Matrices et déterminants

Généralités sur les matrices

Exercice 1 [00702] [correction]
Résoudre l'équation $X^2 = A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 [00703] [correction]
a) Monter qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non inversible si, et seulement si, elle est équivalente à une matrice nilpotente.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application vérifiant : $f(O_n) = 0$, $f(I_n) = 1$ et pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $f(A) \neq 0$.

Exercice 3 [00707] [correction]
Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme dont la plus petite puissance de x est de degré $\geqslant N+1$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B^2 = I + A$$

Exercice 4 [00712] [correction]
Soient $D = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto DM - MD$$

a) Déterminer noyau et image de l'endomorphisme φ.
b) Préciser ces espaces quand D est à coefficients diagonaux distincts.

Exercice 5 [02390] [correction]
Soit n un entier $\geqslant 2$ et $\mathcal{A}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable pour le produit matriciel.
a) On suppose que $I_n \notin \mathcal{A}$. Montrer, si $M^2 \in \mathcal{A}$, que $M \in \mathcal{A}$. En déduire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ que la matrice $E_{i,i}$ est dans $\mathcal{A}$. En déduire une absurdité.
b) On prend $n = 2$. Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 6 [02687] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente et commute avec A. Montrer que A et $A + B$ sont simultanément inversibles.

Exercice 7 [03976] [correction]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A + A^{-1} = I_n$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k + A^{-k}$.

Commutation de matrices

Exercice 8 [00697] [correction]
On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et que A est inversible.
Justifier que les matrices A^{-1} et B commutent.

Exercice 9 [00709] [correction]
a) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
b) Même question aves les matrices commutant avec toutes celles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10 [02689] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes distincts, $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$$

Montrer que $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $C(A)$.

Exercice 11 [03144] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) Montrer que

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), AM = MA\} = \{\lambda I_n / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = MN \Rightarrow A = NM$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$

Exercice 12 [03164] [correction]
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

Exercice 13 [03166] [correction]
Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.

Exercice 14 [03167] [correction]
Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices antisymétriques.

Rang d'une matrice

Exercice 15 [00701] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.
a) Etablir l'existence de colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X^tY$.
b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 16 [00700] [correction]
Soit A une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 17 [03460] [correction]
Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.
a) Montrer qu'il existe des matrices $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = U^tV$.
b) En déduire

$$H^2 = \mathrm{tr}(H)H$$

c) On suppose $\mathrm{tr}H \neq -1$. Montrer que $I_n + H$ est inversible et

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \mathrm{tr}H} H$$

d) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}(HA^{-1}) \neq -1$. Montrer que $A + H$ est inversible et

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \mathrm{tr}(HA^{-1})} A^{-1}HA^{-1}$$

Exercice 18 [00698] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les rangs de A et B.
b) Calculer BA en observant $(AB)^2 = AB$.

Exercice 19 [00699] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ matrices de rang 2 vérifiant $(AB)^2 = AB$.
Montrer $BA = I_2$.

Exercice 20 [02602] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r.
Déterminer la dimension de l'espace

$$\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / ABA = O_n\}$$

Exercice 21 [01602] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) Justifier qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B)$$

b) On suppose $\mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B \geqslant n$. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$UA + BV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 22 [03134] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) On note $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les colonnes de B à droite de celles de A.
Montrer

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) = \operatorname{rg}A \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B = AU$$

b) On note $\left(\begin{array}{c} A \\ \hline C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les lignes de C en dessous de celles de A.
Montrer

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{c} A \\ \hline C \end{array}\right) = \operatorname{rg}A \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), C = VA$$

c) En déduire

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg}A \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

Exercice 23 [00710] [correction]
Soit G un groupe multiplicatif formé d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que les éléments de G ont tous le même rang.

Exercice 24 [03808] [correction]
a) Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C + X) = \det X$$

alors elle est nulle (on pourra étudier le rang de C).
b) Montrer que si A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + X) = \det(B + X)$$

alors $A = B$.

Calculs par blocs

Exercice 25 [03264] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

a) Montrer que A est inversible si, et seulement si, B l'est.
b) Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 26 [01604] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

Etablir

$$\operatorname{rg}M = \operatorname{rg}A + \operatorname{rg}B$$

Exercice 27 [01649] [correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}C$$

Exercice 28 [02335] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

On suppose B inversible. Etablir

$$\operatorname{rg}M = p \Leftrightarrow A = O_n$$

Exercice 29 [03101] [correction]
Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$$

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

Exercice 30 [00747] [correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r décomposée par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ supposée inversible.
a) Montrer que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que

$$M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

b) En déduire que $D = CA^{-1}B$.

Exercice 31 [03137] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

On suppose que les matrices A, D et M sont inversibles.
Exprimer M^{-1}.

Exercice 32 [03702] [correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 33 [03861] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2B = A$ et $\text{rg}A = \text{rg}B$. Montrer $B^2A = B$.

Représentations matricielles

Exercice 34 [00714] [correction]
Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} = C_{j-1}^{i-1}$$

et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ canoniquement représenté par A.
a) Exprimer $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
b) Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
c) Calculer A^{-1}.

Exercice 35 [00715] [correction]
Soient $a \in \mathbb{C}^\star$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\bar{z}$.
Former la matrice de l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$.
Déterminer image et noyau de f.

Exercice 36 [00717] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Calculer A^n.

Exercice 37 [00718] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Calculer A^n.

Exercice 38 [02380] [correction]
Quels sont les $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$?

Exercice 39 [02679] [correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$. Calculer $f \circ g$.

Exercice 40 [02688] [correction]
Soit ω une racine primitive n-ième de 1. On pose

$$F_\omega(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Montrer que F_ω est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et exprimer son inverse.

Exercice 41 [03060] [correction]
Soient n, p et q trois naturels non nuls et deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
a) Démontrer qu'il existe une application linéaire $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ telle que $u = w \circ v$ si, et seulement si, on a l'inclusion des noyaux

$$\ker(v) \subset \ker(u)$$

Dans ce cas, déterminer toutes les applications w qui conviennent.
b) Pour résoudre cette question, on utilisera un logiciel de calcul formel.
Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = CB$?
Déterminer toutes les matrices C solutions.
c) Pour la matrice B donnée dans la question précédente, caractériser par leurs colonnes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = CB$.
Déterminer dans ce cas l'ensemble des solutions C.
d) Soient trois applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Démontrer qu'il existe deux applications linéaires $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ telles que $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$ si, et seulement si,

$$\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 42 [03160] [correction]
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.
a) Indiquer des endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E.
b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.
c) Déterminer tous les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est diagonale dans toutes les bases de E.
d) Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E ?

Exercice 43 [02596] [correction]
Soit f un élément non nul de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$f^3 + f = 0$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$ et que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices semblables

Exercice 44 [00719] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 45 [00720] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 46 [00721] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
Etablir que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 47 [00722] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$A^{n-1} \neq O_n \text{ et } A^n = O_n$$

Etablir que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 48 [00723] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que les espaces $\mathrm{Im} A$ et $\ker A$ soient supplémentaires.
Montrer que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$$

Exercice 49 [00724] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.
Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r = \mathrm{rg} A$.

Exercice 50 [00725] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant

$$A^3 + A = O_3$$

Montrer que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 51 [00726] [correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + I = 0$.
Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 52 [00728] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ \star & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 53 [03136] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
a) Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
b) En déduire

$$A^2 = \mathrm{tr}(A).A \text{ et } \det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr} A$$

Exercice 54 [02382] [correction]
Quelles sont les matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec $\mathrm{diag}(1, 2, \dots, n)$ et lui sont semblables ?

Exercice 55 [02691] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56 [03032] [correction]
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver l'équivalence :

$$A \text{ inversible } \Leftrightarrow f(A) \neq 0$$

Exercice 57 [01322] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^2 = O_3$.
Déterminer la dimension de l'espace

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM - MA = O_3\}$$

Exercice 58 [03778] [correction]
Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 59 [02541] [correction]
Soit G une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non réduite à la matrice nulle.
On suppose que $(G, \times)$ est un groupe. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^\star$ tel que le groupe $(G, \times)$ soit isomorphe à un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_r(\mathbb{R}), \times)$.

Trace

Exercice 60 [03258] [correction]
Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB - BA = I_n\,?$$

Exercice 61 [03259] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices vérifiant

$$AB - BA = A$$

Calculer $\mathrm{tr}\,(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 62 [00729] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer

$$f^2 = \mathrm{tr}(f).f$$

A quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 63 [03029] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(M) = MA$$

Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.

Exercice 64 [00730] [correction]
Soit M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$.
Montrer que si $\mathrm{tr}M = 0$, il existe deux matrices A et B telles que

$$M = AB - BA$$

Exercice 65 [00731] [correction]
Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

Exercice 66 [00733] [correction]
On note tr la forme linéaire trace sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Etablir

$$\ker(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\,\{[A, B]\,/ A, B \in E\}$$

où l'on note $[A, B] = AB - BA$.

Exercice 67 [00711] [correction]
Etablir que Vect $\{AB - BA/A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 68 [00735] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + {}^tX = \text{tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 69 [03261] [correction]
a) Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$.
Montrer

$$\dim\ker(A - I_n) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\text{tr}(A^k)$$

Exercice 70 [00734] [correction]
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $\text{GL}(E)$ de cardinal fini n. Montrer

$$\dim\left(\bigcap_{g\in G}\ker(g - \text{Id}_E)\right) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\text{tr}g$$

Exercice 71 [02388] [correction]
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et H une partie non vide et finie de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication.
a) Soit $M \in H$. Montrer que $k \in \mathbb{N}^\star \mapsto M^k \in H$ n'est pas injective.
En déduire que H est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
Soient

$$q = |H| \text{ et } P = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} M$$

b) Montrer, si $M \in H$, que $MP = PM = P$. En déduire $P^2 = P$.
c) Trouver un supplémentaire, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, stable par tous les éléments de H, de

$$\bigcap_{M\in H}\ker(M - I_n)$$

d) Montrer que

$$\sum_{M\in H}\text{tr}M \in q\mathbb{N}$$

Que dire si cette somme est nulle ?

Exercice 72 [02651] [correction]
a) Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g\in G}\text{tr}g = 0$. Montrer que $\sum_{g\in G} g = 0$.
b) Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G.

Exercice 73 [00732] [correction]
Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), T(AB) = T(BA)$$

Etablir que $T \in \text{Vect}\{\text{tr}\}$.

Exercice 74 [02616] [correction]
Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA)$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Exercice 75 [02686] [correction]
a) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA)$$

montrer que f est proportionnelle à la trace.
b) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$g(AB) = g(BA)$$

pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Exercice 76 [03419] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace de l'endomorphisme $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$f(M) = AM + MA$$

Exercice 77 [02563] [correction]
Pour A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation

$$X = \text{tr}(X)A + B$$

Exercice 78 [02547] [correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 n'est pas forcément un projecteur.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et de trace 1 est un projecteur.
Trouver une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs.

Exercice 79 [03864] [correction]
Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A_1 + \dots + A_k = I_n \text{ et } \forall 1 \leqslant i \leqslant k, A_i^2 = A_i$$

Montrer

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant k, A_i A_j = O_n$$

Déterminants

Exercice 80 [00738] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$.
Calculer le déterminant de la matrice B de colonnes

$$C_1 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$$

Exercice 81 [02355] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 82 [00752] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par

$$\varphi_A(M) = AM$$

Calculer la trace et le déterminant de φ_A

Exercice 83 [02603] [correction]
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est élément de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ si la matrice A est à coefficients entiers, qu'elle est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.
a) Montrer que si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors $|\det A| = 1$.
b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}, A + kB \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$$

Calculer $\det A$ et $\det B$.

Exercice 84 [02604] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ de colonnes $A_1, \dots, A_n$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $B_1, \dots, B_n$ déterminées par

$$B_j = \sum_{i \neq j} A_i$$

Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 85 [02650] [correction]
On note V l'ensemble des matrices à coefficients entiers du type

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

et G l'ensemble des $M \in V$ inversibles dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et dont l'inverse est dans V.
a) Quelle est la structure de G ?
b) Soit $M \in V$. Montrer que $M \in G$ si, et seulement si, $\det M = \pm 1$.
c) Donner un groupe standard isomorphe à G muni du produit.

Exercice 86 [02659] [correction]
Soient des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux.
Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n$$

Exercice 87 [02695] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

Exercice 88 [00229] [correction]
Soient A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg} H = 1$. Montrer :

$$\det(A + H)\det(A - H) \leqslant \det A^2$$

Exercice 89 [01413] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., f(x_j), ..., x_n) = \mathrm{tr}(f)\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$$

Exercice 90 [01587] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Etablir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Exercice 91 [03278] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1$$

Montrer

$$|\det A| \leqslant 1$$

Exercice 92 [03417] [correction]
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé des matrices inversibles d'ordre n à coefficients entiers dont l'inverse est encore à coefficients entiers.
Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers ($n \geqslant 2$). Montrer qu'il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ si, et seulement si, ces entiers sont premiers dans leur ensemble.

Exercice 93 [03641] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

a) Montrer que A est inversible.
b) On suppose en outre

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} > 0$$

Montrer que $\det A > 0$.

Calcul de déterminants

Exercice 94 [02693] [correction]
Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où $x, a_1, \dots, a_n$ réels.

