Polynômes

L'anneau des polynômes

Exercice 1 [02127] [correction]
Résoudre les équations suivantes :
a) $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$
b) $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 [02674] [correction]
Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 3 [02377] [correction]
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme

$$(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)\dots(1 + X^{2^n})$$

b) En déduire que tout entier $p > 0$ s'écrit de façon unique comme somme de puissance de 2 : $1, 2, 4, 8, \dots$

Exercice 4 [02553] [correction]
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n.

Polynômes réels

Exercice 5 [00399] [correction]
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$;
(ii) $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2$.

Polynômes complexes

Exercice 6 [00271] [correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et tel que $P(0) = 1$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbb{C}, |z| < \varepsilon \text{ et } |P(z)| < 1$$

Exercice 7 [03342] [correction]
Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

Montrer

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, |a_k| \leqslant M$$

(indice : employer des racines de l'unité)

Exercice 8 [02165] [correction]
Soit

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$$

Montrer que si ξ est racine de P alors

$$|\xi| \leqslant 1 + \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} |a_k|$$

Exercice 9 [03683] [correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont les racines complexes sont de parties imaginaires positives ou nulles. Montrer que le polynôme $P + \bar{P}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Polynômes réels scindés

Exercice 10 [03581] [correction]
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré $\geqslant 2$; on veut montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.
a) Enoncer le théorème de Rolle.
b) Si x_0 est racine de P de multiplicité $m \geqslant 1$, quelle en est la multiplicité dans P' ?
c) Prouver le résultat énoncé.

Exercice 11 [00261] [correction]
a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f s'annule au moins n fois. Montrer que f' s'annule au moins $n-1$ fois.
b) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples avec $n=\deg P\geqslant 2$. Montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.
c) Montrer que le résultat perdure même si les racines de P ne sont pas simples.

Exercice 12 [02160] [correction]
Soit P un polynôme de degré $n+1\in\mathbb{N}^\star$ à coefficients réels possédant $n+1$ racines réelles distinctes.
a) Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement n racines réelles distinctes.
b) En déduire que les racines du polynôme P^2+1 sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 13 [02163] [correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré supérieur à 2.
Montrer que P' est scindé.

Exercice 14 [02669] [correction]
a) Si $P\in\mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, montrer que P' est scindé ou constant sur $\mathbb{R}$.
b) Si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, montrer que $X^{10}+aX^9+bX^8+cX^7+X+1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 [03339] [correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}^\star$ les racines de $P^2+\alpha^2$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples.

Exercice 16 [03696] [correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel α, le polynôme $P'+\alpha P$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 [00274] [correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 18 [03340] [correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.
Montrer qu'aucun coefficient nul de P ne peut être encadré par deux coefficients non nuls et de même signe.

Dérivation

Exercice 19 [02129] [correction]
Résoudre les équations suivantes :
a) $P'^2=4P$ d'inconnue $P\in\mathbb{K}[X]$
b) $(X^2+1)P''-6P=0$ d'inconnue $P\in\mathbb{K}[X]$.

Exercice 20 [02130] [correction]
Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n-P_n'=X^n$$

Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 21 [02131] [correction]
Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Exercice 22 [02132] [correction]
Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. Montrer

$$P(X+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}P^{(n)}(X)$$

Exercice 23 [03338] [correction]
Trouver tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall k\in\mathbb{Z},\int_k^{k+1}P(t)\,\mathrm{d}t=k+1$$

Exercice 24 [03341] [correction]
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On suppose que $a\in\mathbb{R}$ vérifie

$$P(a)>0\text{ et }\forall k\in\mathbb{N}^\star,P^{(k)}(a)\geqslant 0$$

Montrer que le polynôme P ne possède pas de racines dans $[a,+\infty[$.

Division euclidienne

Exercice 25 [02141] [correction]
Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 26 [02142] [correction]
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 27 [02143] [correction]
Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.
Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\cos t + \sin t)^n$ par X^2+1.

Exercice 28 [02144] [correction]
Soit $k, n \in \mathbb{N}^\star$ et r le reste de la division euclidienne de k par n.
Montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$ est X^r.

