Nombres réels et complexes

Rationnels et irrationnels

Exercice 1 [02092] [correction]
Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 2 [02093] [correction]
Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Exercice 3 [02094] [correction]
Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire l'existence d'irrationnels $a, b > 0$ tels que a^b soit rationnel.

Exercice 4 [02095] [correction]
Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.
b) Calculer $f(0)$.
c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$.
d) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
e) On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

Exercice 5 [02472] [correction]
Montrer que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 6 [02475] [correction]
Si n est un entier $\geqslant 2$, le rationnel $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ peut-il être entier ?

Exercice 7 [02647] [correction]
a) Montrer l'existence et l'unicité des suites d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

b) Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Exercice 8 [01975] [correction]
[Irrationalité de π]
a) Pour $a, b \in \mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.
b) Etablir la même propriété en $x = a/b$
c) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n \to 0$.
d) En supposant $\pi = a/b$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 9 [03668] [correction]
[Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^\star$]
a) Pour $a, b \in \mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.
b) Etablir la même propriété en $x = a/b$
c) On pose $r = a/b$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$I_n = \int_0^r P_n(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n \to 0$.
d) En supposant $\mathrm{e}^r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $qI_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Les nombres réels

Exercice 10 [02098] [correction]
Soit $a \in [1, +\infty[$. Simplifier

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$

Exercice 11 [02099] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\begin{cases} 1) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y) \\ 2) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y) \\ 3) & \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \end{cases}$$

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
c) Démontrer que $\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant 0$. En déduire que f est croissante.
d) Conclure que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 [03404] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = 1$.

Inégalités

Exercice 13 [03983] [correction]
Vérifier

$$\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x) \leqslant 1/4$$

Exercice 14 [02096] [correction]
Montrer

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$$

Exercice 15 [03643] [correction]
Soient $x, y \in [0,1]$. Montrer

$$x^2 + y^2 - xy \leqslant 1$$

Exercice 16 [02097] [correction]
Montrer

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice 17 [03224] [correction]
Montrer

$$\forall u, v \geqslant 0, 1 + \sqrt{uv} \leqslant \sqrt{1+u}\sqrt{1+v}$$

Exercice 18 [03405] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ des réels.
Etablir

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Exercice 19 [01733] [correction]
Déterminer tous les couples $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$ pour lesquels il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y > 0, x^\alpha y^\beta \leqslant M(x+y)$$

Exercice 20 [03640] [correction]
Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux suites réelles monotones. Comparer

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Exercice 21 [04017] [correction]
Montrer que

$$\forall x, y \in [0,1], \min\{xy, (1-x)(1-y)\} \leqslant \frac{1}{4}$$

Partie entière

Exercice 22 [02100] [correction]
Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 23 [02101] [correction]
Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 24 [02102] [correction]
Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 25 [02103] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 26 [02104] [correction]
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 27 [02105] [correction]
Soit $a \leqslant b \in \mathbb{R}$. Etablir

$$\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1-a \rfloor$$

Exercice 28 [02106] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$ tel que

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ et } 3b_n^2 = a_n^2 - 1$$

b) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 29 [03416] [correction]
Démontrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$$

en notant $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Les nombres complexes

Exercice 30 [02025] [correction]
Soit $z \in U \backslash \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 31 [02026] [correction]
Soient $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $f : \mathbb{C} \backslash \{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

a) Montrer que tout élément de P à son image par f dans D.
b) Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.

Exercice 32 [02028] [correction]
Calculer pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 33 [02029] [correction]
Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 34 [03107] [correction]
Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
On suppose que si $z \in B$ alors $1 - z + z^2 \in B$ et $1 + z + z^2 \in B$.
Déterminer B.

Exercice 35 [03651] [correction]
Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}^{+\star}$$

Le plan complexe

Exercice 36 [03458] [correction]
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $|z_0| \neq r$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r.
a) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

b) En déduire que l'image de $\mathcal{C}$ par l'application $f : z \mapsto 1/z$ est un cercle dont on précisera centre et rayon en fonction de z_0 et r.

Exercice 37 [02027] [correction]
a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz.
b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Exercice 38 [03040] [correction]
Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 39 [02050] [correction]
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|$$

Exercice 40 [03880] [correction]
Soient a, b, c des réels strictement positifs.
A quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2$$

Module et argument

Exercice 41 [02030] [correction]
Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 42 [02031] [correction]
Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z' = \lambda.z$$

Exercice 43 [02032] [correction]
Etablir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| \leqslant |z + z'| + |z - z'|$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité ?

Exercice 44 [02356] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 45 [00055] [correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1$$

Exercice 46 [03642] [correction]
a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

b) On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon = 1$ ou -1 tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \leqslant \sqrt{2}$$

Exercice 47 [03249] [correction]
Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par
$$f(z)=\frac{z+|z|}{2}$$
Déterminer les valeurs prises par f.

