] [correction]

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(0) = f(1)$ .  
Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $\alpha \in [0, 1 - 1/n]$  tel que

$$f(\alpha + 1/n) = f(\alpha)$$

**Exercice 27** [ 00242 ] [correction]

Soient  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continues vérifiant

$$f \circ g = g \circ f$$

Montrer qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$  telle que  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**Exercice 28** [ 01808 ] [correction]

Notre objectif dans cet exercice est d'établir la proposition :  
Toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et injective est strictement monotone.  
Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose :

$$\exists (x_1, y_1) \in I^2, x_1 < y_1 \text{ et } f(x_1) \geq f(y_1) \text{ et } \exists (x_2, y_2) \in I^2, x_2 < y_2 \text{ et } f(x_2) \leq f(y_2)$$

Montrer que la fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

s'annule. Conclure.

**Exercice 29** [ 03350 ] [correction]

Montrer la surjectivité de l'application

$$z \in \mathbb{C} \mapsto z \exp(z) \in \mathbb{C}$$

## Théorème des bornes atteintes

**Exercice 30** [ 01813 ] [correction]

Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur  $\mathbb{R}$  est bornée.

**Exercice 31** [ 01812 ] [correction]

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.  
Montrer que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bornées.

**Exercice 32** [ 01810 ] [correction]

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha$$

**Exercice 33** [ 01811 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$$

Montrer que  $f$  admet un minimum absolu.

**Exercice 34** [ 01815 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que chaque  $y \in \mathbb{R}$  admet au plus deux antécédents par  $f$ .

Montrer qu'il existe un  $y \in \mathbb{R}$  possédant exactement un antécédent.

**Exercice 35** [ 03437 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $T$ -périodique ( $T > 0$ ).

a) Montrer que  $f$  est bornée.

b) Justifier l'existence de  $x \in \mathbb{R}$  tel que

$$f([x, x + T/2]) = \text{Im} f$$

**Exercice 36** [ 03722 ] [correction]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant  $f(a) = f(b)$ .

Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \sigma \in [0, \alpha], \exists x \in [a, b - \sigma], f(x + \sigma) = f(x)$$

**Exercice 37** [ 04099 ] [correction]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue possédant une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .

Montrer que la fonction  $f$  est bornée.

## Bijection continue

### Exercice 38 [01816] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

- a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $] -1, 1[$ .  
 b) Déterminer, pour  $y \in ] -1, 1[$  une expression de  $f^{-1}(y)$  analogue à celle de  $f(x)$ .

### Exercice 39 [01817] [correction]

Soient  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement croissante.

Montrer que  $f$  est continue si, et seulement si,  $f(]a, b[) = \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$ .

### Exercice 40 [03105] [correction]

Soit  $\alpha$  un réel compris au sens large entre 0 et  $1/e$ .

- a) Démontrer l'existence d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x + 1)$$

- b) Si  $\alpha = 1/e$ , déterminer deux fonctions linéairement indépendantes vérifiant la relation précédente.

### Exercice 41 [03401] [correction]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  continue vérifiant

$$f \circ f = \text{Id}$$

Déterminer  $f$ .

## Continuité et équation fonctionnelle

### Exercice 42 [01790] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que  $f$  est une fonction constante.

### Exercice 43 [01791] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 et en 1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Montrer que  $f$  est constante.

### Exercice 44 [00244] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

Montrer que  $f$  est constante.

### Exercice 45 [01792] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et prenant la valeur 1 en 0.

On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$$

Déterminer  $f$ .

### Exercice 46 [01798] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

- a) Calculer  $f(0)$  et montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .  
 b) Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .  
 c) Etablir que pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(r) = ar$  avec  $a = f(1)$ .  
 d) Conclure que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax$ .

### Exercice 47 [00243] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On suppose en outre que la fonction  $f$  est continue en un point  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
 Déterminer la fonction  $f$ .

**Exercice 48** [ 01799 ] [correction]

On cherche les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose  $f$  solution et  $f(0) = f(1) = 0$ .

Montrer que  $f$  est périodique et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(2x)$$

En déduire que  $f$  est nulle.

b) Déterminer toutes les fonctions  $f$  solutions.

**Exercice 49** [ 03721 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose  $f(0) = 0$ . Vérifier

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

b) On revient au cas général, déterminer  $f$ .

## Fonctions lipschitziennes

**Exercice 50** [ 01781 ] [correction]

On rappelle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|\sin x| \leq |x|$ .

Montrer que la fonction  $x \mapsto \sin x$  est 1 lipschitzienne.

**Exercice 51** [ 01782 ] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $k$  lipschitzienne (avec  $k \in [0, 1[$ ) telle que  $f(0) = 0$ .

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  la suite réelle déterminée par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 52** [ 01814 ] [correction]

Soient  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

On pose

$$\varphi(t) = \sup_{x \in [0,1]} (f(x) + tg(x))$$

Montrer que  $\varphi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle y est lipschitzienne.