Exercice 29 [02145] [correction]
Soient $n, m \in \mathbb{N}^\star$.
a) De la division euclidienne de n par m, déduire celle de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
b) Etablir que
$$\operatorname{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\operatorname{pgcd}(n,m)} - 1$$

Divisibilité

Exercice 30 [02133] [correction]
Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondant :
a) $X-1 \mid X^3 - 2X^2 + 3X - 2$ b) $X-2 \mid X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ c) $X+1 \mid X^3 + 3X^2 - 2$.

Exercice 31 [02140] [correction]
En réalisant une division euclidienne, former une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 32 [02134] [correction]
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
a) Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
b) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
c) On note $P^{[n]} = P \circ \ldots \circ P$ (composition à $n \geqslant 1$ facteurs).
Etablir que $P(X) - X$ divise $P^{[n]}(X) - X$

Exercice 33 [03407] [correction]
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 34 [03632] [correction]
Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$
$$a \mid b \Leftrightarrow X^a - 1 \mid X^b - 1$$

Arithmétique

Exercice 35 [02135] [correction]
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice 36 [02136] [correction]
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux.
Montrer qu'il existe un unique couple $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que
$$AU + BV = 1 \text{ et } \begin{cases} \deg U < \deg B \\ \deg V < \deg A \end{cases}$$

Exercice 37 [02137] [correction]
Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) A et B ne sont pas premiers entre eux.
(ii) il existe $(U,V) \in (\mathbb{K}[X] - \{0\})^2$ tel que
$$AU + BV = 0,\ \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A$$

Exercice 38 [02138] [correction]
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls.
Montrer : A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A + B$ et AB le sont.

Exercice 39 [02139] [correction]
Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que A et B soient premiers entre eux.
Montrer

$$\operatorname{pgcd}(A, BC) = \operatorname{pgcd}(A, C)$$

Exercice 40 [02580] [correction]
On cherche les polynômes

$$P(X) = (X - a)(X - b) \in \mathbb{C}[X]$$

tels que $P(X)$ divise $P(X^3)$.
Montrer que, si $a = b$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 polynômes dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.
Trouver les polynômes P si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ et en déduire que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

Racines

Exercice 41 [02157] [correction]
a) Soit

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
On suppose que P admet une racine rationnelle $r = p/q$ exprimée sous forme irréductible.
Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
b) Factoriser

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$$

c) Le polynôme

$$P = X^3 + 3X - 1$$

est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 42 [02158] [correction]
Soient a, b, c trois éléments, non nuls et distincts, du corps $\mathbb{K}$.
Démontrer que le polynôme

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

peut s'écrire sous la forme $P = \lambda(X - a)(X - b)(X - c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 43 [02371] [correction]
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sin((2n + 1)\alpha)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.
b) En déduire que les racines du polynôme :

$$P(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$$

sont de la forme $x_k = \cot^2 \beta_k$. Déterminer les β_k.

Exercice 44 [02663] [correction]
a) Montrer que $a = \cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
b) Justifier que le nombre a est irrationnel.

Exercice 45 [02941] [correction]
Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non constants vérifiant

$$\{z \in \mathbb{C} / A(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} / B(z) = 0\} \text{ et } \{z \in \mathbb{C} / A(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C} / B(z) = 1\}$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 46 [01352] [correction]
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
a) Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

b) On pose $A(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$. Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$$

Racines et arithmétique

Exercice 47 [02166] [correction]
Soient p et q deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux.
Montrer
$$(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X - 1)(X^{pq} - 1)$$

Exercice 48 [02167] [correction]
Justifier les divisibilités suivantes :
a) $\forall n \in \mathbb{N},\ X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1$
b) $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ (X-1)^3 \mid nX^{n+2} - (n+2).X^{n+1} + (n+2)X - n$

Exercice 49 [02168] [correction]
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :
$$(X-1)^2 \mid P - 1 \text{ et } (X+1)^2 \mid P + 1$$
Déterminer celui-ci.