Exercice 48 [02052] [correction]
Résoudre l'équation $|z+1|=|z|+1$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Racines de l'unité

Exercice 49 [02036] [correction]
Calculer le produit des racines de l'unité

Exercice 50 [02037] [correction]
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On note U_n l'ensemble des racines n ème de l'unité.
Calculer
$$\sum_{z\in U_n}|z-1|$$

Exercice 51 [03353] [correction]
Soient $n\geqslant 3$, $\omega_1,\dots,\omega_n$ les racines n-ième de l'unité avec $\omega_n=1$.
a) Calculer pour $p\in\mathbb{Z}$,
$$S_p=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^p$$
b) Calculer
$$T=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_i}$$

Exercice 52 [02038] [correction]
Soit ω une racine $n$ème de l'unité différente de 1. On pose
$$S=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^k$$
En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 53 [02039] [correction]
Simplifier :
$$\text{a) } j(j+1)\quad \text{b) } \frac{j}{j^2+1}\quad \text{c) } \frac{j+1}{j-1}$$

Exercice 54 [02040] [correction]
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Résoudre l'équation
$$(z+1)^n=(z-1)^n$$
Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 55 [02041] [correction]
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^n+1=0$$

Exercice 56 [02042] [correction]
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z+i)^n=(z-i)^n$$
Observer que celle-ci admet exactement $n-1$ solutions, chacune réelle.

Exercice 57 [02043] [correction]
Soit $\omega=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :
$$A=\omega+\omega^2+\omega^4 \text{ et } B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$$

Exercice 58 [02044] [correction]
Soient $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ et $\omega=\exp(2i\pi/n)$.
a) Etablir que pour tout $z\in\mathbb{C}, z\neq 1$,
$$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k)=\sum_{\ell=0}^{n-1}z^\ell$$
b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z=1$.
c) En déduire l'égalité
$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 59 [02531] [correction]
Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Equations algébriques

Exercice 60 [02045] [correction]
Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ? Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice 61 [02046] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :
a) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ b) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$.

Exercice 62 [02047] [correction]
a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12i$.
b) Résoudre l'équation $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.
c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 63 [02049] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$$

Exercice 64 [02048] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$$

Exponentielle complexe

Exercice 65 [02051] [correction]
Soit $Z \in \mathbb{C}^\star$. Résoudre l'équation $e^z = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 66 [03457] [correction]
En étudiant module et argument, établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(z)$$

Exponentielles imaginaires

Exercice 67 [02033] [correction]
Déterminer module et argument de $e^{i\theta} + 1$ et de $e^{i\theta} - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 68 [02034] [correction]
Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

Exercice 69 [02035] [correction]
Déterminer module et argument de $e^{i.\theta} + e^{i.\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Exercice 70 [02646] [correction]
Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$$

montrer

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soit x un rationnel et y un irrationnel.
Par l'absurde : Si $z = x + y$ est rationnel alors $y = z - x$ est rationnel par différence de deux nombres rationnels. Or y est irrationnel. Absurde.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
On peut alors écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$ et, quitte à simplifier, p et q non tous les deux pairs.
On a alors $2q^2 = p^2$.
p est alors nécessairement pair car p^2 est pair. Cela permet d'écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ puis $q^2 = 2k^2$.
Mais alors q est pair. Par suite p et q sont tous les deux pairs.
Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, c'est gagné avec $a = b = \sqrt{2}$. Sinon, on prend $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) La relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ avec f constante égale à C donne $C = C + C$ d'où $C = 0$.
b) Pour $x = y = 0$, la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ implique $f(0) = 0$.
c) Pour $y = -x$, la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ donne $0 = f(-x) + f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.
d) Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^-, n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$$

e) On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$.

$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q})$$

or

$$a = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$$

donc

$$f(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$$

puis

$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax$$

Exercice 5 : [énoncé]
On définit le nombre x étudié
```
x:=(2/3+41/81*sqrt(5/3))^(1/3)+(2/3-41/81*sqrt(5/3))^(1/3);
```
Attention à définir les racines cubiques par des exposants 1/3 avec parenthèses.
On peut commencer par estimer la valeur cherchée
```
evalf(x);
```
Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3
```
expand(x^3);
```
Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Simplifions ce terme
```
simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*
(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);
```
On obtient

$$\frac{1}{81}\left(486 + 123\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(486 - 123\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Développons selon $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
```
(486^2-123^2*15)^(1/3);
```
donne 9261. Enfin
```
ifactor(9261);
```
permet de conclure que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}$$

Ainsi x est solution de l'équation

$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x$$

En factorisant le polynôme sous-jacent

```
factor(x^3-7/9*x-4/3);
```

on obtient

$$(3x-4)(3x^2+4x+3) = 0$$

Puisque $3x^2+4x+3 > 0$, on peut conclure

$$x = 4/3$$

Exercice 6 : [énoncé]

Le calcul des premiers termes de la suite $(H_n)_{n\geqslant 2}$ permet de conjecturer que H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair. Ceci assurera $H_n \notin \mathbb{Z}$.
Démontrons la propriété conjecturée par récurrence forte.
Pour $n=2$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n-1 \geqslant 2$.
Cas n impair.
On peut écrire $n = 2k+1$ et puisque par hypothèse de récurrence H_{n-1} s'écrit $(2p+1)/2q$, on obtient $H_n = H_{n-1} + 1/n$ égale au rapport d'un entier impair par un entier pair.
Cas n est pair.
On peut écrire $n = 2k$ avec $k \geqslant 2$ puis

$$H_n = \frac{1}{2}H_k + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}$$

Par hypothèse de récurrence, H_k est le rapport d'un entier impair par un entier pair, donc $\frac{1}{2}H_k$ aussi.
De plus, comme entrevu dans l'étude du cas précédent, l'ajout de l'inverse d'un entier impair conserve la propriété.
Ainsi H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair.
Récurrence établie.