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Soient  $x < y \in \mathbb{R}$ .  $f(x) \leq f(y) \Rightarrow f \circ f \circ f(x) \leq f \circ f \circ f(y) \Rightarrow y \leq x$   
car  $f \circ f$  et croissante et  $f \circ f \circ f$  strictement décroissante.  
Par contraposée  $x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$  et donc  $f$  est strictement décroissante.

### Exercice 2 : [énoncé]

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

donc la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  qui est un intervalle symétrique par rapport à 0.

En multipliant par la quantité conjuguée

$$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)$$

donc

$$f(-x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x)$$

La fonction  $f$  est donc impaire.

### Exercice 3 : [énoncé]

$\{x \in [0, 1] / f(x) \geq x\}$  est non vide (0 y appartient) et est majoré (par 1).

On peut donc poser  $\alpha = \sup\{x \in [0, 1] / f(x) \geq x\}$ .

Pour tout  $x > \alpha$ , on a  $f(x) < x$  donc  $f(\alpha) \leq f(x) < x$ .

Puisque  $f(\alpha) \leq x$  pour tout  $x > \alpha$ , on a aussi  $f(\alpha) \leq \alpha$ .

Pour tout  $x < \alpha$ , il existe  $t \in ]x, \alpha]$  tel que  $f(t) \geq t$  donc  $f(\alpha) \geq f(t) \geq t \geq x$ .

Puisque ceci vaut pour tout  $x < \alpha$ , on a aussi  $f(\alpha) \geq \alpha$ .

Finalement  $f(\alpha) = \alpha$ .

On peut aussi procéder par dichotomie.

### Exercice 4 : [énoncé]

a) Si  $f(x) > x$  alors par croissance de  $f$ ,

$$f^k(x) \geq f^{k-1}(x) \geq \dots \geq f(x) > x$$

ce qui est absurde. Une étude analogue contredit  $f(x) < x$ .

b) On a  $f(0) \geq 0$  et  $f(1) \leq 1$ . Par dichotomie, on peut construire deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  vérifiant

$$f(a_n) \geq a_n \text{ et } f(b_n) \leq b_n$$

On initie les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  en posant  $a_0 = 0$  et  $b_0 = 1$ .

Une fois les termes  $a_n$  et  $b_n$  déterminés, on introduit  $m = (a_n + b_n)/2$ .

Si  $f(m) \geq m$  on pose  $a_{n+1} = m$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

Sinon, on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = m$ .

Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ainsi déterminées sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune  $c$ . Puisque  $a_n \leq c \leq b_n$ , on a par croissance

$$f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$$

et donc

$$a_n \leq f(c) \leq b_n$$

Or  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers  $c$  donc par encadrement

$$f(c) = c$$

On peut aussi décrire un point fixe de  $f$  en considérant

$$c = \sup\{x \in [0, 1], f(x) \geq x\}$$

Les deux questions de cet oral ne semblent pas être liées.

### Exercice 5 : [énoncé]

a) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1$$

b) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} = \frac{1 - 1/\sqrt{x}}{\frac{\ln x}{x} + 1} \rightarrow 1$$

c) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$x^x = e^{x \ln x} = e^X$$

avec  $X = x \ln x \rightarrow 0$  donc  $x^x \rightarrow 1$ .

d) Quand  $x \rightarrow 1^+$ ,

$$\ln x \cdot \ln(\ln x) = X \ln X$$

avec  $X = \ln x \rightarrow 0$  donc  $\ln x \cdot \ln(\ln x) \rightarrow 0$

e) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^X$$

avec  $X = \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$  donc  $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$ .

f) Quand  $x \rightarrow 1$ ,

$$\frac{1-x}{\arccos x} = \frac{1-\cos y}{y} = \frac{2\sin^2(y/2)}{y} = \sin(y/2) \frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

avec  $y = \arccos x \rightarrow 0$  donc  $\sin y/2 \rightarrow 0$  et  $\frac{\sin y/2}{y/2} \rightarrow 1$  puis  $\frac{1-x}{\arccos x} \rightarrow 0$ .

**Exercice 6 : [énoncé]**

a) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$$

b) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\left| \frac{x \cos e^x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 0$$

c) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$e^{x-\sin x} \geq e^{x-1} \rightarrow +\infty$$

d) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\left| \frac{x + \arctan x}{x} - 1 \right| \leq \frac{\arctan x}{x} \leq \frac{\pi}{2x} \rightarrow 0$$

e) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$1/x - 1 \leq [1/x] \leq 1/x$$

donc

$$|[1/x] - 1/x| \leq 1$$

puis

$$|x [1/x] - 1| \leq |x| \rightarrow 0$$

f) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $1/x \rightarrow 0$  donc  $[1/x] = 0$  puis  $x [1/x] = 0 \rightarrow 0$ .