Exercice 95 [00742] [correction]
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 96 [02384] [correction]
Calculer pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 97 [02385] [correction]
Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 98 [02386] [correction]
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Exercice 99 [00748] [correction]
Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on considère $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$.
Calculer

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ [déterminant de Cauchy]}$$

Traiter en particulier le cas où

$$\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = b_i = i \text{ [déterminant de Hilbert]}$$

Exercice 100 [00749] [correction]
Etablir que l'inverse de la matrice $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est à coefficients entiers.

Exercice 101 [00299] [correction]
On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1 \text{ (avec } n \geqslant 2)$$

a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.
b) Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + z_n \end{pmatrix}$$

Exercice 102 [03806] [correction]
[Déterminant de Hurwitz]
Soient $a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$H = \begin{pmatrix} a + \lambda_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & a + \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 103 [03124] [correction]
Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de coefficient

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 104 [03578] [correction]
Soient un naturel $n \geqslant 2$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n réels distincts de $[0, \pi]$.
On pose

$$P_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos x_j - \cos x_i)$$

et on considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos((j-1)x_i)$$

a) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$ et donner son coefficient dominant.
b) Calculer $\det M_n$ en fonction de P_n.

Exercice 105 [03366] [correction]
Montrer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

Exercice 106 [03577] [correction]
Pour une famille de n réels distincts (x_k) de $[0,\pi]$, on pose

$$P_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\cos x_i - \cos x_j)$$

a) Combien le produit définissant P_n comporte-t-il de facteurs ?
b) Pour $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$ écrire la matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos\left((j-1)x_i\right)$$

c) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$.
d) Calculer $\det M$ en fonction de P_4 et montrer $|\det M| < 24$

Déterminants tridiagonaux

Exercice 107 [01433] [correction]
Pour $a \in \mathbb{K}^\star$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

Exercice 108 [02584] [correction]
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 109 [01436] [correction]
Soient $a,b \in \mathbb{C}^\star$ distincts. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 110 [00739] [correction]
Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 111 [00740] [correction]
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 112 [00741] [correction]
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Déterminant par blocs

Exercice 113 [03129] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Etablir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

Exercice 114 [03130] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec D inversible. Etablir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

Exercice 115 [02694] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 116 [02387] [correction]
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
c) Trouver un contre-exemple à b) si A et B ne commutent pas.
d) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Exercice 117 [01424] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$$

b) Justifier

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$$

Exercice 118 [00198] [correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
b) Donner son inverse quand cela est possible.

Exercice 119 [00713] [correction]
On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
On écrit la comatrice de M sous une forme analogue

$$\mathrm{com}M = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
Vérifier

$$\det A' = \det(M)^{p-1}\det D$$

Exercice 120 [03147] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) On suppose C^tD symétrique et D inversible. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(A^tD - B^tC\right)$$

b) On suppose toujours C^tD symétrique mais on ne suppose plus D inversible. Montrer que l'égalité précédente reste vraie.

Exercice 121 [03288] [correction]
Soient A, B, C, D des matrices carrées d'ordre n, réelles et commutant deux à deux. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $AD - BC$ l'est.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Une matrice X solution commute avec A.
En étudiant l'équation $AX = XA$ coefficients par coefficients, on observe que X est de la forme
$$\begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$
Pour une telle matrice, l'équation $X^2 = A$ équivaut au système :
$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 16 \\ (a+c)x = 1 \\ (b+c)y = 2 \end{cases}$$
Les solutions sont donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ etc...

Exercice 2 : [énoncé]
a) Si A n'est pas inversible alors $\text{rg}A < n$. Or il est possible de construire une matrice nilpotente de rang égal à $\text{rg}A$. Deux matrices étant équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang, on peut conclure que A est équivalente à une matrice nilpotente. La réciproque est immédiate.
b) Si A est inversible alors $f(A)f(A^{-1}) = f(I_n) = 1$ donc $f(A) \neq 0$. Si A n'est pas inversible alors A est équivalente à une matrice nilpotente B. Pour celle-ci, on a $f(B) = 0$ car $f(B^n) = f(B)^n$. Puisqu'on peut écrire $A = PBQ$ avec P et Q inversibles, on peut conclure $f(A) = 0$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) On a
$$S_N(x)^2 - 1 - x = S_N(x)^2 - S(x)^2 = R_N(x)(S(x) + S_N(x))$$
C'est donc une série entière dont le premier terme non nul est au moins un x^{N+1}.
D'autre part $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme.
b) Pour N tel que $A^N = 0$, $(S_N(A))^2 - I - A = O_n$ donc $B = S_N(A)$ convient.

Exercice 4 : [énoncé]
a) $DE_{i,j} = a_iE_{i,j}$ et $E_{i,j}D = a_jE_{i,j}$ donc
$$\varphi(E_{i,j}) = (a_i - a_j)E_{i,j}$$
Posons $I = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / a_i \neq a_j\right\}$ et
$J = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / a_i = a_j\right\} = [\![1,n]\!]^2 \setminus I$.
Pour $(i,j) \in I$, $E_{i,j} \in \text{Im}\varphi$ et pour $(i,j) \in J$, $E_{i,j} \in \ker\varphi$.
Ainsi
$$\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} \subset \text{Im}\varphi \text{ et } \text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} \subset \ker\varphi$$
Or
$$\dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} + \dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} = n^2 = \dim\text{Im}\varphi + \dim\ker\varphi$$
donc
$$\dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} = \dim\text{Im}\varphi$$
et
$$\dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} = \dim\ker\varphi$$
puis
$$\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} = \text{Im}\varphi \text{ et } \text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} = \ker\varphi$$
b) Si D est à coefficients diagonaux distincts alors
$$I = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / i \neq j\right\} \text{ et } J = \{(i,i)/i \in [\![1,n]\!]\}$$
Par suite $\text{Im}\varphi$ est l'espace des matrices de diagonale nulle tandis que $\ker\varphi$ est l'espace des matrices diagonales.

Exercice 5 : [énoncé]
a) Supposons $M^2 \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ et $\text{Vect}(I_n)$ étant supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in \mathcal{A}$. On a alors $M^2 = A^2 + 2\lambda AI_n + \lambda^2 I_n$ d'où l'on tire $\lambda^2 I_n \in \mathcal{A}$ puis $\lambda = 0$ ce qui donne $M \in \mathcal{A}$.
Pour $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0 \in \mathcal{A}$ donc $E_{i,j} \in \mathcal{A}$ puis $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i} \in \mathcal{A}$. Par suite $I_n = E_{1,1} + \cdots + E_{n,n} \in \mathcal{A}$. Absurde.

b) Formons une équation de l'hyperplan $\mathcal{A}$ de la forme $ax+by+cz+dt=0$ en la matrice inconnue $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$. Cette équation peut se réécrire $\operatorname{tr}(AM)=0$ avec $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
Puisque $I_2\in\mathcal{A}$, on a $\operatorname{tr}A=0$. Soit λ une valeur propre de A.
Si $\lambda\neq0$ alors $-\lambda$ est aussi valeur propre de A et donc A est diagonalisable via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ a ses coefficients diagonaux égaux.
Mais alors pour $M=P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $N=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ on a $M,N\in\mathcal{A}$ alors que $MN\in\mathcal{A}$.
Si $\lambda=0$ alors A est trigonalisable en $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha\neq0$ via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure. L'application $M\mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme comme voulu.

Exercice 6 : [énoncé]
Supposons A inversible. Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. Comme B est nilpotente, $-A^{-1}B$ l'est aussi. Or il est classique d'observer que si N est nilpotente, $I-N$ est inversible d'inverse $I+N+\dots+N^{p-1}$ avec p l'ordre de nilpotence de N. Ainsi $I+A^{-1}B$ est inversible et $A+B=A(I+A^{-1}B)$ aussi.
Supposons $A+B$ inversible, puisque $-B$ est nilpotente et commute avec $A+B$, $A=A+B-B$ est inversible.

Exercice 7 : [énoncé]
Posons $B_k=A^k+A^{-k}$. On vérifie

$$\left(A^k+A^{-k}\right)\left(A+A^{-1}\right)=A^{k+1}+A^{-(k+1)}+A^{k-1}+A^{-(k-1)}$$

et donc

$$B_k=B_{k+1}+B_{k-1}$$

Sachant $B_0=2I_n$ et $B_1=I_n$, on a par récurrence $B_k=\lambda_kI_n$ avec (λ_k) la suite récurrente linéaire double déterminée par

$$\begin{cases}\lambda_0=2,\lambda_1=1\\ \lambda_{n+1}=\lambda_n-\lambda_{n-1}\end{cases}$$

Après résolution

$$\lambda_n=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n}{2^n}$$

Exercice 8 : [énoncé]
Il suffit d'écrire

$$A^{-1}B=A^{-1}(BA)A^{-1}=A^{-1}(AB)A^{-1}=BA^{-1}$$

Exercice 9 : [énoncé]
a) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $i\neq j$, on a $E_{i,j}M=ME_{i,j}$.
L'égalité des coefficients d'indice (i,i) donne $m_{j,i}=0$.
L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne $m_{j,j}=m_{i,i}$.
Par suite la matrice M est scalaire. La réciproque est immédiate.
b) On reprend l'étude ci-dessus en étudiant la commutation de M avec $I_n+E_{i,j}$ qui conduit à nouveau à l'égalité $E_{i,j}M=ME_{i,j}$. On obtient la même conclusion.

Exercice 10 : [énoncé]
En étudiant l'égalité $AM=MA$, on justifie $C(A)=D_n(\mathbb{C})$. $C(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension n. De plus il contient évidemment les éléments A^k pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$ (et, plus généralement, tout polynôme en A).
Supposons

$$\lambda_0I+\lambda_1A+\dots+\lambda_{n-1}A^{n-1}=0$$

Le polynôme $P=\lambda_0+\lambda_1X+\dots+\lambda_{n-1}X^{n-1}$ est annulateur de A, donc les $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ qui sont valeurs propres de A sont aussi racines de P qui possède alors plus de racines que son degré. On peut alors affirmer $P=0$ puis
$\lambda_0=\ldots=\lambda_{n-1}=0$.
La famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une famille libre à n éléments de $C(A)$, c'en est donc une base

Exercice 11 : [énoncé]
a) L'inclusion $\supset$ est immédiate.
Inversement, soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Soient $i,j\in\{1,\dots,n\}$ avec $i\neq j$.
Pour $M=I_n+E_{i,j}$, la relation $AM=MA$ donne

$$AE_{i,j}=E_{i,j}A$$

L'identification des coefficients d'indices (i,j) et (j,j) donnent respectivement

$$a_{i,i} = a_{j,j} \text{ et } a_{j,i} = 0$$

On en déduit que la matrice A est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont égaux, autrement dit, A est une matrice scalaire.
b) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On peut écrire

$$A = (AB^{-1})B$$

et donc

$$A = B(AB^{-1})$$

On en déduit

$$AB = BA$$

et ainsi la matrice A commute avec toute matrice inversible. On peut alors conclure que A est une matrice scalaire.

Exercice 12 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geqslant 1$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
Soit $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tX \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
L'identification du coefficient d'indice $(1,1)$ dans la relation ${}^tTT = T{}^tT$ donne

$$\alpha^2 = \alpha^2 + {}^tXX$$

On en déduit $X = O_{n,1}$ et l'égalité ${}^tTT = T{}^tT$ donne alors ${}^tSS = S{}^tS$.
Par hypothèse de récurrence, la matrice S est diagonale et par conséquent la matrice T l'est aussi.
Récurrence établie.

Exercice 13 : [énoncé]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices symétriques.
Soient $i < j \in \{1,\dots,n\}$.
La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,j} + E_{j,i}$ ce qui permet d'écrire

$$A(E_{i,j} + E_{j,i}) = (E_{i,j} + E_{j,i})A$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne

$$a_{i,i} = a_{j,j}$$

La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,i}$ ce qui permet d'écrire

$$AE_{i,i} = E_{i,i}A$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne

$$a_{i,j} = 0$$

On en déduit que la matrice A est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 14 : [énoncé]
Cas $n = 2$
Les matrices antisymétriques sont colinéaires à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En étudiant la commutation d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec cette dernière, on obtient que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec les matrices antisymétriques sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Cas $n \geqslant 3$
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices antisymétriques.
Soient $i < j \in \{1,\dots,n\}$ et $k \in \{1,\dots,n\}$ avec $k \neq i,j$.
La matrice A commute avec la matrice antisymétrique $E_{i,j} - E_{j,i}$ ce qui permet d'écrire

$$A(E_{i,j} - E_{j,i}) = (E_{i,j} - E_{j,i})A$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) et (k,j) donne

$$a_{i,i} = a_{j,j} \text{ et } a_{k,i} = 0$$

On en déduit que la matrice A est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 15 : [énoncé]
a) A est équivalente à la matrice $J_1 = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ donc il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = PJ_1Q$.
Pour $C = {}^t(1, 0, \dots, 0)$, on a $J_1 = C^tC$ donc $A = X^tY$ avec $X = PC$ et $Y = {}^tQC$.
b) $A^2 = X({}^tYX)^tY$. ${}^tYX$ est un scalaire λ donc $A^2 = X\lambda^tY = \lambda X^tY = \lambda A$.

Exercice 16 : [énoncé]
Il existe une colonne X telle que $AX \neq 0$ et alors $\text{Im}A = \text{Vect}(AX)$.
$A^2X \in \text{Im}A$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2X = \lambda AX$.
De plus pour $Y \in \ker A$, $A^2Y = 0 = \lambda AY$.
Enfin $\ker A$ et $\text{Vect}(X)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $A^2 = \lambda A$.