Exercice 7 : [énoncé]

a) Par la formule du binôme de Newton

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k$$

En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impaires

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

avec les entiers

$$a_n = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} 2^p \text{ et } b_n = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} 2^p$$

On peut aussi raisonner par récurrence en mettant à jour une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

L'unicité provient de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. En effet si

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$$

avec a, b, a', b' entiers, on obtient

$$(b'-b)\sqrt{2} = a - a'$$

Si $b \neq b'$ alors on peut exprimer $\sqrt{2}$ comme égal à un nombre rationnel. C'est absurde et il reste $b = b'$ et donc $a = a'$.
b) Par la formule du binôme de Newton, on obtient de même

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - \sqrt{2}b_n$$

et alors

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (-1)^n$$

On peut aussi raisonner par récurrence en exploitant l'expression de (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n).
c) L'unicité est évidente compte tenu de la stricte croissance de la fonction $p \mapsto \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$.
Si n est pair alors $a_n^2 = 1 + 2b_n^2$. Pour $p = a_n^2$,

$$(\sqrt{2}+1)^n = a_n + \sqrt{2}b_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Si n est impair alors $2b_n^2 = a_n^2 + 1$. Pour $p = 2b_n^2$,

$$(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{2}b_n + a_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Exercice 8 : [énoncé]
a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leqslant m \leqslant 2n$.
En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{m-n} (-a)^{2n-m} b^{m-n} (n+m)! \in \mathbb{Z}$$

b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^{\pi} t^n (bt - a)^n \sin t \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n!} \pi^{n+1} (|b|\,\pi + |a|)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d) Par l'absurde, supposons $\pi = a/b$.
Par intégration par parties successives

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sin(t + k\pi/2) P_n^{(k-1)}(t) \right]_0^{\pi} + (-1)^m \int_0^{\pi} \sin(t + m\pi/2) P_n^{(m)}(t) \,\mathrm{d}t$$

Donc

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} \sin(t + k\pi/2) P_n^{(k-1)}(t) \right]_0^{\pi} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \sin(k\pi/2) (P_n^{(k-1)}(\pi) + P_n^{(k-1)}(0)) \in \mathbb{Z}$$

Comme $I_n \in \mathbb{Z}$ et $I_n \to 0$, la suite (I_n) est stationnaire égale à 0.
Or sur $[0, \pi]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\sin(t)$ est continue, positive sans être nulle et $0 < \pi$ donc $I_n > 0$. Absurde.

Exercice 9 : [énoncé]
a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leqslant m \leqslant 2n$. En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{m-n} (-a)^{2n-m} b^{m-n} (n+m)! \in \mathbb{Z}$$

b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^{r} t^n (bt - a)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n!} r^{n+1} (br + a)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d) Par intégration par parties

$$I_n = \left[P_n(t)\mathrm{e}^t \right]_0^r - \int_0^r P_n'(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

et en répétant l'opération

$$I_n = \left[\sum_{m=0}^{2n} (-1)^m P_n^{(m)}(t)\mathrm{e}^t \right]_0^r$$

On en déduit

$$qI_n = \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \left(P_n^{(m)}(r)p - P_n^m(0)q \right) \in \mathbb{Z}$$

Or sur $[0, r]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\mathrm{e}^t$ est continue, positive sans être nulle et $0 < r$ donc $I_n > 0$.
Ainsi $qI_n \to 0$, $qI_n > 0$ et $qI_n \in \mathbb{Z}$: c'est absurde.
Notons qu'on en déduit immédiatement l'irrationalité de $\ln r$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+\star} \setminus \{1\}$.

Exercice 10 : [énoncé]
Posons
$$x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$
On a
$$x^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4(a-1)} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2}$$
Si $a \in [1,2]$ alors $x^2 = 2a + 2(2-a) = 4$ donc $x = 2$.
Si $a \in [2, +\infty[$ alors $x^2 = 4(a-1)$ puis $x = 2\sqrt{a-1}$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1.x) = f(1)f(x)$$
Comme f est non nulle, on a $f(1) = 1$.
$f(1) + f(-1) = f(0) = 0$ donc $f(-1) = -1$.
b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = n$. De plus
$f(-n) = f((-1)\times n) = f(-1) \times f(n) = -f(n) = -n$ donc
$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = x$$
Pour $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star$,
$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = f(p) \times f(\frac{1}{q})$$
Or $f(p) = p$ et
$$1 = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = f(q) \times f(\frac{1}{q}) = q \times f(\frac{1}{q})$$
donc $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$. Par suite $f(x) = x$.
c)
$$\forall x \geqslant 0, f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 \geqslant 0$$
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ alors
$$f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y-x) \geqslant f(x)$$
Ainsi f est croissante.
d) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{E(nx)}{n} \leqslant x < \frac{E(nx)+1}{n}$$
Comme f est croissante :
$$f(\frac{E(nx)}{n}) \leqslant f(x) < f(\frac{E(nx)+1}{n})$$
puis
$$\frac{E(nx)}{n} \leqslant f(x) < \frac{E(nx)+1}{n}$$
A la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient $x \leqslant f(x) \leqslant x$ i.e. $f(x) = x$. Finalement $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 : [énoncé]
On a
$$\sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n 1 = 0$$
et puisqu'une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité est nulle, on obtient
$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, x_k = 1$$

Exercice 13 : [énoncé]
On peut dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ et constater qu'elle possède un maximum en $x = 1/2$ de valeur $f(1/2) = 1/4$.