Exercice 50 [02169] [correction]
Justifier
$$\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3,\ 1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$$

Exercice 51 [02170] [correction]
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que
$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1$$

Exercice 52 [02668] [correction]
Déterminer les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que
$$(X+4)P(X) = XP(X+1)$$

Exercice 53 [03041] [correction]
Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que
$$P(1) = 1,\ P(2) = 2,\ P'(1) = 3,\ P'(2) = 4, P''(1) = 5 \text{ et } P''(2) = 6$$

Exercice 54 [03406] [correction]
[Equation de Fermat polynomiale]
a) Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux à deux, non constants, et tels que
$$P + Q + R = 0$$
Soient p, q, r le nombre de racines distinctes des polynômes P, Q, R respectivement.
Prouver que le degré de P est strictement inférieur à $p + q + r$.
(indice : introduite $P'Q - Q'P$)
b) Trouver tous les triplets de polynômes complexes (P, Q, R) tels que
$$P^n + Q^n = R^n$$
pour $n \geqslant 3$ donné.
c) Le résultat s'étend-il à $n = 2$?

Racines et équations polynomiales

Exercice 55 [02159] [correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que
$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$$
a) Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi
b) En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

Exercice 56 [02164] [correction]
Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie
$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$
ses racines sont parmi $0, 1, -j, -j^2$. En déduire tous les polynômes solutions.

Exercice 57 [02375] [correction]
Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

Exercice 58 [02673] [correction]
On cherche les polynômes P non nuls tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

a) Montrer que toute racine d'un tel P est de module 1.
b) Déterminer les polynômes P.

Exercice 59 [02672] [correction]
Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

Exercice 60 [01329] [correction]
Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

Factorisation

Exercice 61 [02171] [correction]
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$\text{a) } X^4 - 1 \quad \text{b) } X^5 - 1 \quad \text{c) } (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$

Exercice 62 [02172] [correction]
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$\text{a) } X^4 + X^2 + 1 \quad \text{b) } X^4 + X^2 - 6 \quad \text{c) } X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 63 [02173] [correction]
Factoriser le polynôme $(X+i)^n - (X-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 64 [02174] [correction]
Former la décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$ de $P = X^{2n+1} - 1$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 65 [02175] [correction]
Soient $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$$

Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

Exercice 66 [02176] [correction]
Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 67 [02177] [correction]
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

Exercice 68 [02178] [correction]
Résoudre $x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 69 [02179] [correction]
On considère l'équation : $x^3 - (2+\sqrt{2})x^2 + 2(\sqrt{2}+1)x - 2\sqrt{2} = 0$ de racines x_1, x_2 et x_3.
a) Former une équation dont x_1^2, x_2^2 et x_3^2 seraient racines.
b) En déduire les valeurs de x_1, x_2, x_3.

Exercice 70 [02180] [correction]
Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\text{a) } \begin{cases} x+y+z=1 \\ 1/x+1/y+1/z=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x(y+z)=1 \\ y(z+x)=1 \\ z(x+y)=1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{cases}$$

Exercice 71 [02181] [correction]
Soient $x, y, z \in \mathbb{C}^\star$ tels que $x+y+z=0$. Montrer

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$$

Exercice 72 [02182] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$.
a) Former la décomposition en facteurs premiers de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
b) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 73 [02183] [correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+z)^n = \cos(2na) + i\sin(2na)$$

En déduire la valeur de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Exercice 74 [02184] [correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et $n = \deg P$.
Montrer que les sommes des zéros de $P, P', \ldots, P^{(n-1)}$ sont en progression arithmétique.

Exercice 75 [02373] [correction]
Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ. Calculer

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$$

Exercice 76 [03333] [correction]
x, y, z désignent trois complexes vérifiant

$$x + y + z = 0$$

Etablir

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)$$

Exercice 77 [03336] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 0 \\ x^4+y^4+z^4 = 0 \\ x^5+y^5+z^5 = 0 \end{cases}$$

Exercice 78 [03345] [correction]
On considère le polynôme

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$$

de racines $x_1, \ldots, x_n$ comptées avec multiplicité.
Pour tout$p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p = x_1^p + \cdots + x_n^p$$

Etablir

$$\begin{cases} a_0S_1 + a_1 = 0 \\ a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \\ \ldots \\ a_0S_p + a_1S_{p-1} + \cdots + a_{p-1}S_1 + pa_p = 0 \quad (0 < p \leqslant n) \\ \ldots \\ a_0S_n + a_1S_{n+1} + \cdots + a_nS_1 = 0 \\ \ldots \\ a_0S_{n+k} + a_1S_{n+k-1} + \cdots + a_nS_k = 0 \quad (k > 0) \end{cases}$$