Exercice 17 : [énoncé]
a) Soit U une colonne non nulle de l'image de H.
Pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, la colonne C_j de H peut s'écrire $C_j = \lambda_j U$ avec $\lambda_j \in \mathbb{K}$.
La matrice colonne $V = {}^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ vérifie alors $H = U^tV$.
b) On a alors $H^2 = U({}^tVU)^tV$ avec $\lambda = {}^tVU$ un scalaire donc $H^2 = \lambda H$ et

$$\lambda = {}^tVU = \text{tr}\left({}^tVU\right) = \text{tr}\left(U^tV\right) = \text{tr}H$$

c) En développant

$$(I_n + H)\left(I_n - \frac{1}{1 + \text{tr}H}H\right) = I_n + H - \frac{1}{1 + \text{tr}H}H - \frac{1}{1 + \text{tr}H}H^2 = I_n$$

Par le théorème d'inversibilité des matrices, on obtient $I_n + H$ est inversible et

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \text{tr}H}H$$

d) On a $\text{rg}(HA^{-1}) = \text{rg}H = 1$ car on ne modifie pas le rang en multipliant par une matrice inversible.
On en déduit que $I_n + HA^{-1}$ est inversible et

$$\left(I_n + HA^{-1}\right)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \text{tr}(HA^{-1})}HA^{-1}$$

En multipliant par la matrice inversible A, on obtient $A + H = \left(I_n + HA^{-1}\right)A$ inversible et

$$(A + H)^{-1} = A^{-1}\left(I_n + HA^{-1}\right)^{-1} = A_n^{-1} - \frac{1}{1 + \text{tr}(HA^{-1})}A^{-1}HA^{-1}$$

Exercice 18 : [énoncé]
a) On a

$$\text{rg}(AB) = 2 \leqslant \min(\text{rg}A, \text{rg}B) \leqslant 2$$

donc

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2$$

b) On a $ABAB = AB$ donc $A(BA - I_2)B = O_3$.
On en déduit $\text{Im}\left((BA - I_2)B\right) \subset \ker A = \{0\}$ donc $(BA - I_2)B = O_{2,3}$.
Par suite $\text{Im}B \subset \ker(BA - I_2)$ or B est surjective donc $BA - I_2 = O_2$ puis

$$BA = I_2$$

Exercice 19 : [énoncé]
On a $A(BA - I_2)B = 0$.
Or puisque A est de rang 2, $\ker A = \{0\}$ et donc $(BA - I_2)B = 0$.
De plus, puisque B est de rang 2, $\text{Im}B = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc $BA - I_2 = 0$.

Exercice 20 : [énoncé]
La matrice est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix}$ et donc il existe des matrices P, Q inversibles vérifiant $A = QJ_rP$. Par suite $ABA = O_n \Leftrightarrow J_rPBQJ_r = O_n$. Via l'isomorphisme $B \mapsto PBQ$, l'espace $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ABA = O_n\}$ est isomorphe à $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/J_rMJ_r = O_n\}$.
En écrivant la matrice M par blocs, on vérifie que les matrices M vérifiant $J_rMJ_r = O_n$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} O_r & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}$. On en déduit $\dim\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ABA = O_n\} = n^2 - r^2$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Posons $r = \text{rg}A$ et $s = \text{rg}B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,t} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J'_s = \begin{pmatrix} O_{n-s} & O_{n-s,s} \\ O_{s,n-s} & I_s \end{pmatrix}$$

Il existe donc $P, Q, R, S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J'_s$$

et alors

$$PAQ + RBS = J_r + J'_s$$

qui est une matrice de rang $\min(n, r+s)$.
On peut aussi écrire

$$(R^{-1}P)A + B(SQ^{-1}) = R^{-1}(J_r + J'_s)Q^{-1}$$

et en posant $U = R^{-1}P$ et $V = SQ^{-1}$, on obtient $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, r+s)$$

b) Si $r + s \geqslant n$ alors $\min(n, r+s) = n$ et ce qui précède conduit à une matrice inversible.

Exercice 22 : [énoncé]
a) ($\Rightarrow$) Supposons $\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) = \mathrm{rg}A = r$.
Rappelons que le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.
Puisque $\mathrm{rg}A = r$, la matrice A possède r colonnes indépendantes.
Puisque $\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) = r$, les colonnes de $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$ sont toutes combinaisons linéaires des colonnes précédentes.
En particulier les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A.
Ceci permet de former $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $B = AU$.
($\Leftarrow$) Supposons $B = AU$.
Les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A et donc par opérations sur les colonnes

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & O_n \end{array}\right) = \mathrm{rg}A$$

b) Il suffit de transposer le raisonnement qui précède en raisonnant sur les lignes et en exploitant que le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille des ses lignes.
c) Supposons

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A$$

Puisque

$$\mathrm{rg}A \leqslant \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) \leqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A$$

on a

$$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right) \text{ et } \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$$

En vertu de a) il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = AU$$

En raisonnant comme en b), il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\left(\begin{array}{c|c} C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} VA & VB \end{array}\right)$$

On en déduit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

Inversement, supposons

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

Les n dernières lignes étant combinaisons linéaires des n premières, on a

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ O_n & O_n \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & AU \end{array}\right)$$

puis

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ O_n & O_n \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A$$

Exercice 23 : [énoncé]
Commençons par noter que le neutre multiplicatif de G n'est pas nécessairement I_n. Par exemple, $G = \{O_n\}$ est un groupe multiplicatif formé d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons J le neutre du groupe G. Soit $A \in G$.
D'une part $AJ = A$ donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AJ) \leqslant \mathrm{rg}(J)$.
D'autre part, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = J$ donc $\mathrm{rg}(J) = \mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.
Finalement $\forall A \in G, \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(J)$.

Exercice 24 : [énoncé]
a) Posons $r = \mathrm{rg}C$. On peut écrire $C = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.

On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.
b) Quand X parcourt $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $Y = B + X$ parcourt $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en posant $C = A - B$, on obtient

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(C + Y) = \det Y$$

Ce qui précède permet alors de conclure.

Exercice 25 : [énoncé]
a) Si A est inversible alors en posant

$$C = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ A^{-1} & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

on obtient $BC = I_{2n}$ et on en déduit que B est inversible et que C est son inversible en vertu du théorème d'inversibilité.
Si A n'est pas inversible alors les lignes de A sont liées et les n premières lignes de B sont aussi liées par la même relation linéaire. On en déduit que B n'est pas inversible.
b) On obtient

$$B^{2p} = \begin{pmatrix} A^p & O_n \\ O_n & A^p \end{pmatrix} \text{ et } B^{2p+1} = \begin{pmatrix} O_n & A^{p+1} \\ A^p & O_n \end{pmatrix}$$

Exercice 26 : [énoncé]
Posons $r = \text{rg}A$ et $s = \text{rg}B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,t} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J_s = \begin{pmatrix} I_s & O_{s,p-s} \\ O_{p-s,t} & O_{p-s} \end{pmatrix}$$

Il existe donc $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R, S \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s$$

En opérant par blocs, on a alors

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix}$$

avec les facteurs

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix}$$

inversibles.
On en déduit

$$\text{rg}M = \text{rg}\begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix} = r + s$$

Exercice 27 : [énoncé]
En multipliant par la matrice inversible

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\text{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix}$$

En posant $r = \text{rg}C$, on peut écrire $PCQ = J_r$ avec

$$P, Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{p-r,r} & O_{p-r} \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche et à droite par les matrices inversibles

$$\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & P \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & Q \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\text{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & J_r \end{pmatrix} = n + r$$

Exercice 28 : [énoncé]
L'implication $(\Leftarrow)$ est immédiate car $\text{rg}B = p$.
Inversement, supposons $\text{rg}M = p$.
Puisque B est inversible, les p dernières lignes de M sont indépendantes et donc les autres lignes de M sont combinaisons linéaires de celles-ci puisque $\text{rg}M = p$.
Puisque les n premières lignes de M sont combinaisons linéaires des p dernières lignes de M, on a

$$A = O_n$$

Exercice 29 : [énoncé]
Introduisons la matrice inversible

$$M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_{p,q} \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$$

On a rg$M$ = rg(MM') avec

$$MM' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}$$

Par opérations élémentaires sur les colonnes, la matrice MM' a le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & O_{p,q} \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}$$

Enfin, les opérations élémentaires déterminant le rang de C se transposent à la matrice en cours afin d'en donner le rang. Au final

$$\text{rg}M = p + \text{rg}C$$

Exercice 30 : [énoncé]
a) Notons Im$M = \{MZ/Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$.
Considérons ensuite φ l'application linéaire qui à $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ associe
$M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}$.
On a évidemment Im$\varphi \subset$ ImM.
Or l'application linéaire φ est injective car A est inversible et donc
rg$\varphi = \dim \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$.
Puisque par hypothèse rg$M = r$, par inclusion et égalité des dimensions, on a
Imφ = ImM.
Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, on a $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} \in$ ImM donc il existe $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ (et celui-ci est même unique) tel que $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = \varphi(X) = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$.
b) La relation $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}$ donc
$X = A^{-1}BY$ puis $DY = CX = CA^{-1}BY$.
Puisque cette dernière relation vaut pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, on peut conclure $D = CA^{-1}B$.

Exercice 31 : [énoncé]
On peut écrire la matrice M^{-1} sous la forme

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

La relation $MM^{-1} = I_{2n}$ donne alors le système

$$\begin{cases} AA' + BC' = I_n \\ CA' + DC' = O_n \\ AB' + BD' = O_n \\ CB' + DD' = I_n \end{cases}$$

qui entraîne

$$\begin{cases} (A - BD^{-1}C)A' = I_n \\ C' = -D^{-1}CA' \\ B' = -A^{-1}BD' \\ (D - CA^{-1}B)D' = I_n \end{cases}$$

On en déduit que les matrices $A - BD^{-1}C$ et $D - CA^{-1}B$ sont nécessairement inversible et A' et D' sont leurs inverses respectifs.
Au final

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C - A)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 32 : [énoncé]
Par blocs, on a

$$A = \begin{pmatrix} M & O_2 \\ O_2 & -M \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette relation est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$ en constatant que cette expression satisfait

$$A^n \times A^{-n} = I_4$$

Exercice 33 : [énoncé]
Par inclusion et égalité des dimensions, on vérifie $\ker A = \ker B$.
Quitte à considérer des matrices semblables, on peut alors supposer que les matrices A, B s'écrivent par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_2 & O \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_2 & O \end{pmatrix} \text{ avec } A_1, B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

où r est le rang commun aux matrices A et B. La relation $A^2B = A$ donne alors

$$A_1^2 B_1 = A_1 \text{ et } A_2 A_1 B_1 = A_2$$

et ainsi

$$A_1(A_1B_1 - I_r) = O \text{ et } A_2(A_1B_1 - I_r) = O$$

Ainsi pour chaque ligne L de la matrice A_1 ou de la matrice A_2, on a

$$L(A_1B_1 - I_r) = O$$

Or la matrice A est de rang exactement r est les lignes L évoquées ci-dessus constituent une base de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. On en déduit $A_1B_1 = I_r$. La matrice A_1 est donc inversible d'inverse B_1 et on a alors

$$B^2A = \begin{pmatrix} B_1^2 A_1 & O \\ B_2 B_1 A_1 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_2 & O \end{pmatrix} = B$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) Pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\varphi(X^k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = (X+1)^k$$

On en déduit

$$\varphi(P) = P(X+1)$$

b) $\varphi^m(P) = P(X+m)$ donc

$$\varphi(X^k) = (X+m)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} m^{k-i} X^i$$

d'où

$$A^m = (m^{j-i} a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$$

c) $\varphi^{-1}(P) = P(X-1)$ donc

$$\varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k$$

d'où

$$A^{-1} = ((-1)^{j-i} a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$$

Exercice 35 : [énoncé]
Posons $x = \text{Re}(a)$ et $y = \text{Im}(a)$.
$f(1) = 1 + x + iy$ et $f(i) = i - ai = y + i(1-x)$.
La matrice de f dans la base $(1, i)$ est donc $\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix}$.
Si $|a| \neq 1$ alors $\det f \neq 0$. $\text{Im} f = \mathbb{C}$ et $\ker f = \{0\}$.
Si $|a| = 1$ alors $\det f = 0$ et $f \neq 0$. f est un endomorphisme de rang 1.
On a $f(\text{e}^{i\theta/2}) = 2\text{e}^{i\theta/2}$ et $f(\text{e}^{i(\theta+\pi)/2}) = 0$ donc $\text{Im} f = \text{Vect}\left\{\text{e}^{i\theta/2}\right\}$ et $\ker f = i\text{Im} f$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc une base de E.
$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_1$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

b) Par récurrence

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis $A^n = PB^nP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 37 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc une base de E.
$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

b) $B = I_3 + J$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque I_3 et J commutent la formule du binôme donne

$$B^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

car $J^k = O_3$ pour $k \geqslant 3$.
Par formule de changement de base, on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+3)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ -n & n+1 & n \\ -\frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & 1 + \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 38 : [énoncé]
Soit f solution. La matrice de f relative à la base canonique est à coefficients entiers. De plus f est un automorphisme car les vecteurs de la base canonique sont des valeurs prises par f et comme $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, la matrice de f^{-1} relative à la base canonique est à coefficients entiers. Inversement, si f est un automorphisme telle que f et f^{-1} soient représentés par des matrices à coefficients entiers dans la base canonique, il est immédiat que $f(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et que $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ donc que $\mathbb{Z}^n \subset f(\mathbb{Z}^n)$ et finalement $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons que les endomorphismes solutions peuvent aussi se décrire comme étant les endomorphismes canoniquement représentés par une matrice à coefficients entiers et qui sont de déterminant égal à 1 ou -1.