Exercice 14 : [énoncé]
$(a-b)^2 \geqslant 0$ donne $2ab \leqslant a^2 + b^2$

Exercice 15 : [énoncé]
Sachant $x^2 \leqslant x$ et $y^2 \leqslant y$, on a
$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leqslant x + y - xy - 1 = (x-1)(1-y) \leqslant 0$$

Exercice 16 : [énoncé]
Sachant
$$2xy \leqslant x^2 + y^2$$
on obtient
$$ab + bc + ca \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 + a^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice 17 : [énoncé]
Compte tenu de la positivité des membres, le problème revient à établir

$$\left(1+\sqrt{uv}\right)^2 \leqslant (1+u)(1+v)$$

soit encore

$$2\sqrt{uv} \leqslant u+v$$

ce qui découle de la propriété

$$\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2 \geqslant 0$$

Exercice 18 : [énoncé]
Par somme de quantités positives, on a

$$\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}(a_k-a_\ell)(b_k-b_\ell) = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}(a_kb_k-a_\ell b_k-a_kb_\ell+a_\ell b_\ell) \geqslant 0$$

En séparant la somme en quatre, on obtient

$$n\sum_{k=1}^n a_kb_k - 2\sum_{k=1}^n a_k\sum_{\ell=1}^n b_\ell + n\sum_{\ell=1}^n a_\ell b_\ell \geqslant 0$$

et on en déduit

$$n\sum_{k=1}^n a_kb_k \geqslant \sum_{k=1}^n a_k\sum_{k=1}^n b_k$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

Exercice 19 : [énoncé]
Soit (α,β) solution. Considérons

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x+y}$$

sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$.
On a

$$f(x,x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2x}$$

f bornée implique $\alpha+\beta=1$.
Inversement, supposons $\alpha+\beta=1$.
Si $y\geqslant x$ alors

$$0\leqslant f(x,y) = \frac{x^\alpha y^{1-\alpha}}{x+y} \leqslant \frac{y}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \leqslant 1$$

Si $x\geqslant y$ alors idem.

Exercice 20 : [énoncé]
Etudions la différence

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ky_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^n nx_ky_k - \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n x_ky_\ell\right)$$

ce qui donne encore

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ky_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n (x_ky_k - x_ky_\ell)$$

Or

$$\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n (x_ky_k-x_ky_\ell) = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n x_k\left(y_k-y_\ell\right) = \sum_{1\leqslant\ell<k\leqslant n} x_k\left(y_k-y_\ell\right) + \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k\left(y_k-y_\ell\right)$$

car lorsque $k=\ell$ le terme $x_k(y_k-y_\ell)$ est nul.
Par changement d'indice, on peut réécrire la dernière somme

$$\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k\left(y_k-y_\ell\right) = \sum_{1\leqslant\ell<k\leqslant n} x_\ell\left(y_\ell-y_k\right)$$

et alors

$$\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n (x_ky_k-x_ky_\ell) = \sum_{1\leqslant\ell<k\leqslant n}\left(x_k-x_\ell\right)\left(y_k-y_\ell\right)$$

Les termes sommés sont alors tous de même signe, à savoir positif si les suites $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ont même monotonie et négatifs si ces deux suites sont de monotonies contraires.
Au final, si les deux suites ont même monotonie alors

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ky_k$$

et si les deux suites sont de monotonies contraires alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ky_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]
Commençons par résoudre le min. On a

$$xy\leqslant (1-x)(1-y) \Leftrightarrow x+y\leqslant 1$$

Cas $x+y\leqslant 1$:

$$\min\{xy,(1-x)(1-y)\}=xy\leqslant x(1-x)\leqslant \frac{1}{4}$$

Cas $x+y>1$:

$$\min\{xy,(1-x)(1-y)\}=(1-x)(1-y)<(1-x)x\leqslant 1/4$$

Exercice 22 : [énoncé]
Soit $x\leqslant y\in\mathbb{R}$. $\lfloor x\rfloor\leqslant x$ donc $\lfloor x\rfloor\leqslant y$ or $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ donc $\lfloor x\rfloor\leqslant\lfloor y\rfloor$ car $\lfloor y\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à y.

Exercice 23 : [énoncé]
Puisque $\lfloor x\rfloor\leqslant x$ et $\lfloor y\rfloor\leqslant y$, on a

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant x+y$$

Par définition, $\lfloor x+y\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, on a donc déjà

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor$$

D'autre part $x<\lfloor x\rfloor+1$ et $y<\lfloor y\rfloor+1$ donc

$$x+y<\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2$$

puis

$$\lfloor x+y\rfloor<\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2$$

Puisque cette inégalité concerne des entiers, on peut transformer cette inégalité stricte en l'inégalité large suivante

$$\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

Exercice 24 : [énoncé]
Si $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1/2$ et $\lfloor y\rfloor\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1/2$ alors

$$\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor,\ \lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor\text{ et }\lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor$$

puis relation voulue.
Si $\lfloor x\rfloor+1/2\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$ et $\lfloor y\rfloor\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1/2$ alors

$$\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1,\ \lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor+1\text{ et }\lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor$$

puis la relation voulue
Si $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1/2$ et $\lfloor y\rfloor+1/2\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1$: analogue
Si $\lfloor x\rfloor+1/2\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$ et $\lfloor y\rfloor+1/2\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1$ alors

$$\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2,\ \lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor+1\text{ et }\lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor+1$$

puis la relation voulue.
Dans tous les cas la relation proposée est vérifiée.