**Exercice 7 : [énoncé]**

a) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$E [1/x] \geq \frac{1}{x} - 1 \rightarrow +\infty$$

b) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$1/x - 1 \leq [1/x] \leq 1/x$$

donne

$$1 - x \leq x [1/x] \leq 1$$

puis  $x [1/x] \rightarrow 1$ .

Quand  $x \rightarrow 0^-$ ,

$$1/x - 1 \leq [1/x] \leq 1/x$$

donne

$$1 \leq [1/x] \leq 1 - x$$

puis à nouveau  $x [1/x] \rightarrow 1$ .

c) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$|x^2 [1/x]| \leq \frac{x^2}{x} \rightarrow 0$$

via

$$0 \leq [1/x] \leq 1/x$$

et quand  $x \rightarrow 0^-$ ,

$$|x^2 [1/x]| \leq x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$$

via

$$\frac{1}{x} - 1 \leq [1/x] \leq 0$$

**Exercice 8 : [énoncé]**

Notons  $T$  une période strictement positive de  $g$ .

a) Notons  $\ell$  la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(x + nT) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  donc par unicité de la limite :  $g(x) = \ell$ . Ainsi

$g$  est constante.

b) Notons  $\ell$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Puisque  $f + g$  est croissante  $f + g \xrightarrow[+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Si  $\ell' = +\infty$  alors  $g \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . La démarche du a., montre l'impossibilité de ceci.

Si  $\ell' \in \mathbb{R}$  alors la démarche du a., permet de conclure.

**Exercice 9 : [énoncé]**

Posons  $\ell = \lim_{+\infty} f$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $f(x) = f(x + nT)$ .

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $x + nT \rightarrow +\infty$  et donc  $f(x + nT) \rightarrow \ell$ .

Or  $f(x + nT) = f(x) \rightarrow f(x)$  donc par unicité de la limite  $\ell = f(x)$ .

Finalement  $f$  est constante.

**Exercice 10 :** [énoncé]

L'application  $x \mapsto \lim_{x^+} f$  est bien définie car  $f$  est croissante ce qui assure l'existence de  $\lim_{x^+} f$ .

Soient  $x, y \in ]a, b[$  tels que  $x < y$ .

Pour  $t \in ]x, y[$ , on a  $f(t) \leq f(y)$ . Quand  $t \rightarrow x^+$ , on obtient  $\lim_{x^+} f \leq f(y)$  or  $f(y) \leq \lim_{y^+} f$  donc  $\lim_{x^+} f \leq \lim_{y^+} f$ .

**Exercice 11 :** [énoncé]

Par opération  $f$  est continue sur chaque  $I_k = ]k, k + 1[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Il reste à étudier la continuité en  $a \in \mathbb{Z}$ .

Quand  $x \rightarrow a^+$  :  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]} \rightarrow a = f(a)$  car  $E(x) \rightarrow a$ .

Quand  $x \rightarrow a^-$  :  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]} \rightarrow a - 1 + 1 = a = f(a)$  car  $[x] \rightarrow a - 1$ .

Par continuité à droite et à gauche,  $f$  est continue en  $a$ .

Finalement  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 12 :** [énoncé]

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

Cas  $a \notin \mathbb{Z}$ .

Au voisinage de  $a$ ,

$$f(x) = [a] + (x - [a])^2$$

donc  $f$  est continue en  $a$ .

Cas  $a \in \mathbb{Z}$ .

Quand  $x \rightarrow a^+$ ,  $f(x) \rightarrow a = f(a)$ .

Quand  $x \rightarrow a^-$ ,  $f(x) \rightarrow a - 1 + (a - (a - 1))^2 = a = f(a)$ .

Donc  $f$  est continue en  $a$ . Finalement  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 13 :** [énoncé]

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

Il existe une suite  $(u_n)$  de nombre rationnels et une suite  $(v_n)$  de nombres irrationnels telles que  $u_n, v_n \rightarrow a$ .

On a  $f(u_n) = 1 \rightarrow 1$  et  $f(v_n) = 0 \rightarrow 0$  donc  $f$  n'a pas de limite en  $a$  et est donc discontinue en  $a$ .

**Exercice 14 :** [énoncé]

Soit  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Puisque  $f$  est croissante  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existent, sont finies et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Puisque  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x}$  existent, sont finies et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(a)}{a} \leq \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x}.$$

Par opérations sur les limites  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

donc  $\frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \frac{1}{a} f(a) \leq \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  car  $a > 0$ .

Par suite  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et donc  $f$  est continue.

**Exercice 15 :** [énoncé]

$\sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2} |f(x) - g(x)| + \frac{1}{2} (f(x) + g(x))$  est continue par opérations.

**Exercice 16 :** [énoncé]

La suite  $(u_n)$  avec  $u_n = \frac{x^n}{n!}$  converge vers 0 donc  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

Pour  $n \geq [x]$  on a  $n + 1 \geq x$  donc  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Pour  $n < [x]$  on a  $n + 1 \leq x$  donc  $u_{n+1} \geq u_n$ .