Exercice 39 : [énoncé]
Si $f = 0$ alors $f \circ g = 0$.
Sinon il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de g commutant avec f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et puisque $g^2 = 0$, $a = 0$.
Par suite la matrice de $f \circ g$ est nulle.

Exercice 40 : [énoncé]
F_ω est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Sa matrice dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est $A = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{ij}$. On remarque que $\bar{A}A = I_n$ car $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j-i)k} = \delta_{i,j}$. Par suite F_ω est un automorphisme et F_ω^{-1} étant représenté par $\bar{A}$, $F_\omega^{-1}(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) X^k$.

Exercice 41 : [énoncé]
a) S'il existe w tel que $u = w \circ v$ alors pour tout $x \in \ker v$,
$u(x) = (w \circ v)(x) = w(v(x)) = w(0) = 0$ et donc $x \in \ker u$. Ainsi $\ker v \subset \ker u$.
Inversement, supposons $\ker v \subset \ker u$.
Soit H un supplémentaire de $\ker v$ dans $\mathbb{R}^p$: $H \oplus \ker v = \mathbb{R}^p$.
On sait que la restriction $v_{\restriction H}$ de v au départ de H est un isomorphisme de H vers l'image de v.
Soit K un supplémentaire de $\mathrm{Im} v$ dans $\mathbb{R}^n$: $K \oplus \mathrm{Im} v = \mathbb{R}^n$.
Considérons ensuite w_0 l'application linéaire définie par

$$\forall x \in \mathrm{Im} v, w_0(x) = u(v_{\restriction H}^{-1}(x)) \text{ et } \forall x \in K, w_0(x) = 0$$

D'une part, pour tout $x \in \ker v$, $(w_0 \circ v)(x) = w_0(0) = 0 = u(x)$ car $\ker v \subset \ker u$.
D'autre part, pour tout $x \in H$,
$(w_0 \circ v)(x) = (w_0 \circ v_{\restriction H})(x) = \left(u \circ v_{\restriction H}^{-1} \circ v_{\restriction H}\right)(x) = u(x)$
Puisque les applications linéaires $w_0 \circ v$ et u coïncident sur les sous-espaces vectoriels supplémentaires $\ker v$ et H, c'est deux applications sont égales et on peut donc écrire

$$u = w_0 \circ v$$

Soit $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.
w est solution de l'équation $u = w \circ v$ si, et seulement si, $w \circ v = u = w_0 \circ v$ soit encore $(w - w_0) \circ v = 0$.
Or $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} g \subset \ker f$ donc $u = w \circ v \Leftrightarrow \mathrm{Im} v \subset \ker(w - w_0)$.
Par suite les solutions de l'équation $u = w \circ v$ sont de la forme $w_0 + f$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ vérifiant $\mathrm{Im} v \subset \ker f$.
b) On définit les matrices étudiées :

```
A:=matrix(3, 3, [-2, 1, 1, 8, 1, -5, 4, 3, -3]);
B:=matrix(3, 3, [1, 2, -1, 2, -1, -1, -5, 0, 3]);
```

On détermine les noyaux de celles-ci

```
kernel(A);
kernel(B);
```

On observe que ces noyaux sont égaux à $\mathrm{Vect}\,((3, 1, 5))$ et donc $\ker B \subset \ker A$. Par l'étude qui précède transposée aux matrices, on peut affirmer que l'équation étudiée possède au moins une solution.
Pour construire une solution à cette équation, il suffit d'introduire une matrice B_0 inversible coïncidant avec B sur un supplémentaire de $\ker B$ et de considérer $C_0 = AB_0^{-1}$.
En prenant pour supplémentaire de $\ker B$ l'espace $\mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

convient. Définissons-la et calculons C_0 :

```
B0:=matrix(3, 3, [1, 2, 0, 2, -1, 0, -5, 0, 1]);
C0:=evalm(A&*B0^(-1));
```

On obtient

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier l'exactitude de cette solution par le calcul

```
evalm(A-C0&*B);
```

Les autres matrices solutions se déduisent de C_0 par ajout d'une matrice E telle que $\mathrm{Im} B \subset \ker E$. On détermine l'image de B

```
colspace(B);
```

On obtient $\mathrm{Vect}\,((1, 0, -1), (0, 1, -2))$
La condition $\mathrm{Im} B \subset \ker E$ donne les relations $C_1 = C_3$ et $C_2 = 2C_3$ sur les colonnes de E qui est donne une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 2a & a \\ b & 2b & b \\ c & 2c & c \end{pmatrix}$$

c) Il existe C tel que $A = CB$ si, et seulement si, $\ker B \subset \ker A$ ce qui équivaut à la condition $AX = 0$ avec $X = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Cela donne la condition $3C_1 + C_2 + 5C_3 = 0$ sur les colonnes de A.
Si cette condition est remplie, l'étude qui précède donne que les solutions de l'équation $A = CB$ sont les matrices de la forme

$$AB_0^{-1} + \begin{pmatrix} a & 2a & a \\ b & 2b & b \\ c & 2c & c \end{pmatrix}$$

d) Si $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$ alors il est immédiate que $\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$.
Inversement, supposons $\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$.
Considérons $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{2n})$ déterminé par $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$.
Puisque $\ker v = \ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$, l'étude qui précède assure l'existence de $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^q)$ vérifiant $u = w \circ v$. Posons alors $w_1 : y_1 \in \mathbb{R}^n \mapsto w(y_1, 0_{\mathbb{R}^n})$ et $w_2 : y_2 \in \mathbb{R}^n \mapsto w(0_{\mathbb{R}^n}, y_2)$.
$w_1, w_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ et vérifient $w(y_1, y_2) = w_1(y_1) + w_2(y_2)$ de sorte que $u = w \circ v$ donne $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) Les endomorphismes $\lambda \mathrm{Id}_E$ ont la propriété voulue.
b) Les familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ engendrent le même espace vectoriel. Etant toutes deux formées de n vecteurs, si l'une est libre, l'autre aussi.
c) Soit u un endomorphisme de E dont la matrice est diagonale dans toutes les bases de E.
La matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
Puisque la matrice de u dans la base $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est aussi diagonale, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(e_1 + e_i) = \alpha(e_1 + e_i)$$

Or par linéarité

$$u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$$

Par liberté de la famille (e_1, e_i) on identifie les scalaires et on peut affirmer

$$\lambda_1 = \alpha = \lambda_i$$

Ainsi, si un endomorphisme à une représentation matricielle diagonale dans toutes les bases de E, sa matrice est de la forme λI_n et donc cet endomorphisme est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$.
d) Soit u un tel endomorphisme. Si $A = (a_{i,j})$ est sa matrice dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ alors sa matrice dans la base $(e_1, 2e_2, \dots, ne_n)$ a pour coefficient général

$$\frac{j}{i} a_{i,j}$$

et comme cette matrice doit être égale à la précédente, on obtient

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}\,, i \neq i \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Ainsi, cet endomorphisme a une matrice diagonale dans toute base de E et en vertu de ce qui précède, il est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 43 : [énoncé]
Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$. Il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(a)$ et alors

$$x = -f^3(a) = -f^2(x) = -f(f(x)) = -f(0) = 0$$

Ainsi $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ puis, par le théorème du rang, on peut affirmer

$$\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$$

Si $f^2 + \mathrm{Id} = \tilde{0}$ alors $f^2 = -\mathrm{Id}$ puis $(\det f)^2 = \det(-\mathrm{Id}) = -1$. C'est impossible.
On en déduit que $f^2 + \mathrm{Id} \neq \tilde{0}$ et puisque $f \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = \tilde{0}$, on a $\ker f \neq \{0\}$.
Soit $e_1 \in \ker f$ non nul.
Puisque par hypothèse f n'est pas l'application nulle, considérons $e_2 = f(a) \in \mathrm{Im} f$ vecteur non nul. Posons $e_3 = -f(e_2) \in \mathrm{Im} f$.
On vérifie

$$f(e_3) = -f^2(e_2) = -f^3(a) = f(a) = e_2$$

De plus les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires.
En effet si $e_3 = \lambda e_2$, on obtient en composant par f, $e_2 = -\lambda e_3$ et on en déduit $e_2 = -\lambda^2 e_2$. Sachant $e_2 \neq 0$, on obtient $\lambda^2 = -1$ ce qui est impossible avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puisque (e_2, e_3) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$ et puisque (e_1) est une famille libre de $\ker f$, on peut affirmer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans celle-ci, la matrice de f est égale à A.

Exercice 44 : [énoncé]
Soit $x \notin \ker f^{n-1}$. Un tel x existe puisque $f^{n-1} \neq 0$.
Considérons la famille $\mathcal{B} = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$.
Supposons

$$\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) + \dots + \lambda_1 f(x) + \lambda_0 x = 0_E$$

En y appliquant successivement $f^{n-1}, \dots, f, \mathrm{Id}$ on obtient $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_{n-2} = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
$\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.
De plus $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme convenable.

Exercice 45 : [énoncé]
Posons $r = \mathrm{rg} f$ et $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ une base de $\mathrm{Im} f$.
Puisque $f^2 = 0$, la famille $\mathcal{B} = (f(e_1), \dots, f(e_r))$ est formée de vecteurs de $\ker f$, de plus elle est libre, on peut donc la compléter en une base de la forme $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ avec $p = \dim \ker f$.
Considérons $\mathcal{C} = (f(e_1), \dots, f(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_r)$.
En vertu du théorème du rang, cette famille est formée de $\dim E$ vecteurs.
De plus si l'on dispose d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{C}$, en appliquant f et en exploitant la liberté de $\mathcal{B}$, on justifie que les coefficients devant les $e_1, \dots, e_r$ sont nuls. Ensuite, sachant $\mathcal{B}'$ libre, on conclut que les autres coefficients sont nuls. La famille $\mathcal{B}$ est une base et la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est de la forme voulue.

Exercice 46 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E représenté par la matrice A dans $\mathcal{B}$. On a $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.
Notons que cela entraîne $\dim \mathrm{Im} u = 1$ et $\dim \ker u = 2$.
Cherchons une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = B$. Après analyse du problème : Considérons $\varepsilon_1 \notin \ker(u)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. ε_2 est un vecteur non nul de $\ker u$ qui peut être complétée en une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\ker u$. Formons $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Si $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0$ alors en appliquant u, $\lambda_1 u(\varepsilon_1) = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0$ entraîne $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puisque $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre.
Finalement la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc bien une base de E. La matrice de u dans cette base est bien la matrice B. On peut conclure.

Exercice 47 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.
On vérifie $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Soit $x \notin \ker f^{n-1}$. Un tel x existe puisque $f^{n-1} \neq 0$.
Considérons $\mathcal{B}' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$.
Supposons

$$\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) + \dots + \lambda_1 f(x) + x = 0$$

En y appliquant successivement $f^{n-1}, \dots, f, \mathrm{Id}$ on obtient $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_{n-2} = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0$.
$\mathcal{B}'$ est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est égale à $\mathcal{B}$ donc A et B sont semblables.

Exercice 48 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.
On observe que $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.
Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec A' matrice de taille r. De plus $r = \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B = \mathrm{rg} A'$ donc A' est inversible.

Exercice 49 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.
On observe $r = \mathrm{rg} f$, $f \neq 0$ et $f^2 = 0$ de sorte que $\mathrm{Im} f \subset \ker f$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de Imf complétée en $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ base de $\ker f$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, il existe e_{n-r+i} vecteur de E tel que $f(e_{n-r+i}) = e_i$.
Montrons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
Supposons
$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \cdots + \lambda_{n-r} e_{n-r} + \lambda_{n-r+1} e_{n-r+1} + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ (1).
En appliquant f à la relation (1), on obtient $\lambda_{n-r+1} e_1 + \cdots + \lambda_n e_r = 0$ et donc $\lambda_{n-r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ car $(e_1, \ldots, e_r)$ libre.
La relation (1) devient $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \cdots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$ et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$ car $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ libre.
La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et formée de $n = \dim E$ vecteurs de E c'est donc une base de E et la matrice de f dans celle-ci est égale à B. On peut conclure que A et B sont semblables.