Exercice 25 : [énoncé]
On a $\lfloor nx\rfloor\leqslant nx$ puis $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\leqslant x$, or $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ est croissante donc

$$\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor$$

$\lfloor x\rfloor\leqslant x$ donc $n\lfloor x\rfloor\leqslant nx$ puis $n\lfloor x\rfloor\leqslant\lfloor nx\rfloor$ car $n\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$.
Par suite

$$\lfloor x\rfloor\leqslant\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$$

puis

$$\lfloor x\rfloor\leqslant\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor$$

et finalement

$$\lfloor x\rfloor=\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor$$

Exercice 26 : [énoncé]
Posons $m=\lfloor nx\rfloor$ et réalisons la division euclidienne de m par n : $m=nq+r$ avec $0\leqslant r\leqslant n-1$.
On a $nq+r\leqslant nx<nq+r+1$ donc pour tout $k\in\{0,\dots,n-1\}$:

$$q+\frac{k+r}{n}\leqslant x+\frac{k}{n}<q+\frac{k+r+1}{n}$$

Si $k+r<n$ alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=q$ et si $k+r\geqslant n$ alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=q+1$.
Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\sum_{k=0}^{n-r-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor+\sum_{k=n-r}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=nq+r=m=\lfloor nx\rfloor$$

Exercice 27 : [énoncé]
Si $a \notin \mathbb{Z}$ alors $[a,b] \cap \mathbb{Z} = \{\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor a \rfloor + 2, \dots, \lfloor b \rfloor\}$ donc

$$\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$$

Or

$$\lfloor 1 - a \rfloor = 1 + \lfloor -a \rfloor = -\lfloor a \rfloor$$

car $a \notin \mathbb{Z}$ donc

$$\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $[a,b] \cap \mathbb{Z} = \{a, a+1, \dots, \lfloor b \rfloor\}$ donc

$$\mathrm{Card}([a,b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - a + 1 = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

car $1 - a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 28 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$, $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ conviennent.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ de sorte que

$$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1$$

Récurrence établie.
b) $a_n - 1 \leqslant b_n\sqrt{3} < a_n$ donc $2a_n - 1 \leqslant (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$ donc

$$\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1$$

C'est un entier impair.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit p un entier strictement supérieur à $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. On a

$$2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n} < p^2$$

donc

$$4(n^2+n) < \left(p^2 - (2n+1)\right)^2$$

Puisque les nombres comparés sont des entiers, on a aussi

$$4(n^2+n) + 1 \leqslant \left(p^2 - (2n+1)\right)^2$$

c'est-à-dire

$$(2n+1)^2 \leqslant \left(p^2 - (2n+1)\right)^2$$

et on en déduit

$$4n + 2 \leqslant p^2$$

Or le carré d'un entier ne peut qu'être congru à 0 ou 1 modulo 4. On en déduit

$$4n + 2 < p^2$$

et donc

$$\sqrt{4n+2} < p$$

Ainsi, il n'existe pas d'entiers compris entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$ donc

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$$

Exercice 30 : [énoncé]
Puisque $z \in U$, on a $\bar{z} = 1/z$ donc

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{1/z+1}{1/z-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}$$

puis

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$$

Si $y > 0$ alors $x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2$ donc $|f(z)| < 1$. Ainsi,

$$\forall z \in P, f(z) \in D$$

b) Soit $Z \in D$.

$$Z = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow z = i\frac{1+Z}{1-Z}$$

avec

$$i\frac{1+Z}{1-Z}=i\frac{1+Z-\bar{Z}-Z\bar{Z}}{|1-Z|^2}=-\frac{2\mathrm{Im}(Z)}{|1-Z|^2}+i\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2}\in P$$

Ainsi,

$$\forall Z\in D,\exists! z\in P,f(z)=Z$$

Exercice 32 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}=\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}=\mathrm{e}^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$C_n=\cos\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\text{ et }S_n=\sin\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 33 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\theta}=(1+\mathrm{e}^{i\theta})^n=2^n\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Ainsi

$$C_n=2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}\text{ et }S_n=2^n\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Exercice 34 : [énoncé]
On observe que $B=\{i,-i\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...
Posons $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ et $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définies par

$$f(z)=1-z+z^2\text{ et }g(z)=1+z+z^2$$

On remarque

$$|f(z)-i|=|z+i|\,|z-(1+i)|\,,\ |f(z)+i|=|z-i|\,|z-(1-i)|$$

$$|g(z)-i|=|z-i|\,|z+1+i|\text{ et }|g(z)+i|=|z+i|\,|z+1-i|$$

Soient $a\in B$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0=a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$z_{n+1}=\begin{cases}f(z_n) & \text{si }\mathrm{Re}(z_n)\leqslant 0\\ g(z_n) & \text{si }\mathrm{Re}(z_n)>0\end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n=\left|z_n^2+1\right|=|z_n-i|\,|z_n+i|$$