Par suite

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{[x]}}{[x]!}$$

$f$  est clairement continue en tout  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$  et continue à droite en tout  $a \in \mathbb{N}$ .

Reste à étudier la continuité à gauche en  $a \in \mathbb{N}^*$ .

Quand  $x \rightarrow a^-$  :

$$f(x) = \frac{x^{[x]}}{[x]!} = \frac{x^{a-1}}{(a-1)!} \rightarrow \frac{a^{a-1}}{(a-1)!} = \frac{a^a}{a!} = f(a)$$

Finalement  $f$  est continue.

**Exercice 17 :** [énoncé]

Puisque  $\lim_{-\infty} f = -1$ ,  $f$  prend des valeurs négatives, puisque  $\lim_{+\infty} f = 1$ ,  $f$  prend des valeurs positives.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre celles-ci,  $f$  s'annule.



**Exercice 18 :** [énoncé]

Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x) = f(x) - x$ . Un point fixe de  $f$  est une valeur d'annulation de  $\varphi$ .

$\varphi$  est continue,  $\varphi(0) = f(0) \geq 0$  et  $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$  donc, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\varphi$  s'annule.

**Exercice 19 :** [énoncé]

Dans les deux études, on introduit  $\varphi : x \mapsto f(x) - x$  définie et continue sur  $[a, b]$ .

L'objectif est de montrer que  $\varphi$  s'annule

a) Si  $f([a, b]) \subset [a, b]$  alors  $f(a) \in [a, b]$  et donc  $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$ .

De même  $\varphi(b) \leq 0$  et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'alors  $\varphi$  s'annule.

b) Si  $[a, b] \subset f([a, b])$  alors il existe  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ . On a alors  $\varphi(\alpha) = \alpha - \alpha = 0$ .

De même en introduisant  $\beta$  tel que  $f(\beta) = b$ , on a  $\varphi(\beta) \geq 0$  et l'on peut à nouveau affirmer que la fonction continue  $\varphi$  s'annule.

**Exercice 20 :** [énoncé]

Unicité : Soit  $g : x \mapsto f(x) - x$ .  $g$  est strictement décroissante donc injective et ne peut donc s'annuler qu'au plus une fois.

Existence : Par l'absurde, puisque  $g$  est continue, si elle ne s'annule pas elle est strictement positive ou négative.

Si  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$  alors  $f(x) > x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  ce qui est absurde puisque

$$\lim_{+\infty} f = \inf_{\mathbb{R}} f.$$

Si  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$  alors  $f(x) < x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$  ce qui est absurde puisque

$$\lim_{-\infty} f = \sup_{\mathbb{R}} f.$$

**Exercice 21 :** [énoncé]

Si  $f(0) = 0$  alors  $\alpha = 0$  convient.

Sinon, considérons

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

La fonction  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .

Puisque  $f(0) > 0$ , par opérations sur les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ .

Puisque  $g$  est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à 1, on peut affirmer par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}^{+\ast}$  tel que  $g(\alpha) = 1$  d'où  $f(\alpha) = \alpha$ .

**Exercice 22 :** [énoncé]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  continue.

Par l'absurde : Si  $f$  n'est pas constante alors il existe  $a < b$  tel que  $f(a) \neq f(b)$ . Soit  $y$  un nombre non entier compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $y = f(x)$  et donc  $f$  n'est pas à valeurs entières. Absurde.

**Exercice 23 :** [énoncé]

Posons  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = f(x)/g(x)$$

$\varphi$  est continue et

$$\forall x \in I, |\varphi(x)| = 1$$

Montrons que  $\varphi$  est constante égale à 1 ou  $-1$  ce qui permet de conclure.

Par l'absurde, si  $\varphi$  n'est pas constante égale à 1 ni à  $-1$  alors il existe  $a, b \in I$  tel que  $\varphi(a) = 1 \geq 0$  et  $\varphi(b) = -1 \leq 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\varphi$  s'annule. Absurde.

**Exercice 24 :** [énoncé]

Pour  $a$  assez grand,  $|f(x)| \geq 1$  sur  $[a, +\infty[$  donc  $f$  ne s'annule pas sur  $[a, +\infty[$ . Etant continue,  $f$  est alors de signe constant sur  $[a, +\infty[$  et la relation  $f = \pm |f|$  permet alors de conclure.

**Exercice 25 :** [énoncé]

Si  $p = q = 0$ , n'importe quel  $c$  fait l'affaire.

Sinon posons

$$y = \frac{pf(a) + qf(b)}{p + q}$$

Si  $f(a) \leq f(b)$  alors

$$f(a) = \frac{pf(a) + qf(a)}{p + q} \leq y \leq \frac{pf(b) + qf(b)}{p + q} = f(b)$$

Si  $f(b) \leq f(a)$  alors, comme ci-dessus  $f(b) \leq y \leq f(a)$ .