Exercice 50 : [énoncé]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Analyse : Cherchons une base (e_1, e_2, e_3) telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = -e_2$. On en déduit $e_1 \in \ker f$, $e_2 \in \ker(f^2 + \mathrm{Id})$ et $e_3 = f(e_2)$.
Synthèse : L'endomorphisme f vérifie $f \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = 0$. Par l'absurde, si f est inversible alors $f^2 + \mathrm{Id} = 0$ et donc $\det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}) = -1$. Or $\det(f^2) = (\det f)^2 \geqslant 0$. C'est absurde. On en déduit $\ker f \neq \{0\}$. Soit e_1 un vecteur non nul de $\ker f$.
Puisque $(f^2 + \mathrm{Id}) \circ f = 0$, on a $\mathrm{Im} f \subset \ker(f^2 + \mathrm{Id})$. Or $f \neq 0$ donc $\mathrm{Im} f \neq \{0\}$ puis $\ker(f^2 + \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.
Soit e_2 un vecteur non nul de $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$ et $e_3 = f(e_2)$. On vérifie$f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$.
Il reste à observer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Supposons $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ (1) avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
En appliquant deux fois f à cette relation, on obtient $\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2 = 0$ (2) et $-\lambda_2 e_2 - \lambda_3 e_3 = 0$ (3).
La combinaison d'équations $\lambda_3(2) + \lambda_2(3)$ donne $(\lambda_3^2 + \lambda_2^2) e_2 = 0$.
Puisque le vecteur e_2 a été choisi non nul, on en déduit $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puis la relation (1) donne $\lambda_1 = 0$ puisque le vecteur e_1 a été choisi non nul.
Finalement, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f dans celle-ci est celle voulue.
On peut conclure que A est semblable à la matrice proposée.

Exercice 51 : [énoncé]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.
Analyse : Cherchons une base (e_1, e_2, e_3, e_4) telle que :
$f(e_1) = e_2, f(e_2) = -e_1, f(e_3) = e_4$ et $f(e_4) = -e_3$.
La connaissance de e_1 et e_3 suffit pour former e_2 et e_4 avec les quatre relations voulues.
Synthèse :
Prenons $e_1 \neq 0$, $e_2 = f(e_1)$, $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $e_4 = f(e_3)$.
Supposons $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$ i.e. $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 f(e_3) = 0$ (1).
En appliquant l'endomorphisme f : $\lambda_1 f(e_1) - \lambda_2 e_1 + \lambda_3 f(e_3) - \lambda_4 e_3 = 0$ (2).
$\lambda_3(1) - \lambda_4(2)$ donne $(\lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_4) e_1 + (\lambda_3\lambda_2 - \lambda_4\lambda_1) f(e_1) + (\lambda_3^2 + \lambda_4^2) e_3 = 0$.
Puisque $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, on a $\lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0$ d'où $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
(1) et (2) donne alors $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) = 0$ et $\lambda_1 f(e_1) - \lambda_2 e_1 = 0$.
Comme ci-dessus on parvient à $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$ d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Finalement (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base convenable. On peut conclure que M est semblable à la matrice proposée.

Exercice 52 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de trace nulle et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'endomorphisme canoniquement associé.
Si f est une homothétie vectorielle (i.e. de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$) alors $f = \tilde{0}$ car $\mathrm{tr} f = 0$ et on peut alors conclure.
Sinon, il existe un vecteur x tel que $f(x)$ ne soit pas colinéaire à x. En représentant f dans une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice A est semblable à la matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & A' \end{array}\right)$$

avec $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
Par hypothèse de récurrence, il existe P inversible tel que $P^{-1}A'P$ soit de diagonale nulle. En considérant la matrice inversible

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) \text{ avec } Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)$$

on obtient que la matrice M est semblable à

$$Q^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & A' \end{array}\right) Q = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ \star & & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice A est semblable à une matrice à coefficients diagonaux tous nuls.
Récurrence établie.

Exercice 53 : [énoncé]
a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On a

$$\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} A = 1$$

et donc par la formule du rang

$$\dim \ker f = n - 1$$

Si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à $\ker f$, la matrice de f dans cette base a ses $n-1$ premières colonnes nulles.
b) On peut écrire $A = PBP^{-1}$ avec P matrice inversible et B une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\lambda = \mathrm{tr} B = \mathrm{tr} A$$

Puisque $B^2 = \lambda B$, on a

$$P^{-1}A^2P = \mathrm{tr}(A).P^{-1}AP$$

puis

$$A^2 = \mathrm{tr}(A).A$$

Puisque $\det(I_n + B) = 1 + \lambda$, on a

$$\det(P^{-1}) \det(I_n + A) \det P = 1 + \mathrm{tr} A$$

puis

$$\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr} A$$

Exercice 54 : [énoncé]
Posons $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. L'étude, coefficient par coefficient, de la relation $MD = DM$ donne que les matrices commutant avec D sont les matrices diagonales. Parmi les matrices diagonales, celles qui sont semblables à D sont celles qui ont les mêmes coefficients diagonaux

Exercice 55 : [énoncé]
Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $PA = BP$. En posant $Q = \mathrm{Re}(P)$ et $R = \mathrm{Im}(P)$ on obtient $QA + iRA = BQ + iBR$ donc $QA = BQ$ et $RA = BR$ car A, B, Q, R réelles. Cependant on ne sait pas si Q ou R sont inversibles. Or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$ et $\lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$ est une fonction polynomiale non nulle car $\det(Q + iR) \neq 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R$ est inversible et on peut conclure.

Exercice 56 : [énoncé]
Commençons par déterminer $f(I_n)$ et $f(O_n)$.
On a $f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)^2$ donc $f(I_n) = 0$ ou 1.
Si $f(I_n) = 0$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(A) = f(A \times I_n) = f(A) \times f(I_n) = 0$ et donc f est constante ce qui est exclu. Ainsi $f(I_n) = 1$.
Aussi $f(O_n) = f(O_n^2) = f(O_n) \times f(O_n)$ donc $f(O_n) = 0$ ou 1.
Si $f(O_n) = 1$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$f(A) = f(O_n) \times f(A) = f(O_n \times A) = f(O_n) = 1$ et donc f est constante ce qui est exclu. Ainsi $f(O_n) = 0$.
Si A est inversible alors $f(I_n) = f(A \times A^{-1})$ donne $f(A) \times f(A^{-1}) = 1$ et donc $f(A) \neq 0$.

La réciproque est plus délicate.
Supposons A non inversible et posons $r = \mathrm{rg}A$.
La matrice A est équivalente à la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles. On a alors
$f(A) = f(Q)f(J_r)f(P)$ et il suffit de montrer $f(J_r) = 0$ pour conclure.
Par permutation des vecteurs de bases, la matrice J_r est semblable à toute matrice diagonale où figure r coefficients 1 et $n-r$ coefficients 0. En positionnant, pertinemment les coefficients 0, on peut former des matrices $A_1, \ldots, A_p$ toutes semblables à J_r vérifiant

$$A_1 \ldots A_p = O_n$$

On a alors

$$f(A_1) \ldots f(A_p) = 0$$

Or il est facile d'établir que si deux matrices sont semblables, la fonction f prend les mêmes valeurs sur celles-ci. Par suite $f(J_r) = f(A_1) = \ldots = f(A_p)$ et ainsi $f(J_r)^p = 0$ puis enfin $f(J_r) = 0$.

Exercice 57 : [énoncé]
On vérifie aisément que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$.
Puisque $A^2 = O_3$, on a $\mathrm{Im}A \subset \ker A$.
Puisque $A \neq O_3$, la formule du rang et l'inclusion précédente montre

$$\mathrm{rg}A = 1 \text{ et } \dim \ker A = 2$$

Soient $X_1 \in \mathrm{Im}A$ non nul, X_2 tel que (X_1, X_2) soit base de $\ker A$ et X_3 un antécédent de X_1. En considérant la matrice de passage P formée des colonnes X_1, X_2, X_3, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

En raisonnant par coefficients inconnus, on obtient que les matrices N vérifiant $BN = NB$ sont de la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Par suite les matrice M vérifiant $AM = MB$ sont celle de la forme

$$M = P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

L'espace $\mathcal{C}$ est donc de dimension 5 et l'on en forme une base à l'aide des matrices

$$M_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},\ M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},\ M_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$M_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } M_5 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exercice 58 : [énoncé]
$\mathrm{tr}A \neq \mathrm{tr}B$ dont A et B ne sont pas semblables.

Exercice 59 : [énoncé]
Notons E la matrice correspondant à l'élément neutre de $(G, \times)$. Celle-ci est nécessairement non nulle car sinon la partie G serait réduite à la matrice nulle.
Puisque la matrice E est neutre, on a $E^2 = E$ et donc E est la matrice d'une projection. En posant $r = \mathrm{rg}E \in \mathbb{N}^\star$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$E = PJ_rP^{-1} \text{ avec } J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire par blocs

$$M = P \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}$$

L'identité $EM = M = ME$ donne la nullité des blocs B, C et D.
On peut alors introduire l'application $\varphi : G \to \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ qui associe à $M \in G$ le bloc A de la description ci-dessus. On vérifie aisément que l'application φ est injective et que

$$\forall M, N \in G, \varphi(MN) = \varphi(M) \times \varphi(N)$$

Enfin, on a aussi $\varphi(E) = I_r$ de sorte qu'on peut affirmer que l'image de φ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_r(\mathbb{R}), \times)$. Le groupe $(G, \times)$ alors isomorphe à ce sous-groupe.

Exercice 60 : [énoncé]
De telles matrices n'existent pas car
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$
et donc
$$\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \neq \mathrm{tr}(I_n)$$

Exercice 61 : [énoncé]
On a
$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}\,(AB - BA) = \mathrm{tr}\,(AB) - \mathrm{tr}\,(BA) = 0$$
car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Généralisons ce calcul
$$\mathrm{tr}\,(A^p) = \mathrm{tr}\left(A^{p-1}(AB - BA)\right) = \mathrm{tr}\,(A^pB) - \mathrm{tr}\left(A^{p-1}BA\right)$$
Or
$$\mathrm{tr}\left(A^{p-1}BA\right) = \mathrm{tr}\left((A^{p-1}B)A\right) = \mathrm{tr}\left(A(A^{p-1}B)\right) = \mathrm{tr}\,(A^pB)$$
donc
$$\mathrm{tr}\,(A^p) = 0$$

Exercice 62 : [énoncé]
I) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $e_1, \dots, e_{n-1} \in \ker f$ et $e_n \in \mathrm{Im}f$. On a $f(e_n) \in \mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(e_n)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_n) = \lambda e_n$ et donc $f^2(e_n) = \lambda f(e_n)$. Cette relation vaut aussi pour les vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$ et donc par coïncidence de deux applications linéaires sur les vecteurs d'une base on peut affirmer que $f^2 = \lambda f$. De plus, la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ donne $\lambda = \mathrm{tr}f$. Ainsi, pour f de rang 1, f est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{tr}f = 1$.

Exercice 63 : [énoncé]
Calculons les coefficients diagonaux de la représentation matricielle de φ dans la base canonique formée des matrices élémentaires $E_{i,j}$.
On a $\varphi(E_{i,j}) = E_{i,j}A$.
Or $A = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}E_{k,\ell}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell}E_{i,\ell}$ car $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
La composant de $\varphi(E_{i,j})$ selon $E_{i,j}$ vaut $a_{j,j}$.
Par suite la trace de φ vaut $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,j} = n\mathrm{tr}A$.

Exercice 64 : [énoncé]
Supposons que M soit semblable à une matrice M' via une matrice inversible P i.e.
$$M' = P^{-1}MP$$
Si on peut écrire $M' = A'B' - B'A'$ alors $M = AB - BA$ avec $A = PA'P^{-1}$ et $B = PB'P^{-1}$.
On peut ainsi transformer la matrice M en une matrice semblable sans changer la problématique.
Etablissons maintenant le résultat demandé en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice M.
Si M est taille 1 : ok
Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{N}^\star$.
Soit M une matrice carrée d'ordre $n+1$ de trace nulle.
Montrons que M est semblable à une matrice de la forme
$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right)$$
Si M est matrice d'une homothétie alors $\mathrm{tr}M = 0$ permet de conclure $M = O_n$.
Sinon, il existe des vecteurs qui ne sont pas vecteurs propres de l'endomorphisme associé à M.
Soit x, un tel vecteur. En introduisant une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice M est semblable à celle voulue.
Compte tenu de la remarque préliminaire, on suppose désormais que la matrice M est de la forme
$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & M' \end{array}\right)$$
avec $\mathrm{tr}M' = 0$.
Par l'hypothèse de récurrence on peut écrire
$$M' = A'B' - B'A'$$
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ qui n'est par valeur propre de la matrice B'.
En posant
$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L(B' - \lambda I)^{-1} \\ \hline (\lambda I - B')^{-1}C & A' \end{array}\right)$$
et
$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$
on obtient
$$M = AB - BA$$
Récurrence établie.

Exercice 65 : [énoncé]
Posons $a_{j,i} = \varphi(E_{i,j})$. $\varphi(M) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}m_{i,j} = \mathrm{tr}(AM)$ avec $A = (a_{i,j})$.

Exercice 66 : [énoncé]
Puisque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on a $\mathrm{tr}\,[A,B] = 0$. $\ker(\mathrm{tr})$ est donc un sous-espace vectoriel contenant $\{[A,B]\,/A,B\in E\}$ donc

$$\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B\in E\}\subset\ker(\mathrm{tr})$$

De plus, tr étant une forme linéaire non nulle, $\ker(\mathrm{tr})$ est un hyperplan.
Montrons qu'il en en est de même de $\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B\in E\}$.
Pour $i\neq j$, $E_{i,j} = [E_{i,i},E_{i,j}]$ et pour $i\neq n$, $E_{i,i}-E_{n,n} = [E_{i,n},E_{n,i}]$.
Par suite $\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B\in E\}$ contient la famille libre à n^2-1 éléments formée par les $E_{i,j}$, $i\neq j$ et les $E_{i,i}-E_{n,n}$, $i\neq n$. Il en découle que $\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B\in E\}$ est de dimension supérieure ou égale à n^2-1.
Par inclusion et un argument de dimension, on peut conclure

$$\ker(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B\in E\}$$

Exercice 67 : [énoncé]
Notons que $\mathrm{Vect}\,\{AB-BA/A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ est inclus dans l'hyperplan des matrices de trace nulle.
Par suite $\dim\mathrm{Vect}\,\{AB-BA/A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}\leqslant n^2-1$.
Pour $A = E_{i,j}$ et $B = E_{j,j}$ (avec $i\neq j$) : $AB-BA = E_{i,j}$.
Pour $A = E_{i,n}$ et $B = E_{n,i}$: $AB-BA = E_{i,i}-E_{n,n} = F_i$.
La famille formée des $E_{i,j}$ et des F_i est libre et constituée de n^2-1 éléments.
Par suite $\dim\mathrm{Vect}\,\{AB-BA/A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}\geqslant n^2-1$.
Finalement $\dim\mathrm{Vect}\,\{AB-BA/A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\} = n^2-1$.