Si $\mathrm{Re}(z_n)\leqslant 0$ alors

$$u_{n+1}=|f(z_n)-i|\,|f(z_n)+i|=u_n\,|z_n-(1+i)|\,|z_n-(1-i)|$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n, l'un au moins des deux modules $|z_n-(1+i)|$ et $|z_n-(1-i)|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1. Ainsi

$$u_{n+1}\geqslant\sqrt{2}u_n$$

Si $\mathrm{Re}(z_n)>0$, on obtient le même résultat.
On en déduit que si $u_0\neq 0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0=0$ puis $a=\pm i$. Ainsi $B\subset\{i,-i\}$.
Sachant $B\neq\emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-i$ et inversement, on peut conclure

$$B=\{i,-i\}$$

Exercice 35 : [énoncé]
Rappelons que si u est un complexe de module alors $1/u=\bar{u}$.
On a alors

$$(z-a)^2=(z-a)\left(\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{\bar{a}}\right)=\frac{(z-a)(\bar{a}-\bar{z})}{\bar{a}\bar{z}}=-a\frac{|z-a|^2}{\bar{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2=\frac{|z-a|^2}{|z-b|^2}\in\mathbb{R}^{+\star}$$

Exercice 36 : [énoncé]
a) On a

$$z\in\mathcal{C}\Leftrightarrow|z-z_0|^2=r^2$$

et en développant

$$|z-z_0|^2=(z-z_0)\,\overline{(z-z_0)}=z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+z_0\bar{z}_0$$

b) Notons que $0 \notin \mathcal{C}$ puisque $|z_0| \neq r$. On peut donc considérer l'image $f(\mathcal{C})$.
Soit $Z = f(z)$ avec $z \in \mathcal{C}$. Puisque

$$|z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

on a

$$1 - \frac{z_0}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}} + \frac{|z_0|^2 - r^2}{z\bar{z}} = 0$$

donc

$$1 - z_0 Z - \bar{z}_0\bar{Z} + \left(|z_0|^2 - r^2\right)|Z|^2 = 0$$

ce qui se réécrit

$$|Z|^2 - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2}Z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}\bar{Z} = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2}$$

Posons alors

$$Z_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}$$

et l'on obtient

$$|Z|^2 - \bar{Z}_0 Z - Z_0\bar{Z} + |Z_0|^2 = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2} + \frac{|z_0|^2}{\left(|z_0|^2 - r^2\right)^2} = \frac{r^2}{\left(|z_0|^2 - r^2\right)^2}$$

Ainsi Z appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre Z_0 et de rayon $\frac{r}{\left||z_0|^2 - r^2\right|}$.
Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on obtient que tout point Z de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un certain z de $\mathcal{C}$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) $M = I$ est solution.
Pour $M \neq I$, I, M, M' sont alignés si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'} = \lambda\overrightarrow{IM}$ i.e. $\frac{iz-i}{z-i} \in \mathbb{R}$.
Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
$\mathrm{Im}\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
Finalement le lieu des points M solutions est le cercle de centre $\Omega\left|\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.
b) Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega'\left|\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$

Exercice 38 : [énoncé]
Soit z un complexe du cercle unité avec $z \neq 1$. Il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.
On a alors

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-e^{i\theta}} = e^{-i\theta/2}\frac{i}{2\sin\theta/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\mathrm{cotan}\frac{\theta}{2}$$

Quand θ parcourt $]0, 2\pi[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\mathrm{cotan}(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x = 1/2$.

Exercice 39 : [énoncé]
Soit $M(z)$ solution avec $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $2a = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $a \geqslant 0$ et $b = \pm\sqrt{3}a$.
Ainsi M se situe sur les demi-droites d'origine O dirigée par les vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix}1\\\sqrt{3}\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}1\\-\sqrt{3}\end{matrix}\right.$.
Inversement : ok.

Exercice 40 : [énoncé]
En multipliant les trois complexes t, u, v par $e^{i\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t \in \mathbb{R}^+$ auquel cas $t = a$.
En écrivant $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la condition $t + u + v = 0$ donne

$$\begin{cases} x' = -(a + x) \\ y' = -y \end{cases}$$

et les deux conditions $u\bar{u} = b^2$ et $v\bar{v} = c^2$ équivalent alors au système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x + a)^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a, 0)$ et de rayon c. Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,

$$|b - c| \leqslant a \leqslant b + c$$

On peut alors conclure que le triplet (t, u, v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a, b, c est inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 41 : [énoncé]
$|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ donc $|z| = 2$.
Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans $[0, \pi/2]$ car $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \geqslant 0$.
On a $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ donc

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

avec $2\theta \in [0, \pi]$ donc $2\theta = \pi/4$ puis $\theta = \pi/8$.