Exercice 79 [03812] [correction]
a) Déterminer trois éléments a, b, c de $\mathbb{C}$, non tous réels, tels que $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ et $a^3+b^3+c^3$ soient trois réels.
b) Montrer que, si a, b, c sont trois éléments de $\mathbb{C}$ de modules différents et si $a+b+c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2 \in \mathbb{R}$ et $a^3+b^3+c^3 \in \mathbb{R}$, alors a,b et c sont trois réels.
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Familles de polynômes classiques

Exercice 80 [02185] [correction]
Polynômes de Tchebychev (1821-1894) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

a) Calculer f_0,f_1, f_2 et f_3.
b) Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
c) Etablir qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1,1]$.
d) Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
e) Observer que T_n possède exactement n racines distinctes, que l'on exprimera, toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 81 [02186] [correction]
Polynômes d'interpolation de Lagrange (1736-1813) :
Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ on pose

$$L_i = \frac{\prod\limits_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} (X - a_j)}{\prod\limits_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} (a_i - a_j)}$$

a) Observer que, pour tout $j \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$
(où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (1823-1891) qui est égal à 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon).
b) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \; P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i(X)$$

Exercice 82 [02187] [correction]
Polynômes de Legendre (1752-1833) :
Pour tout entier naturel n on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!} \left((X^2 - 1)^n\right)^{(n)}$$

a) Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.
b) Montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \; , \; \int_{-1}^{1} L_n(t) Q(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

c) En déduire que L_n possède n racines simples toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 83 [02188] [correction]
Soit $(P_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de $\mathbb{K}[X]$ définie par

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$$

a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$$

b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}$$

c) Etablir pour que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$$

d) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$\operatorname{pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_m)$$

En déduire que $\operatorname{pgcd}(P_m, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n.
e) Conclure

$$\operatorname{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\operatorname{pgcd}(m,n)}$$

Exercice 84 [02189] [correction]
Polynômes de Laguerre (1834-1886) :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (\mathrm{e}^{-x} x^n)$$

Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exercice 85 [02670] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout θ réel. On le note T_n.
a) Lier T_{n-1}, T_n et T_{n+1}.
b) Donner une équation différentielle vérifiée par T_n.
c) Calculer $T_n^{(k)}(1)$ et $T_n^{(k)}(-1)$.

Exercice 86 [02671] [correction]
Quels sont les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant $P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1$?

Exercice 87 [02128] [correction]
On définit une suite de polynôme (P_n) par

$$P_0 = 2, P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

a) Calculer P_2 et P_3.
Déterminer degré et coefficient dominant de P_n.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$ on a

$$P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

c) En déduire une expression simple de $P_n(2\cos\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
d) Déterminer les racines de P_n.

Exercice 88 [03269] [correction]
On pose

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Démontrer l'existence d'un polynôme P_n de degré n et à coefficients positifs ou nul vérifiant

$$\forall n \geqslant 1, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

Préciser P_1, P_2, P_3 et calculer $P_n(1)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Si (P, Q) est un couple solution de polynômes non nuls alors $Q^2 = XP^2$ donne $2\deg Q = 1 + 2\deg P$ avec $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible. Il reste le cas où l'un des polynômes P ou Q est nul et l'autre, alors, l'est aussi. Inversement, le couple nul est effectivement solution.
b) Si $\deg P \geqslant 2$ alors $\deg P \circ P = (\deg P)^2 > \deg P$ et donc P n'est pas solution.
Si $\deg P \leqslant 1$ alors on peut écrire $P = aX + b$ et alors

$$P \circ P = P \Leftrightarrow a(aX+b)+b = aX+b \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab = 0 \end{cases}$$

Après résolution on obtient

$$(a = 1 \text{et } b = 0) \text{ ou } (a = 0 \text{ et } b \text{ quelconque})$$

Finalement les solutions sont le polynôme X et les polynômes constants.