Exercice 68 : [énoncé]
Soit X solution. La matrice $X+{}^tX$ est symétrique.
Cas A n'est pas symétrique :
Nécessairement $\mathrm{tr}(X) = 0$ et l'équation étudiée devient $X+{}^tX = 0$ dont les solutions sont les matrices antisymétriques. Inversement, ces dernières sont solutions de l'équation initiale.
Cas A est symétrique.
En passant à la trace l'équation étudiée, on obtient $2\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(A)$.
Si $\mathrm{tr}(A)\neq 2$ alors on obtient à nouveau $\mathrm{tr}(X) = 0$ et on conclut que X est antisymétrique.
Si $\mathrm{tr}(A) = 2$ alors $Y = X-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X)A$ vérifie $Y+{}^tY = X+{}^tX-\mathrm{tr}(X)A = 0$ donc Y est antisymétrique puis la matrice X est de la forme $\lambda A+Y$ avec Y antisymétrique. Inversement, une telle matrice est solution.
Pour résumer :
Si $A\notin\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{tr}(A)\neq 2$ alors $\mathcal{S} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Si $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{tr}(A) = 2$ alors $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(A)\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 69 : [énoncé]
a) Soit p un projecteur de E espace de dimension n. En posant $F = \mathrm{Im}p$ et $G = \ker p$, la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $E = F\oplus G$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & O_{p,r-p}\\ O_{r-p,p} & O_{r-p}\end{pmatrix}$$

On y lit

$$\mathrm{rg}p = r = \mathrm{tr}p$$

b) Posons

$$B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}A^k$$

Puisque $A^q = I_n$, on a $AB = B$ et plus généralement $A^kB = B$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
On en déduit

$$B^2 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}A^kB = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}B = B$$

et donc B est la matrice d'un projecteur. Par suite

$$\mathrm{rg}B = \mathrm{tr}B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{tr}(A^k)$$

Pour $X\in\ker(A-I_n)$, on a $AX = X$ donc $BX = X$ et ainsi $\ker(A-I_n)\subset\mathrm{Im}B$.
Inversement, si $Y\in\mathrm{Im}B$, il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = BX$ et alors

$$(A-I_n)Y = ABX-BX = BX-BX = 0$$

donc $\mathrm{Im}B\subset\ker(A-I_n)$ puis $\mathrm{Im}B = \ker(A-I_n)$. On peut alors conclure

$$\dim\ker(A-I_n) = \mathrm{rg}B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{tr}(A^k)$$

Exercice 70 : [énoncé]
Soit
$$p = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g$$
On a
$$p\circ p = \frac{1}{n^2}\sum_{h\in G}\sum_{g\in G} h\circ g$$
Or, pour $h\in G$ fixé, les $h\circ g$ parcourt G pour g parcourant G. Ainsi
$$\sum_{g\in G} h\circ g = \sum_{k\in G} k$$
puis
$$p\circ p = \frac{1}{n^2}\sum_{h\in G}\sum_{k\in G} k = \frac{1}{n}\sum_{k\in G} k = p$$
Ainsi p est un projecteur et la dimension de son image $\mathrm{Im}p = \ker(p-\mathrm{Id})$ est sa trace
$$\mathrm{tr}p = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}g$$
Pour tout $g\in G$, on vérifie $g\circ p = p$ par des calculs analogues aux précédents. Si x est invariant par p, il l'est aussi par g et donc
$$\ker(p-\mathrm{Id}) \subset \bigcap_{g\in G}\ker(g-\mathrm{Id})$$
L'inclusion inverse étant immédiate, on conclut
$$\bigcap_{g\in G}\ker(g-\mathrm{Id}) = \ker(p-\mathrm{Id})$$
puis l'on obtient l'égalité de dimension
$$\dim\left(\bigcap_{g\in G}\ker(g-\mathrm{Id}_E)\right) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}g$$

Exercice 71 : [énoncé]
a) L'application considérée est au départ d'un ensemble infini et à valeurs dans un ensemble fini, elle ne peut donc être injective et il existe $k<\ell\in\mathbb{N}$, $M^k = M^\ell$ ce qui fournit $M^p = I_n$ avec $p=\ell-k$ car M est inversible. On en déduit que $I_n\in H$ et que $M^{-1} = M^{p-1}\in H$. Cela suffit pour conclure que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
b) Si $M\in H$ alors $N\mapsto MN$ et $N\mapsto NM$ sont des permutations de H. On en déduit que $MP = PM = P$ car pour chaque terme les sommes portent sur les mêmes éléments.
$P^2 = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} MP = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} P = P$.
c) Puisque $P^2 = P$, $\mathrm{Im}P = \ker(P-I_n)$ et $\ker P$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si $X\in\ker P$ alors $PX = 0$ et pour tout $M\in H$, $PMX = PX = 0$ donc $MX\in\ker P$. Ainsi $\ker P$ est stable par H.
Si $X\in\bigcap_{M\in H}\ker(M-I_n)$ alors pour tout $M\in H$, $MX = X$ donc $PX = X$ puis $X\in\ker(P-I_n)$.
Inversement, si $X\in\ker(P-I_n)$ alors $PX = X$ et pour tout $M\in H$, $X = PX = MPX = MX$ et donc $X\in\bigcap_{M\in H}\ker(M-I_n)$. Ainsi $\bigcap_{M\in H}\ker(M-I_n) = \ker(P-I_n)$ et $\ker P$ est solution du problème posé.
d) P est une projection donc $\mathrm{tr}P = \mathrm{rg}P\in\mathbb{N}$ et donc $\sum_{M\in H}\mathrm{tr}M = q\mathrm{tr}P\in q\mathbb{N}$.
Si $\sum_{M\in H}\mathrm{tr}M = 0$ alors $P = 0$. Par suite $\bigcap_{M\in H}\ker(M-I_n) = \{0\}$ et il n'y a donc pas de vecteur non nul invariant pour tous les éléments de H et inversement.

Exercice 72 : [énoncé]
a) Posons $p = \sum_{g\in G} g$. $p^2 = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} gh$. Or pour $g\in G$, l'application $h\mapsto gh$ est une permutation du groupe G donc $\sum_{h\in G} gh = p$ et par suite $p^2 = \mathrm{Card}G.p$.
Par suite $\frac{1}{\mathrm{Card}G}p$ est une projection vectorielle et puisque son rang égale sa trace, $\mathrm{rg}p = 0$. Ainsi $p = 0$.
b) Considérons $\varphi(x,y) = \sum_{g\in G}(g(x)\mid g(y))$. φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel on a $\forall h\in G, h^\star = h^{-1}$. Pour ce produit scalaire, $V^\perp$ est un supplémentaire de V stable pour tout h^{-1} avec h élément de G donc stable pour tout élément de G.

Exercice 73 : [énoncé]
Si $i\neq j$ alors $E_{i,i}E_{i,j} = E_{i,j}$ et $E_{i,j}E_{i,i} = 0$ donc $T(E_{i,j}) = 0$.
De plus $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$ et $E_{j,i}E_{i,j} = E_{j,j}$ donc $T(E_{i,i}) = T(E_{j,j}) = \alpha$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$T(A) = T\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}T(E_{i,j}) = \alpha\mathrm{tr}(A)$$

donc $T = \alpha.\mathrm{tr}$.

Exercice 74 : [énoncé]
$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$ et si $i \neq j$,
$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(0) = 0$.
Ainsi

$$f(A) = f(\sum a_{i,j}E_{i,j}) = \lambda\mathrm{tr}A$$

en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.

Exercice 75 : [énoncé]
a) Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque

$$E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \text{ et } E_{j,j} = E_{j,i}E_{i,j}$$

l'hypothèse de travail donne

$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$$

De plus, pour $i \neq j$, on a

$$E_{i,j} = E_{i,j}E_{j,j} \text{ et } O_n = E_{j,j}E_{i,j}$$

donc

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(O_n) = 0$$

Ainsi

$$f(A) = f(\sum a_{i,j}E_{i,j}) = \lambda\mathrm{tr}A$$

en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.
b) Posons $f = \mathrm{tr} \circ g$. L'application f est une forme linéaire vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA)$$

Ainsi $f = \lambda\mathrm{tr}$.
Or $f(I_n) = \mathrm{tr}\left(g(I_n)\right) = \mathrm{tr}I_n$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $f = \mathrm{tr}$ et

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(g(M)) = f(M) = \mathrm{tr}(M)$$

Exercice 76 : [énoncé]
La trace de f est la somme des coefficients diagonaux de la matrice représentative de f dans la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices élémentaires $E_{i,j}$. Puisque le coefficient d'indice (i,j) de la matrice$f(E_{i,j})$ est $a_{i,i} + a_{j,j}$ on obtient

$$\mathrm{tr}f = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,i} + a_{j,j}) = 2n\mathrm{tr}A$$

Exercice 77 : [énoncé]
Si X est solution alors

$$\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

et donc

$$\mathrm{tr}(X)(1 - \mathrm{tr}(A)) = \mathrm{tr}(B)$$

Cas $\mathrm{tr}A \neq 1$.
On obtient

$$\mathrm{tr}(X) = \frac{\mathrm{tr}(B)}{1 - \mathrm{tr}(A)}$$

puis

$$X = \frac{\mathrm{tr}(B)}{1 - \mathrm{tr}(A)}A + B$$

Inversement, cette matrice est bien solution.
Cas $\mathrm{tr}A = 1$.
Sous cas $\mathrm{tr}B \neq 0$.
L'équation $\mathrm{tr}(X)(1 - \mathrm{tr}(A)) = \mathrm{tr}(B)$ est incompatible, il n'y a pas de solution.
Sous cas $\mathrm{tr}B = 0$.
La solution X est de la forme $\lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et inversement de telles matrices sont solutions.

Exercice 78 : [énoncé]
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E avec $e_1, \ldots, e_{n-1} \in \ker f$.
La matrice de f dans cette base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_n = \mathrm{tr}f$.

On observe alors que $A^2 = \lambda_n A$.
Ainsi si $\mathrm{tr} f = 1$ alors $A^2 = A$ donc $f^2 = f$ puis f est un projecteur.
Par l'isomorphisme de représentation matricielle dans une base donnée de E, on peut retraduire le problème matriciellement.
En considérant les éléments $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ on forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que souhaitée.

Exercice 79 : [énoncé]
Les matrices A_i sont des matrices de projection et donc

$$\mathrm{tr} A_i = \mathrm{rg} A_i$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg} A_i = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{tr} A_i = \mathrm{tr} I_n = n$$

Or

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im} \sum_{i=1}^{n} A_i \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im} A_i \subset \mathbb{R}^n$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im} A_i = \mathbb{R}^n$$

et la relation sur les rangs donne

$$\sum_{i=1}^{k} \dim\left(\mathrm{Im} A_i\right) = \dim \mathbb{R}^n$$

Les espaces $\mathrm{Im} A_i$ sont donc en somme directe

$$\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{Im} A_k = \mathbb{R}^n$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$x = A_1 x + \cdots + A_k x$$

En particulier, pour le vecteur $A_j x$, on obtient

$$A_j x = A_1 A_j x + \cdots + A_j x + \cdots + A_k A_j x$$

La somme directe précédente donne alors par unicité d'écriture

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant k, A_i A_j x = 0$$

et peut alors conclure.

Exercice 80 : [énoncé]
La somme des colonnes de B est nulle donc $\det B = 0$.

Exercice 81 : [énoncé]
On a

$$\det(A + iB)\det(A - iB) = \det(A^2 + B^2)$$

car A et B commutent.
Or $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$ donc $\det(A^2 + B^2) = z\bar{z} \geqslant 0$.

Exercice 82 : [énoncé]
Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On observe

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}$$

Par suite dans la base $(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,2}, \ldots, E_{1,n}, \ldots, E_{n,n})$, la matrice de l'endomorphisme φ_A est diagonale par blocs avec n blocs diagonaux tous égaux à A. On en déduit

$$\mathrm{tr}\varphi_A = n \mathrm{tr} A \text{ et } \det \varphi_A = (\det A)^n$$

Exercice 83 : [énoncé]
a) $AA^{-1} = I_n$ donne $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ or $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ donc $\det A = \pm 1$.
b) Posons $P(x) = \det(A + xB)$. P est une fonction polynomiale de degré inférieur à n.
Pour tout $x \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, on a $P(x) = \pm 1$ donc $P(x)^2 - 1 = 0$.
Le polynôme $P^2 - 1$ possède au moins $2n + 1$ racines et est de degré inférieur à n, c'est donc le polynôme nul.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \pm 1$.
Pour $x = 0$, on obtient $\det A = \pm 1$.
Pour $x \to +\infty$,

$$\det\left(\frac{1}{x} A + B\right) = \frac{P(x)}{x^n} \to 0$$

donne $\det B = 0$.