Exercice 42 : [énoncé]
($\Leftarrow$) ok
($\Rightarrow$) Si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors, en divisant par $|z|$: $|1 + x| = 1 + |x|$ avec $x = z'/z \in \mathbb{C}$.
Ecrivons $x = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|1+x|^2 = (a+1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$

et

$$(1 + |x|)^2 = (1 + \sqrt{a^2+b^2})^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}$$

$|1 + x| = 1 + |x|$ donne alors $a = \sqrt{a^2+b^2}$ d'où $b = 0$ et $a \geqslant 0$.
Par suite $x \in \mathbb{R}^+$ et on conclut.

Exercice 43 : [énoncé]
On a

$$|z| + |z'| = \frac{1}{2}\left|(z - z') + (z + z')\right| + \frac{1}{2}\left|(z' - z) + (z' + z)\right| \leqslant |z + z'| + |z - z'|$$

Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.
Il y a égalité si, et seulement si, : $z - z' = 0$ (i.e. $z = z'$) ou $\frac{z+z'}{z-z'} \in \mathbb{R}^+$ et $\frac{z+z'}{z'-z} \in \mathbb{R}^+$ ce qui se résume à $z' = -z$.

Exercice 44 : [énoncé]
Si $a = 0$, l'inégalité est vraie avec égalité si, et seulement si, $b = 0$.
Si $a \neq 0$, l'inégalité revient à

$$1 + |u| \leqslant |1 + u| + |1 - u|$$

avec $u = b/a$. En écrivant $u = x + iy$,

$$\begin{aligned}(1 + |u|)^2 &= 1 + 2\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 \\ &\leqslant 2 + 2(x^2+y^2) \\ &= |1+u|^2 + |1-u|^2 \\ &\leqslant (|1+u| + |1-u|)^2\end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 1$ et $\left|1 - u^2\right| = 0$ soit $u = \pm 1$ ce qui revient à $a = \pm b$.

Exercice 45 : [énoncé]
Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que $z \neq 1/\bar{a}$.
Si tel est le cas

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |z-a|^2 \leqslant |1-\bar{a}z|^2$$

Sachant $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{x}y) + |y|^2$, on obtient

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(|a|^2 - 1\right)\left(|z|^2 - 1\right) \geqslant 0$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

Exercice 46 : [énoncé]
a) En développant

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

et la relation écrire est alors immédiate.
b) On a

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \leqslant 4$$

donc parmi les quantités $|z_1 + z_2|$ et $|z_1 - z_2|$, l'une au moins est de carré inférieur à 2.

Exercice 47 : [énoncé]
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $f(z) = 0$.

Sinon, on peut écrire $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$ et alors

$$f(z) = r\frac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$$

Puisque $\cos(\theta/2) \geqslant 0$

$$|f(z)| = r\cos\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg f(z) = \frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z) \in \{Z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}Z > 0\}$$

Inversement, soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}Z > 0$.
On peut écrire $Z = R\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $R > 0$ et $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$. Pour

$$z = \frac{R}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{2i\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z) = \mathrm{Re}^{i\alpha} = Z$$

Finalement, les valeurs prises par f sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

Exercice 48 : [énoncé]
$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1$ et $(|z|+1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$ donc
$|z+1| = |z| + 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 49 : [énoncé]
Puisque le produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme

$$\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right) = \exp(i(n-1)\pi) = (-1)^{n-1}$$

Exercice 50 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

Alors

$$\sum_{z\in U_n}|z-1| = \sum_{k=0}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n} = 2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = 4\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\pi/n}}\right) = 2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2\cot\frac{\pi}{2n}\text{donc}$$

Exercice 51 : [énoncé]
Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$$

a) Si n ne divise par p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n}\omega^{kp} = \omega^p\frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n}\omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n}1 = n$$

b) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$\frac{1}{1-\omega_k} = -\mathrm{e}^{-ik\pi/n}\frac{1}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1}\cot\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1}-\cot\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \cdots$$

Exercice 52 : [énoncé]
On a

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n}k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - n\omega^n = -n$$

$$S = \frac{n}{\omega - 1}$$

Exercice 53 : [énoncé]
a)
$$j(j+1) = j^2 + j = -1$$
b)
$$\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1$$
c)
$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}$$

Exercice 54 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ les racines $n$ème de l'unité.
Si z est solution alors nécessairement $z \neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ donc il existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que
$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$
ce qui donne
$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1$$
Si $k = 0$ alors ce la donne $0 = 2$ donc nécessairement $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$.
Par suite
$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = -i\cot\frac{k\pi}{n}$$
Inversement, en remontant le calcul : ok
Finalement
$$\mathcal{S} = \left\{-i\cot\frac{k\pi}{n} / k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}$$
Puisque la fonction cot est injective sur $]0, \pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

Exercice 55 : [énoncé]
On a
$$z^n + 1 = 0 \Leftrightarrow z^n = \mathrm{e}^{i\pi}$$
$z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$ est solution particulière de l'équation et donc
$$\mathcal{S} = \{z_0\omega_k / k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} / k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$$

Exercice 56 : [énoncé]
$z = i$ n'est pas solution.
Pour $z \neq i$,
$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \frac{z+i}{z-i} = \omega_k$$
en notant $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$.
Pour $k = 0$, $\omega_k = 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ n'a pas de solution.
Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\omega_k \neq 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ a pour solution
$$z_k = i\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}$$
Ainsi $\mathcal{S} = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ avec
$$z_k = i\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} = \cot\frac{k\pi}{n} \in \mathbb{R}$$
deux à deux distincts car cot est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$ où évoluent les $\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice 57 : [énoncé]
On a
$$1 + A + B = 0,\ AB = 2 \text{ et } \mathrm{Im}(A) > 0$$
donc
$$A = \bar{B} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 58 : [énoncé]
a) Puisque les racines de l'équation $z^n - 1$ sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, on a
$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k)$$
Or on a aussi $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \cdots + z^{n-1})$ d'où l'égalité proposée pour $z \neq 1$.
b) Les fonctions $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1}(x - \omega^k)$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.

c) Pour $z=1$, l'égalité du a) donne $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=n$. Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,

$$1-\omega^k=-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}2i\sin\frac{k\pi}{n}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k}=i^{n-1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

puis la relation proposée.