Dans les deux cas,  $y$  est une valeur intermédiaire à  $f(a)$  et  $f(b)$  donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $y = f(c)$ .

**Exercice 26 :** [énoncé]

Posons  $\varphi : [0, 1 - 1/n] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = f(x + 1/n) - f(x)$$

La fonction  $\varphi$  est continue.

Si  $\varphi$  est de signe strictement constant alors

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f((k+1)/n) - f(k/n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k/n)$$

ne peut être nul.

Puisque  $\varphi$  prend une valeur positive et une valeur négative, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\varphi$  s'annule.

**Exercice 27 :** [énoncé]

Par l'absurde, supposons que  $f - g$  ne s'annule pas. Quitte à échanger, supposons  $f - g > 0$ .

Soit  $x$  un point fixe de  $g$ .

On a  $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$ . Donc  $f(x)$  est point fixe de  $g$  et de plus  $f(x) > g(x) = x$ .

De même,  $f^2(x)$  est point fixe de  $g$  et  $f^2(x) \geq f(x)$ .

On peut ainsi construire une suite  $(f^n(x))$  de points fixes de  $g$ , suite qui est croissante et majorée.

Posons  $\ell = \lim f^n(x)$ . On a par continuité :  $f(\ell) = \ell$  et  $g(\ell) = \ell$ . Absurde.

**Exercice 28 :** [énoncé]

La fonction  $\varphi$  est continue,  $\varphi(0) = f(x_1) - f(y_1) \geq 0$  et  $\varphi(1) = f(x_2) - f(y_2) \leq 0$  donc par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\varphi$  s'annule en un certain  $t$ .

Posons  $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$  et  $y_0 = (1-t)y_1 + ty_2$ .

$\varphi(t) = 0$  donne  $f(x_0) = f(y_0)$  or  $x_0 < y_0$  donc  $f$  n'est pas injective. Absurde.

**Exercice 29 :** [énoncé]

Notons  $f$  l'application étudiée. Pour  $z = \rho e^{i\alpha}$ , on a

$$f(z) = \rho e^{\rho \cos \alpha} e^{i(\alpha + \rho \sin \alpha)}$$

Soit  $Z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$  avec  $r \geq 0$ .

Si  $r = 0$  alors  $Z = 0 = f(0)$ .

Si  $r > 0$ , pour que  $z = \rho e^{i\alpha}$  vérifie  $f(z) = Z$ , il suffit de trouver  $(\rho, \alpha)$  solution du système

$$\begin{cases} \rho e^{\rho \cos \alpha} = r \\ \alpha + \rho \sin \alpha = \theta \end{cases}$$

Nous alors chercher un couple  $(\rho, \alpha)$  solution avec  $\rho > 0$  et  $\alpha \in ]0, \pi[$ .

Quitte à considérer un nouvel argument  $\theta$  pour le complexe  $Z$ , nous supposons  $\theta > \pi$ .

On a alors

$$\begin{cases} \rho e^{\rho \cos \alpha} = r \\ \alpha + \rho \sin \alpha = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) = r \\ \rho = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

avec

$$g(\alpha) = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} e^{\frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha}$$

La fonction  $g$  est définie et continue sur  $]0, \pi[$ .

Quand  $\alpha \rightarrow 0^+$ ,  $g(\alpha) \rightarrow +\infty$  et quand  $\alpha \rightarrow \pi^-$ ,  $g(\alpha) \rightarrow 0^+$ .

Par suite, il existe  $\alpha \in ]0, \pi[$  tel que  $g(\alpha) = r$  et alors, pour  $\rho = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha}$ , on obtient

$$f(\rho e^{i\alpha}) = r e^{i\theta} = Z$$

Finalement  $f$  est surjective.

**Exercice 30 :** [énoncé]

Soit  $T > 0$  une période de  $f$ .

Sur  $[0, T]$ ,  $f$  est bornée par un certain  $M$  car  $f$  est continue sur un segment.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x - nT \in [0, T]$  pour  $n = E(x/T)$  donc

$$|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M.$$

Ainsi  $f$  est bornée par  $M$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 31 :** [énoncé]

Soit  $M \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(g(x))| \leq M$  donc  $f \circ g$  est bornée.

Puisque la fonction  $g$  est continue sur le segment  $[-M, M]$ , elle y est bornée par un certain  $M'$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|g(f(x))| \leq M'$  car  $f(x) \in [-M, M]$  ainsi  $g \circ f$  est bornée.

**Exercice 32 :** [énoncé]

Posons  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = g(x) - f(x)$$

$\varphi$  est continue sur le segment  $[a, b]$  donc y admet un minimum en un certain  $c \in [a, b]$ .

Posons  $\alpha = \varphi(c) = g(c) - f(c) > 0$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $\varphi(x) \geq \alpha$  donc  $f(x) \leq g(x) - \alpha$ .

**Exercice 33 :** [énoncé]

Posons  $M = f(0) + 1$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ , il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \leq A, f(x) \geq M \text{ et } \forall x \geq B, f(x) \geq M$$

On a  $A \leq 0 \leq B$  car  $f(0) < M$ .