Exercice 84 : [énoncé]
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de l'espace des colonnes,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(A_1, \ldots, A_n)$$

et

$$\det B = \det_{\mathcal{B}}(B_1, \ldots, B_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n B_i, B_2, \ldots, B_n\right)$$

avec

$$\sum_{i=1}^n B_i = (n-1)\sum_{i=1}^n A_i$$

Par suite

$$\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, B_2 - \sum_{i=1}^n A_i, \ldots, B_n - \sum_{i=1}^n A_i\right)$$

Ce qui donne

$$\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, -A_2, \ldots, -A_n\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1, \ldots, A_n)$$

Finalement

$$\det B = (-1)^{n-1}(n-1)\det A$$

Exercice 85 : [énoncé]
a) $G \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, G est non vide, stable par passage à l'inverse et par produit car V l'est. Ainsi G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ donc un groupe.
b) Si $M \in G$ alors $\det M, \det M^{-1} \in \mathbb{Z}$ et $\det M \times \det M^{-1} = \det I_4 = 1$ donc $\det M = \pm 1$.
Inversement si $\det M = \pm 1$ alors $M^{-1} = {}^t\mathrm{com}M \in V$ donc $M \in G$.
c)

$$\det M = ((a+c)^2 - (b+d)^2)((a-c)^2 + (b-d)^2)$$

donc

$$\det M = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)^2 - (b+d)^2 = \pm 1 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = \pm 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système à coefficients entiers donne à l'ordre près :
$a, b, c, d = \pm 1, 0, 0, 0$.
Posons J la matrice obtenue pour $a = c = d = 0$ et $b = 1$. On vérifie $J^4 = I_4$.
L'application $\varphi : U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to G$ définie par $\varphi(\varepsilon, n) = \varepsilon J^n$ est bien définie, c'est un morphisme de groupe, injectif et surjectif. Ainsi G est isomorphe à $U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou plus élégamment à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 86 : [énoncé]
Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \det A + v \det B = 1$. $U = u^t(\mathrm{com}A)$ et $V = v^t(\mathrm{com}B)$ conviennent alors.

Exercice 87 : [énoncé]
Notons que pour $n = 1$: la relation $\det(A+X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X.
On suppose dans la suite $n \geqslant 2$.
Pour $X = A$, la relation $\det(A+X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2\det A$ et donc $\det A = 0$.
La matrice A n'est donc par inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A+X) \neq 0$.
On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

Exercice 88 : [énoncé]
La matrice H est équivalente à la matrice J_1 dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1,1)$. Notons $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$H = QJ_1P$$

et introduisons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ déterminée par

$$A = QBP$$

La relation

$$\det(A+H)\det(A-H) \leqslant \det A^2$$

équivaut alors à la relation

$$\det(B+J_1)\det(B-J_1) \leqslant \det B^2$$

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de B et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\det(B + J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 + E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B - J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 - E_1, C_2, \dots, C_n)$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B+J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B + J_1)\det(B - J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)^2 \leqslant \det B^2$$

Exercice 89 : [énoncé]
L'application $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_j), \dots, x_n)$$

est une forme n-linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda.\det_{\mathcal{B}}$.
On a $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \lambda$ et par suite

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, f(e_j), \dots, e_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = \mathrm{tr} f$$

avec $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

Exercice 90 : [énoncé]
En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice $A + xJ$ apparaît comme le déterminant d'une matrice où figure des x seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que $\det(A + xJ)$ est une fonction affine de la variable x.
De plus

$$\det(A - xJ) = \det(-{}^tA - xJ) = (-1)^{2n} \det({}^tA + xJ)$$

et puisque la matrice J est symétrique

$$\det(A - xJ) = \det({}^tA + x{}^tJ) = \det(A + xJ)$$

La fonction affine $x \mapsto \det(A - xJ)$ est donc une fonction paire et par conséquent c'est une fonction constante. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det(A + 0.J) = \det A$$

Exercice 91 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vérifiée pour $n \geqslant 1$.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés énoncées. En développant le déterminant de A selon la première ligne, on obtient

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1,j} \Delta_{1,j}$$

avec $\Delta_{1,j}$ mineur d'indice $(1, j)$ de la matrice A.
Puisque la matrice définissant le mineur $\Delta_{1,j}$ est à coefficients positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne est inférieure à 1, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et affirmer $|\Delta_{1,j}| \leqslant 1$.
On en déduit

$$|\det A| \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j} \leqslant 1$$

Récurrence établie.

Exercice 92 : [énoncé]
Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Le déterminant de A ainsi que celui de son inverse sont des entiers. Puisque

$$\det A \times \det A^{-1} = 1$$

on en déduit $\det A = \pm 1$. Inversement, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est de déterminant ± 1 alors son inverse, qui s'exprime à l'aide de la comatrice de A, est à coefficients entiers. Ainsi les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices à coefficients entiers de déterminant ± 1.
Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée par les entiers $a_1, \dots, a_n$. En développant le calcul de $\det A$ selon la première ligne de la matrice, on obtient une relation de la forme

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 1$$

avec les u_k égaux, au signe près, à des mineurs de la matrice A. Ces u_k sont donc des entiers et la relation qui précède assure que les entiers $a_1, \dots, a_n$ sont premiers dans leur ensemble.
Pour établir la réciproque, raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 2$ pour établir qu'il existe une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1, dont la première ligne est $a_1, \dots, a_n$ premiers dans leur ensemble.

Pour $n=2$. Soient a,b deux entiers premiers entre eux. Par l'égalité de Bézout, on peut écrire

$$au+bv=1 \text{ avec } u,v\in\mathbb{Z}$$

Considérons alors la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ -v & u\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

Celle-ci étant de déterminant 1, elle appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 2$.
Soient $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}$ des entiers premiers dans leur ensemble. Posons

$$d=\mathrm{pgcd}(a_1,\dots,a_n)$$

Les entiers d et a_{n+1} étant premiers entre eux, il existe $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que

$$du+a_{n+1}v=1$$

De plus, on peut écrire

$$a_1=da_1',\dots,a_n=da_n'$$

avec $a_1',\dots,a_n'$ premiers dans leur ensemble.
Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a_1' & a_2' & \cdots & a_n'\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

de déterminant 1.
Considérons alors la matrice

$$\begin{pmatrix} da_1' & da_2' & \cdots & da_n' & a_{n+1}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} & 0\\ -va_1' & -va_2' & \cdots & -va_n' & u\end{pmatrix}$$

Celle-ci est à coefficients entiers et en développant son déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient 1.
Récurrence établie.

Exercice 93 : [énoncé]
a) Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A et supposons

$$\lambda_1C_1+\dots+\lambda_nC_n=0$$

Si $m=\max(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|)\neq 0$ alors, puisque pour tout $1\leqslant i\leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^n\lambda_ja_{i,j}=0$$

on obtient

$$|\lambda_i|\leqslant\frac{\sum_{j\neq i}|\lambda_j|\,|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}\leqslant m\frac{\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}<m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de m.
Par suite, la famille $(C_1,\dots,C_n)$ est libre et donc A inversible.
b) Considérons l'application $f:x\in\mathbb{R}\mapsto\det(A+xI_n)$.
La fonction f est clairement polynomiale de monôme dominant x^n, elle est donc continue et de limite $+\infty$ quand $x\to+\infty$.
De plus, le résultat précédent s'applique à la matrice $A+xI_n$ pour tout $x\geqslant 0$ et donc $f(x)\neq 0$ sur $[0,+\infty[$.
Par continuité, la fonction f ne peut prendre de valeurs $\leqslant 0$ et donc

$$\forall x\geqslant 0, f(x)>0$$

En particulier $\det A=f(0)>0$.

Exercice 94 : [énoncé]
En retirant la première colonne aux autres, on obtient un déterminant où ne figurent des x que sur la première colonne. En développant selon cette première colonne, on obtient une expression affine de la variable x.

$$\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix}=\alpha x+\beta$$

Il reste à déterminer les réels α,β exprimant cette fonction affine.
D'une part

$$\beta=\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix}_{x=0}=\begin{vmatrix} a_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & a_n\end{vmatrix}=a_1\dots a_n$$

et d'autre part

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} a_1+x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x \end{vmatrix}'_{x=0}$$

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus lorsqu'on ne dérive qu'une colonne

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_1 & 1 & (0) \\ & \vdots & \\ (0) & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

où la colonne formée de 1 est à la position j. Chaque déterminant se calcule en développant selon la ligne ne contenant que le coefficient 1 et l'on obtient

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j} a_i$$

Exercice 95 : [énoncé]
On réalise les opérations élémentaires $C_n \leftarrow C_n - x_1C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - x_1C_1$:

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

On développe selon la première ligne et on factorise par ligne :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$$

On réitère

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\prod_{j=3}^{n}(x_j-x_2)\dots\prod_{j=n}^{n}(x_j-x_{n-1})V_1(x_n)$$

avec $V_1(x_n)=1$.
Ainsi

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

Exercice 96 : [énoncé]
Considérons le polynôme

$$P(X) = (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

avec $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_{n-1} = -(a_1+\dots+a_n)$.
En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2}\alpha_kC_{k+1}$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$a_i^n + \sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k a_i^k = P(a_i) - \alpha_{n-1}a_i^{n-1} = -\alpha_{n-1}a_i^{n-1} \text{ car } P(a_i)=0$$

Ainsi

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = -\alpha_{n-1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_n = \sum_{i=1}^{n}a_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

Exercice 97 : [énoncé]
Considérons le polynôme

$$P(X) = (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

avec $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1,\dots,a_n$.
En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=0}^{k-1}\alpha_jC_{j+1} + \sum_{j=n}^{n-1}\alpha_jC_j$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$P(a_i) - \alpha_k a_i^k = -\alpha_k a_i^k \text{ car } P(a_i)=0$$

Ainsi

$$D_k = (-1)^{n+1-k}\sigma_{n-k}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^k \end{vmatrix}$$

En permutant de façon circulaire les $n-k$ dernières colonnes, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$$

Exercice 98 : [énoncé]
En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
Pour $k \in \{1,\dots,n\}$,

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{k+1}\prod_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)V_{n-1}(\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_k,\dots,\lambda_n) = (-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

où $V_n(a_1,\dots,a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1,\dots,a_n)$.
Le polynôme Δ coïncide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, ils sont donc égaux.

Exercice 99 : [énoncé]

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Via $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1-b_n)\dots(b_{n-1}-b_n)}{(a_1+b_n)\dots(a_n+b_n)}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

Via $L_1 \leftarrow L_1 - L_n, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1-b_n)\dots(b_{n-1}-b_n)(a_1-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n)}{(a_1+b_n)\dots(a_n+b_n)(a_n+b_1)\dots(a_n+b_{n-1})}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Par conséquent

$$D_n = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$$

Puisque

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = 1!2!\dots(n-1)!$$

et

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \frac{(n+1)!}{1!}\frac{(n+2)!}{2!}\dots\frac{(2n)!}{n!}$$

on obtient dans le cas particulier

$$D_n = \frac{(1!2!\dots(n-1)!)^3 n!}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n)!}$$

Exercice 100 : [énoncé]
On a $H^{-1} = \frac{1}{\det H}{}^t\mathrm{com}H$ avec $\mathrm{com}H = (H_{i,j})$.
Par opérations élémentaires,

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$$

En simplifiant les facteurs communs, on obtient

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = \frac{(-1)^{k+\ell}(n+k-1)!(n+\ell-1)!}{(k+\ell-1)(k-1)!^2(\ell-1)!^2(n-k)!(n-\ell)!}$$

puis

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = (-1)^{k+\ell}(k+\ell-1)\binom{n+k-1}{k+\ell-1}\binom{n+\ell-1}{k+\ell-1}\binom{k+\ell-2}{k-1} \in \mathbb{Z}$$

Exercice 101 : [énoncé]
a) Par l'absurde, supposons que P_n possède une racine multiple z. Celle-ci vérifie

$$P_n(z) = P_n'(z) = 0$$

On en tire

$$z^n - z + 1 = 0 (1) \text{ et } nz^{n-1} = 1 \ (2)$$

(1) et (2) donnent

$$(n-1)z = n \ (3)$$

(2) impose $|z| \leqslant 1$ alors que (3) impose $|z| > 1$. C'est absurde.
b) Posons $\chi(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice étudiée. On vérifie

$$\chi(z_i) = \begin{vmatrix} 1+z_1-z_i & & 1 & & (1) \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \\ (1) & & 1 & & 1+z_n-z_i \end{vmatrix}$$

En retranchant la i-ème colonne à toutes les autres et en développant par rapport à la $i$ème ligne, on obtient

$$\chi(z_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (z_j - z_i) = (-1)^{n-1} P'(z_i)$$