Exercice 59 : [énoncé]
Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$$

Sachant $\cos 2a=2\cos^2 a-1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation

$$4r^2+2r-1=0$$

et donc

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Or $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ donc

$$1-2\sin^2\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

puis

$$\sin^2\frac{\pi}{5}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5)\geqslant 0$.

Exercice 60 : [énoncé]
$x=1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2-2a-3=0$ ce qui donne $a=-1$ ou $a=3$.
Lorsque $a=-1$, les solutions de l'équation sont $1,\frac{-3+\sqrt{5}}{2},-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Lorsque $a=3$, les solutions de l'équation sont $1,\frac{-3+i3\sqrt{3}}{2},-\frac{3+i3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 61 : [énoncé]
a) $\mathcal{S}=\{1,-1+2i\}$,
b) $\mathcal{S}=\{-1+i,-3+2i,1-i,3-2i\}$.

Exercice 62 : [énoncé]
a) $\pm(3-2i)$
b) $a=-2i,b=-1+3i$ et $c=2+i$
c) $|c-b|=|c-a|=\sqrt{13}$ et $|b-a|=\sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 63 : [énoncé]
On a

$$4\sqrt{2}(1+i)=8\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

donc $z_0=2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$ est solution particulière de l'équation.
L'équation $z^3=z_0^3$ équivaut alors à l'équation $(z/z_0)^3=1$ dont l'ensemble solution est

$$\mathcal{S}=\left\{z_0,z_0j,z_0j^2\right\}$$

Exercice 64 : [énoncé]
Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation

$$z^2-(1+i)z+(2-i)=0$$

On obtient l'ensemble solution

$$\mathcal{S}=\{(1+2i,-i),(-i,1+2i)\}$$

Exercice 65 : [énoncé]
Posons $\rho=|Z|$ et $\theta=\arg Z\quad[2\pi]$. $\mathrm{e}^z=Z\Leftrightarrow z=\ln\rho+i\theta+2ik\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 66 : [énoncé]
Posons $x = \mathrm{Re}z$ et $y = \mathrm{Im}z$. On a

$$1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + \mathrm{i}\,\frac{y}{n}$$

Pour n assez grand, on a $1 + x/n > 0$ et donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \mathrm{e}^{in\theta_n} \text{ avec } r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \arctan\frac{y/n}{1 + x/n}$$

Quand $n \to +\infty$

$$r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \times \left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to \exp(x)$$

et

$$n\theta_n \sim n \times \frac{y}{n} \to y$$

donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(x)\mathrm{e}^{iy} = \exp(z)$$

Exercice 67 : [énoncé]
$z = \mathrm{e}^{i\theta} + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$.
Si $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ alors $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$, si $\cos\frac{\theta}{2} = 0$ alors $|z| = 0$.
et si $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ alors $|z| = -2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} + \pi \quad [2\pi]$.
$z' = \mathrm{e}^{i\theta} - 1 = 2i\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$ et la suite est similaire.

Exercice 68 : [énoncé]
En factorisant $\mathrm{e}^{i\theta/2}$ au numérateur et au dénominateur

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} + 1} = \frac{i\sin\theta/2}{\cos\theta/2} = i\tan\frac{\theta}{2}$$

Exercice 69 : [énoncé]
On peut factoriser

$$\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}) = 2\cos\frac{\theta - \theta'}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos\frac{\theta-\theta'}{2}$.

Exercice 70 : [énoncé]
Puisque $\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{iz} = 0$, en multipliant par e^{-ix}, on obtient

$$1 + \mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{i\beta} = 0$$

avec $\alpha = y - x$ et $\beta = z - x$. En passant aux parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = -1 \\ \sin\alpha + \sin\beta = 0 \end{cases}$$

L'équation $\sin\alpha + \sin\beta = 0$ donne

$$\alpha = -\beta \quad [2\pi] \text{ ou } \alpha = \pi + \beta \quad [2\pi]$$

Si $\alpha = \pi + \beta \quad [2\pi]$ alors la relation $\cos\alpha + \cos\beta = -1$ donne $0 = -1$.
Il reste $\alpha = -\beta \quad [2\pi]$ et alors $2\cos\alpha = -1$ donne $\alpha = \pm 2\pi/3 \quad [2\pi]$.
Par suite $\mathrm{e}^{i\alpha} = j$ ou j^2.
On obtient alors aisément $1 + \mathrm{e}^{2i\alpha} + \mathrm{e}^{2i\beta} = 0$ puis $\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{2iy} + \mathrm{e}^{2iz} = 0$.