Sur  $[A, B]$ ,  $f$  admet un minimum en un point  $a \in [A, B]$  car continue sur un segment.

On a  $f(a) \leq f(0)$  car  $0 \in [A, B]$  donc  $f(a) \leq M$ .

Pour tout  $x \in [A, B]$ , on a  $f(x) \geq f(a)$  et pour tout  $x \in ]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$ ,  $f(x) \geq M \geq f(a)$ .

Ainsi  $f$  admet un minimum absolu en  $a$ .

**Exercice 34 :** [énoncé]

Soit  $y$  une valeur prise par  $f$ . Si celle-ci n'a qu'un antécédent, c'est fini.

Sinon, soit  $a < b$  les deux seuls antécédents de  $y$ .

$f$  est continue sur  $[a, b]$  donc y admet un minimum en  $c$  et un maximum en  $d$ , l'un au moins n'étant pas en une extrémité de  $[a, b]$ . Supposons que cela soit  $c$ .

Si  $f(c)$  possède un autre antécédent  $c'$  que  $c$ .

Si  $c' \in [a, b]$  alors  $f$  ne peut être constante entre  $c$  et  $c'$  et une valeur strictement comprise entre  $f(c) = f(c')$  et  $\max_{[c, c']} f$  possède au moins 3 antécédents.

Si  $c' \notin [a, b]$  alors une valeur strictement intermédiaire à  $y$  et  $f(c)$  possède au moins 3 antécédents. Impossible.

**Exercice 35 :** [énoncé]

a) Puisque  $f$  est  $T$ -périodique, on a

$$\text{Im} f = f(\mathbb{R}) = f([0, T])$$

Or  $f$  est continue, donc  $f([0, T])$  est bornée et donc  $\text{Im} f$  aussi.

b) Plus précisément  $f([0, T])$  est un segment de la forme  $[f(a), f(b)]$  avec  $a, b \in [0, T]$ .

Pour fixer les idées, supposons  $a \leq b$ . On a  $b \in [a, T] \subset [a, a + T]$ .

Si  $b \in [a, a + T/2]$  alors  $f(a), f(b) \in f([a, a + T/2])$  et donc pour  $x = a$

$$\text{Im} f = f([x, x + T/2])$$

Si  $b \in [a + T/2, a + T]$  alors  $x = a + T/2$  convient.

Le raisonnement dans le cas  $b \leq a$  est analogue.

**Exercice 36 :** [énoncé]

Si la fonction  $f$  est constante, l'affaire est entendue.

Si  $f$  n'est pas constante elle admet un minimum ou un maximum global dans  $]a, b[$ .

Quitte à considérer  $-f$ , on peut supposer qu'il s'agit d'un maximum en  $c \in ]a, b[$ .

Posons alors  $\alpha = \min\{c - a, b - c\} > 0$  et considérons  $\sigma \in [0, \alpha]$ .

Considérons enfin  $g : x \mapsto f(x + \sigma) - f(x)$  définie et continue sur  $[a, b - \sigma]$ .

On a  $g(c) \leq 0$  et  $g(c - \sigma) \geq 0$  car  $f$  est maximale en  $c$ .

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que  $g$  s'annule ce qui résout le problème posé.

**Exercice 37 :** [énoncé]

Soit  $\varepsilon = 1 > 0$ . Il existe  $A \in [0, +\infty[$  tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[, |f(x) - \ell| \leq 1$$

Ainsi, la fonction  $f$  est bornée par  $M_1 = |\ell| + 1$  sur  $[A, +\infty[$ . Aussi,  $f$  est continue sur le segment  $[0, A]$ , elle est donc aussi bornée sur  $[0, A]$  par un certain  $M_2$ .

Finalement,  $f$  est bornée sur  $[0, +\infty[$  par  $M = \max(M_1, M_2)$ .

**Exercice 38 :** [énoncé]

a) Sur  $[0, +\infty[$ ,

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

est continue et strictement croissante,  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$ .

Ainsi  $f$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  vers  $[0, 1[$ .

Sur  $]-\infty, 0[$ ,

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

est continue et strictement croissante,  $\lim_0 f = 0$  et  $\lim_{-\infty} f = -1$ .

Ainsi  $f$  réalise une bijection de  $] -\infty, 0[$  vers  $] -1, 0[$ .

Finalement,  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $] -1, 1[$ .

b) Pour  $y \in ] 0, 1[$ , son antécédent  $x = f^{-1}(y)$  appartient à  $[ 0, +\infty[$ .

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

Pour  $y \in ] -1, 0[$ , son antécédent  $x = f^{-1}(y)$  appartient à  $] -\infty, 0[$ .

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

Finalement,

$$\forall y \in ] -1, 1[, f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

**Exercice 39 : [énoncé]**

Notons que  $\lim_a f$  et  $\lim_b f$  existent car  $f$  est croissante.