Cependant les polynômes χ et P' ne sont pas de même degré... En revanche, les polynômes χ et $(-1)^n(P - P')$ ont même degré n, même coefficient dominant $(-1)^n$ et prennent les mêmes valeurs en les n points distincts $z_1, \dots, z_n$. On en déduit qu'ils sont égaux. En particulier le déterminant cherché est

$$\chi(0) = (-1)^n \left(P(0) - P'(0)\right) = 2(-1)^n$$

Exercice 102 : [énoncé]
On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a+\lambda_1 \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \lambda_1 E_1 + aC$$

avec E_1 colonne élémentaire et C colonne constituée de 1.
On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$\det H = \det\left(\lambda_1 E_1 + aC, \dots, \lambda_n E_n + aC\right)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne C apparaît deux fois. On obtient

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda_1 E_1, \dots, aC, \dots, \lambda_n E_n)$$

et donc

$$\det H = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + a \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k\right]$$

Exercice 103 : [énoncé]
Notons D_n le déterminant recherché.
On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1 E_1 + b_1 C$$

avec E_1 colonne élémentaire et C colonne constituée de 1.
On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$D_n = \det\left(a_1 E_1 + b_1 C, \dots, a_n E_n + b_n C\right)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne C apparaît deux fois. On obtient

$$D_n = \det(a_1 E_1 + \dots + a_n E_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(a_1 E_1, \dots, b_i C, \dots, a_n E_n)$$

et donc

$$D_n(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)=\prod_{i=1}^n a_i+\sum_{i=1}^n\left[b_i\prod_{k=1,k\neq i}^n a_k\right]$$

Exercice 104 : [énoncé]
a) $\cos(0.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 0.
$\cos(1.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 1.
Par récurrence double, on montre que $\cos(jx_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré j en exploitant la relation :

$$\cos\left((j+1)x_i\right)+\cos\left((j-1)x_i\right)=2\cos(x_i)\cos(jx_i)$$

On peut aussi par récurrence affirmer que le coefficient dominant de $\cos(jx_i)$ est 2^{j-1} pour $j\geqslant 1$.
On peut même être plus précis et affirmer que $\cos\left((j-1)x_i\right)$ est une expression polynomiale de degré $j-1$ en $\cos(x_i)$.
d) $\det M_n$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus $n-1$.
Puisque $\cos(x_2),\dots,\cos(x_n)$ sont $n-1$ racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M_n=\lambda(x_2,\dots,x_n)\prod_{j=2}^n(\cos x_j-\cos x_1)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2,\dots,x_n)$ est polynomiale en $\cos(x_2)$ de degré au plus $n-2$ (car il y a déjà le facteur $\cos(x_2)-\cos(x_1)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3),\dots,\cos(x_n)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2,\dots,x_n)=\mu(x_3,\dots,x_n)\prod_{j=3}^n(\cos x_j-\cos x_2)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M_n=\alpha_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\cos x_j-\cos x_i)=\alpha_nP$$

Il reste à déterminer la valeur de $\alpha_n\dots$
Un calcul immédiat donne $\alpha_2=1$.
En développant selon la dernière ligne

$$\det M_n=\cos((n-1)x_n)\det M_{n-1}+\cdots$$

où les points de suspensions contiennent une expression polynomiale en $\cos(x_n)$ de degré $<n-1$.
En identifiant les coefficients dominant des expressions polynomiale en $\cos(x_n)$ dans cette égalité, on obtient

$$\alpha_n=2^{n-2}\alpha_{n-1}$$

Cette relation permet de conclure

$$\alpha_n=2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

Exercice 105 : [énoncé]
En sommant toutes les colonnes sur la première

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & n & n-1 & \dots & 2\\ 1 & 1 & \ddots & & 3\\ \vdots & 2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n\\ 1 & n-1 & \dots & 2 & 1\end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin)

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & n & n-1 & \dots & 2\\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1\\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n\end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}a & & (b)\\ & \ddots & \\ (b) & & a\end{vmatrix}_{[n-1]}$$

avec $a=1-n$ et $b=1$. La poursuite du calcul donne alors

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}n^{n-2}$$

d'où la formule proposée.

Exercice 106 : [énoncé]
a) Il y autant de facteurs que de paires $\{i,j\}$ i.e.

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) & \cos(3x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) & \cos(3x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) & \cos(3x_3) \\ 1 & \cos x_4 & \cos(2x_4) & \cos(3x_4) \end{pmatrix}$$

c) La propriété est immédiate pour $j = 1$ ou $j = 2$.
Pour $j = 3$, $\cos(2x_i) = 2\cos^2 x_i - 1$.
Pour $j = 4$, $\cos(3x_i) = 4\cos^3 x_i - 3\cos x_i$.
d) $\det M$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus 3.
Puisque $\cos(x_2), \cos(x_3), \cos(x_4)$ sont 3 racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M = \lambda(x_2, x_3, x_4) \prod_{j=2}^{4} (\cos x_1 - \cos x_j)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2, x_3, x_4)$ est polynomiale $\cos(x_2)$ de degré au plus 2 (car il y a déjà le facteur $\cos(x_1) - \cos(x_2)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3), \cos(x_4)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = \mu(x_3, x_4) \prod_{j=3}^{4} (\cos x_2 - \cos x_j)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M = \alpha \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (\cos x_i - \cos x_j) = \alpha P_4$$

Il reste à déterminer la valeur de α...
Une démarche analogue à la précédente aurait donnée

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) \end{vmatrix} = \beta P_3$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 \\ 1 & \cos x_2 \end{vmatrix} = \gamma P_2 \text{ avec } \gamma = -1$$

En développant $\det M$ selon la dernière ligne et en considérant le coefficient dominant de $\det M$ vu comme polynôme en $\cos(x_3)$ on obtient

$$4\beta P_3 = (-1)^3 \alpha P_3$$

et de façon analogue on a aussi

$$2\gamma P_2 = (-1)^2 \beta P_2$$

On en déduit

$$\alpha = 8$$

Puisque $\operatorname{Card}\mathfrak{S}_4 = 24$, $\det M$ peut se voir comme la somme de 24 termes qui sont tous inférieurs à 1 en valeur absolue. On en déduit

$$|\det M| \leqslant 24$$

Certains des termes (par exemple $1 \times \cos(x_1) \times \cos(2x_2) \times \cos(3x_3)$) étant strictement inférieurs à 1 en valeur absolue, on a aussi

$$|\det M| < 24$$

Exercice 107 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2ar + a^2 = 0$ de racines double a.
On a alors $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$ donnent

$$D_n = (n+1)a^n$$

Exercice 108 : [énoncé]
Par développement d'un déterminant tridiagonal,

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (a+b)r + ab = 0$ de racines a et b.

Si $a \neq b$ alors on peut écrire $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ et compte tenu des valeurs initiales, on obtient

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Si $a = b$ alors on peut écrire $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ et on parvient cette fois-ci à

$$D_n = (n+1)a^n$$

Exercice 109 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (a+b)r + ab = 0$ de racines distinctes a et b.
On a $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. $D_0 = 1$ et $D_1 = a + b$ donnent

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Exercice 110 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = (1 + x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (1 + x^2)r - x^2 = 0$ de racines 1 et x^2.
Si $x^2 \neq 1$ alors $D_n = \lambda + \mu x^{2n}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$D_0 = 1$ et $D_1 = 1 + x^2$ donnent

$$D_n = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

Si $x^2 = 1$ alors $D_n = \lambda n + \mu$.
$D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n + 1$$

Exercice 111 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$ de racines $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
Si $\theta \neq 0 \quad [\pi]$ alors $D_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2\cos\theta$ donnent

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta = 2\cos\theta \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1/\tan\theta \end{cases}$$

Ainsi

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Si $\theta = 0 \quad [2\pi]$ alors $D_n = \lambda n + \mu$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n + 1$$

Si $\theta = \pi \quad [2\pi]$ alors $D_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = (-1)^n(n+1)$$

Exercice 112 : [énoncé]
En développant selon la première colonne, puis la première ligne et en recommençant : $D_n = (-n) \times 1 \times (2 - n) \times 3$ etc...
Si n est pair le développement s'arrête sur le calcul de

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si n est impair le développement s'arrête par l'étape

$$\begin{vmatrix} 0 & n-2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3(n-2) \begin{vmatrix} 0 & n \\ 1 & n \end{vmatrix} = 3n(n-2)$$

En écrivant $n = 2p + 1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{p+1}(1 \times 3 \times \cdots \times 2p+1)^2$$

Exercice 113 : [énoncé]
On a
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$
et en passant au déterminant, on obtient
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det D = \det(AD-BC)\det D$$
On peut alors conclure sachant $\det D \neq 0$.

Exercice 114 : [énoncé]
On a
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$
et en passant au déterminant, on obtient
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A-BD^{-1}C)\det D = \det(AD-BD^{-1}CD)$$

Exercice 115 : [énoncé]
Supposons pour commencer la matrice A inversible.
Par opérations par blocs :
$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D-BA^{-1}C \end{pmatrix}$$
On en déduit
$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(D-BA^{-1}C)\det A = \det(DA-BA^{-1}CA)$$
Or les matrices A et C commutent donc A^{-1} et C commutent aussi et
$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(DA-BC)$$
Supposons A non inversible.
Pour p assez grand, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec C donc
$$\det\begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$
En passant à la limite quand $p \to +\infty$, la continuité du déterminant donne
$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA-BC)$$

Exercice 116 : [énoncé]
a) En multipliant les n dernières lignes par i et les n dernières colonnes aussi :
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n\det\begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -A \end{pmatrix}$$
puis par opérations sur les lignes
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n\det\begin{pmatrix} A & iB \\ A-iB & -A+iB \end{pmatrix}$$
et par opérations sur les colonnes
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n\det\begin{pmatrix} A+iB & iB \\ 0 & -A+iB \end{pmatrix}$$
On en déduit
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n\det(A+iB)\det(-A+iB)$$
et enfin
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$$
Les matrices A et B étant réelles, cette écriture est de la forme $z\bar{z} = |z|^2 \geqslant 0$.
b) $\det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A^2+B^2)$ car A et B commutent donc $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.
d) Si A est inversible, on remarque
$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix}$$
donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B+D) = \det(AD-CB)$ car A et C commutent.
On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :
Les applications $A \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD-CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec C. Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec C : si A commute avec C alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A + \lambda I_n$ est inversible et commute avec C). Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

Exercice 117 : [énoncé]
a) Par opération sur les colonnes puis sur les lignes

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$$

b) De façon analogue

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{vmatrix} = |A+iB|^2 \geqslant 0$$

Exercice 118 : [énoncé]
a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} = L_{2n} + L_n$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B+I_n & I_n+B \end{vmatrix}$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n+B \end{vmatrix} = \det(I_n - B)\det(I_n+B)$$

Ainsi A est inversible si, et seulement si, $I_n - B$ et $I_n + B$ le sont (i.e. $1, -1 \notin \mathrm{Sp}B$).
On aurait aussi pu étudier le noyau de A.
b) On peut présumer que l'inverse de A est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M+BN & N+BM \\ BM+N & BN+M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M+BN = I_n \\ BM+N = O_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \left(I_n - B^2\right)^{-1} \\ N = -B\left(I_n - B^2\right)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n - B^2)^{-1} & -B(I_n-B^2)^{-1} \\ -B(I_n-B^2)^{-1} & (I_n-B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

On aurait pu aussi inverser l'équation $AX = Y$

Exercice 119 : [énoncé]
On introduit

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA' & O_{p,n-p} \\ {}^tB' & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & B \\ C^tA' + D^tB' & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^t(\mathrm{com}M) = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & A^tC' + B^tD' \\ C^tA' + D^tB' & C^tC' + D^tD' \end{pmatrix} = (\det M)^n I_p$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} \det(M)I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on obtient

$$\det M \times \det {}^tA' = \det(M)^p \det D$$

puis facilement la relation proposée sachant $\det M \neq 0$.

Exercice 120 : [énoncé]
a) Cas D inversible
Sachant $C^tD = D^tC$, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tD & O_n \\ -{}^tC & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tD - B^tC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant on obtient la relation

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\overset{t}{\det} D = \det\left(A^tD - B^tC\right)\det D$$

puis la relation voulue sachant $\det D = \det^t D \neq 0$
b) Cas D non inversible
Posons $r = \mathrm{rg}C$. On peut écrire $C = PJ_rQ$ avec P, Q inversibles et J_r la matrice (symétrique) dont tous les coefficients sont nuls sauf les r premiers de la diagonale qui sont égaux à 1. Considérons alors $D' = D + \lambda P^tQ^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
On peut écrire

$$D' = P\left(P^{-1}D^tQ + \lambda I_n\right)^t Q^{-1}$$

Si $-\lambda$ n'est pas valeur propre de $P^{-1}D^tQ$, la matrice D' est inversible.
Puisqu'une matrice n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, la matrice D' est assurément inversible quand $\lambda \to 0^+$ avec λ assez petit.

De plus, C^tD' est symétrique car

$$C^tD' - D'^tC = C^tD + \lambda PJ_rQQ^{-1t}P - D^tC - \lambda P^tQ^{-1t}Q^tJ_r^tP = 0$$

Par l'étude qui précède, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D' \end{pmatrix} = \det\left(A^tD' - B^tC\right)$$

et en passant à la limite quand $\lambda \to 0^+$, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(A^tD - B^tC\right)$$

Exercice 121 : [énoncé]
Cas où la matrice A inversible :
Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D)$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice C commute avec les matrices A et B.
On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Cas général :
Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ assez grand, la matrice $A_p = A + 1/pI_n$ est inversible et les matrices A_p, B, C, D commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_pD - BC)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de M équivaut à celle de $AD - BC$.