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $f$  continue.

Puisque  $f$  est continue et strictement croissante,  $f$  réalise une bijection de  $] a, b[$

sur  $\left] \lim_a f, \lim_b f \right[$  d'où le résultat.

( $\Leftarrow$ ) Supposons  $f(] a, b[) = \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$ .

Soit  $x_0 \in ] a, b[$ . On a  $\lim_a f < f(x_0) < \lim_b f$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $y^+ \in ] f(x_0), f(x_0) + \varepsilon[ \cap \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$ . Il existe  $x^+ \in ] a, b[$

tel que  $f(x^+) = y^+$ .

Soit  $y^- \in ] f(x_0) - \varepsilon, f(x_0)[ \cap \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$ . Il existe  $x^- \in ] a, b[$  tel que

$f(x^-) = y^-$ .

Puisque  $f$  est croissante,  $x^- < x_0 < x^+$ . Posons  $\alpha = \min(x^+ - x_0, x_0 - x^-) > 0$ .

Pour tout  $x \in ] a, b[$ , si  $|x - x_0| \leq \alpha$  alors  $x^- \leq x \leq x^+$  donc  $y^- \leq f(x) \leq y^+$  d'où

$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ .  
Ainsi  $f$  est continue en  $x_0$  puis  $f$  continue sur  $] a, b[$ .

**Exercice 40 : [énoncé]**

a) Cherchons  $f$  de la forme

$$f(x) = e^{\beta x}$$

Après calculs, si  $\alpha = \beta e^{-\beta}$  alors  $f$  est solution.

En étudiant les variations de la fonction  $\beta \mapsto \beta e^{-\beta}$ , on peut affirmer que pour tout  $\alpha \in ] 0, 1/e[$ , il existe  $\beta \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\beta e^{-\beta} = \alpha$  et donc il existe une fonction  $f$  vérifiant la relation précédente.

b) Pour  $\alpha = 1/e$ , les fonctions  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto x e^x$  sont solutions.

Notons que pour  $\alpha \in ] 0, 1/e[$  il existe aussi deux solutions linéairement indépendantes car l'équation  $\beta e^{-\beta} = \alpha$  admet deux solutions, une inférieure à 1 et l'autre supérieure à 1

**Exercice 41 : [énoncé]**

La fonction  $f$  est bijective et continue donc strictement monotone. Elle ne peut être décroissante car alors elle ne serait pas surjective sur  $[ 0, +\infty[$ , elle est donc strictement croissante.

S'il existe un  $x \in [ 0, 1[$  tel que  $f(x) < x$  alors, par stricte croissance

$$f(f(x)) < f(x)$$

et donc  $f(f(x)) < x$  ce qui contredit  $f \circ f = \text{Id}$ . De même  $f(x) > x$  est impossible et donc  $f = \text{Id}$ .

**Exercice 42 : [énoncé]**

On a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

Par récurrence, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $x/2^n \rightarrow 0$  et donc par continuité de  $f$  en 0

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$$

Or

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

donc par unicité de la limite  $f(x) = f(0)$ .

Finalement  $f$  est constante égale à  $f(0)$ .

**Exercice 43 : [énoncé]**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

donc  $f$  est paire.

Pour tout  $x > 0$ ,  $x^{1/2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  donc  $f(x^{1/2^n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(1)$  par continuité de  $f$  en 1.

Or

$$f(x^{1/2^n}) = f(x^{1/2^{n-1}}) = \dots = f(x)$$

donc  $f(x) = f(1)$  pour tout  $x > 0$  puis pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  par parité.

De plus  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1)$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)$$

**Exercice 44 : [énoncé]**

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  définie par  $u_0 = x$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

Si  $x \geq 1$  alors on montre par récurrence que  $(u_n)$  est décroissante et supérieure à 1.

Si  $x \leq 1$  alors on montre par récurrence que  $(u_n)$  est croissante et inférieure à 1.

Dans les deux cas la suite  $(u_n)$  converge vers 1.

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = f(u_n)$  donc à la limite  $f(x) = f(1)$ .

**Exercice 45 : [énoncé]**

Soit  $f$  solution.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sin x$$

donc

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin x}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Pour  $x \neq 0$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$  puis

$$f(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \rightarrow \frac{\sin x}{x} f(0)$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

(avec prolongement par continuité par 1 en 0).

Vérification : ok.

**Exercice 46 : [énoncé]**

a) Pour  $x = y = 0$ , la relation donne  $f(0) = 2f(0)$  donc  $f(0) = 0$ .

Pour  $y = -x$ , la relation donne  $f(0) = f(x) + f(-x)$  donc  $f(-x) = -f(x)$ .

b) Par récurrence, on montre pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $f(nx) = nf(x)$ .

Pour  $n \in \mathbb{Z}^-$ , on écrit  $n = -p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

On a alors  $f(nx) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$ .

c) Soit  $r \in \mathbb{Q}$ . On peut écrire  $r = p/q$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ .

$$f(r) = pf(1/q) = \frac{p}{q} f(1/q) = \frac{p}{q} f(1) = ar.$$

d) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  il existe une suite  $(u_n)$  telle que  $u_n \rightarrow x$  et  $u_n \in \mathbb{Q}$ .

Par continuité  $f(u_n) \rightarrow f(x)$  or puisque  $u_n \in \mathbb{Q}$   $f(u_n) = au_n \rightarrow ax$  donc par unicité de la limite  $f(x) = ax$ .

**Exercice 47 : [énoncé]**

La relation fonctionnelle  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  permet d'établir

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$$

Pour cela on commence par établir

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(na) = nf(a)$$

On commence par établir le résultat pour  $n = 0$  en exploitant

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

ce qui entraîne  $f(0) = 0$ .

On étend ensuite le résultat à  $n \in \mathbb{N}$  en raisonnant par récurrence et en exploitant

$$f((n+1)a) = f(na) + f(a)$$

On étend enfin le résultat à  $n \in \mathbb{Z}$  en exploitant la propriété de symétrie

$f(-x) = -f(x)$  issu de

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0$$

Considérons alors  $r = p/q \in \mathbb{Q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ , on peut écrire

$$f(r) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) \text{ et } f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc

$$f(r) = \frac{p}{q} f(1) = r f(1)$$

Nous allons étendre cette propriété à  $x \in \mathbb{R}$  par un argument de continuité.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On peut affirmer qu'il existe une suite  $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow x$ .

Pour celle-ci, on a  $x_n + x_0 - x \rightarrow x_0$  et donc par continuité de  $f$  en  $x_0$

$$f(x_n + x_0 - x) \rightarrow f(x_0)$$

Or on a aussi

$$f(x_n + x_0 - x) = f(x_0) + (f(x_n) - f(x))$$

donc

$$f(x_n) - f(x) \rightarrow 0$$

Ainsi

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = x f(1)$$

Finalement, la fonction  $f$  est linéaire.

#### Exercice 48 : [énoncé]

a)  $f(2-x) + f(x) = 0$  et  $f(-x) + f(x) = 0$  donc  $f(x) = f(x+2)$  donc  $f$  est périodique.

$f(x/2) = f(x)/2$  donc  $f(2x) = 2f(x)$ .

Puisque  $f$  est continue et périodique,  $f$  est bornée. Or la relation  $f(2x) = 2f(x)$  implique que  $f$  n'est pas bornée dès qu'elle prend une valeur non nulle. Par suite  $f$  est nulle.

b) Pour  $a = f(1) - f(0)$  et  $b = f(0)$ , on observe que  $g(x) = f(x) - (ax + b)$  est solution du problème posé et s'annule en 0 et 1 donc  $g$  est nulle et  $f$  affine. La réciproque est immédiate.

#### Exercice 49 : [énoncé]

a) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(0)) = \frac{1}{2}f(x)$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x+y)$$

On en déduit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

b) Sachant  $f$  continue, on peut alors classiquement conclure que dans le cas précédent  $f$  est de la forme  $x \mapsto ax$ .

Dans le cas général, il suffit de considérer  $x \mapsto f(x) - f(0)$  et de vérifier que cette nouvelle fonction satisfait toujours la propriété initiale tout en s'annulant en 0.

On peut donc conclure que dans le cas général  $f$  est affine :  $x \mapsto ax + b$

#### Exercice 50 : [énoncé]

Par formule de factorisation

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

donc  $\sin$  est 1 lipschitzienne.

#### Exercice 51 : [énoncé]

Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $|u_n| \leq k^n |a|$ .

Pour  $n = 0$  : ok

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .

$$|u_{n+1}| = |f(u_n) - f(0)| \leq k |u_n - 0| = k |u_n| \leq k^{n+1} |a|$$

Récurrence établie.

Puisque  $k \in [0, 1[$ ,  $k^n \rightarrow 0$  et donc  $u_n \rightarrow 0$ .

#### Exercice 52 : [énoncé]

L'application  $x \mapsto f(x) + tg(x)$  est définie et continue sur le segment  $[0, 1]$  elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Par suite  $\varphi(t)$  est bien définie et plus précisément, il existe  $x_t \in [0, 1]$  tel que  $\varphi(t) = f(x_t) + tg(x_t)$ .

Puisque  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  elle y est bornée par un certain  $M$  :

On a

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = f(x_t) + tg(x_t) - (f(x_\tau) + \tau g(x_\tau))$$

or

$$f(x_t) + \tau g(x_t) \leq f(x_\tau) + \tau g(x_\tau)$$

donc

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) \leq tg(x_t) - \tau g(x_t) = (t - \tau)g(x_t) \leq M |t - \tau|$$

De même

$$\varphi(\tau) - \varphi(t) \leq M |t - \tau|$$

et finalement  $\varphi$  est  $M$  lipschitzienne.