Exercice 2 : [énoncé]
Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution.
Si $\deg P \geqslant 1$ alors, pour vérifier l'équation, il est nécessaire que $\deg P = 2$. On peut alors écrire P sous la forme $aX^2 + bX + c$. Parmi, les polynômes de cette forme, ceux solutions sont ceux obtenus pour $b = 0$ et $c = -a$. Conclusion, les polynômes solutions sont les $a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Posons

$$P(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n})$$

En exploitant successivement $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, on obtient

$$(1-X)P(X) = 1 - X^{2^{n+1}}$$

On en déduit

$$P(X) = \frac{1 - X^{2^{n+1}}}{1-X} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2^{n+1}-1}$$

b) Lorsqu'on développe directement le polynôme P, le coefficient de X^k obtenu correspond au nombre de fois qu'il est possible d'écrire k comme la somme des puissances de 2 suivantes : $1, 2, 4, \dots, 2^n$. Ce nombre vaut 1 compte tenu de l'exercice précédent.

Exercice 4 : [énoncé]
Notons a_n, b_n et c_n les coefficients de $1, X$ et X^2 dans P_n.
Puisque $P_1 = X - 2$, on a $a_1 = -2$, $b_1 = 1$ et $c_1 = 0$.
Puisque $P_{n+1} = P_n^2 - 2$, on a $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $b_{n+1} = 2a_nb_n$ et $c_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n$.
On en déduit $a_2 = 2$, $b_2 = -4$ et $c_2 = 1$ puis pour $n \geqslant 3$: $a_n = 2$, $b_n = -4^{n-1}$,

$$c_n = 4^{n-2} + 4^{n-1} + \dots + 4^{2n-4} = 4^{n-2}\frac{4^{n-1}-1}{3}$$

Exercice 5 : [énoncé]
L'implication (ii)⇒(i) est immédiate.
Supposons (i).
Puisque P est de signe constant, la décomposition en facteurs irréductibles de P s'écrit avec des facteurs de la forme

$$(X-\lambda)^2 = (X-\lambda)^2 + 0^2$$

et

$$X^2 + 2pX + q = (X + p/2)^2 + \sqrt{q^2 - 4p}^2$$

Ainsi P est, à un facteur multiplicatif positif près, le produit de polynômes s'écrivant comme la somme des carrés de deux polynômes réels.
Or

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2$$

donc P peut s'écrire comme la somme des carrés de deux polynômes réels

Exercice 6 : [énoncé]
Puisque le polynôme P est non constant, on peut écrire

$$P(z) = 1 + a_q z^q + z^{q+1}Q(z)$$

avec $a_q \neq 0$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$.
Posons θ un argument du complexe a_q et considérons la suite (z_n) de terme général

$$z_n = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{i(\pi-\theta)/q}$$

On a $z_n \to 0$ et

$$P(z_n) = 1 - \frac{|a_q|}{n^q} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

donc $|P(z_n)| < 1$ pour n assez grand.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/(n+1)}$ une racine $n$ème de l'unité. On a

$$P(1) + P(\omega) + \cdots + P(\omega^n) = (n+1)a_0$$

car

$$\sum_{k=0}^{n} \omega^{k\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } \ell = 0 \quad [n+1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit $(n+1)|a_0| \leqslant (n+1)M$ puis $|a_0| \leqslant M$.
De façon plus générale, on a

$$P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \cdots + \omega^{-nk}P(\omega^n) = (n+1)a_k$$

et on en déduit $|a_k| \leqslant M$.

Exercice 8 : [énoncé]
La propriété est immédiate si $|\xi| \leqslant 1$. On suppose désormais $|\xi| > 1$ et on note

$$m = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k|$$

L'égalité

$$-\xi^n = a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_1\xi + a_0$$

donne

$$|\xi|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\xi|^k \leqslant m \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k$$

donc

$$|\xi|^n \leqslant m\frac{|\xi|^n - 1}{|\xi| - 1} \leqslant m\frac{|\xi|^n}{|\xi| - 1}$$

puis

$$|\xi| \leqslant 1 + m$$

Exercice 9 : [énoncé]
On peut écrire P sous forme factorisée

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$$

avec $n = \deg P \in \mathbb{N}^\star$ et $z_k \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Im} z_k \geqslant 0$.

Un complexe z est racine du polynôme $P + \bar{P}$ si, et seulement si,

$$\lambda \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = -\bar{\lambda} \prod_{k=1}^{n} (z - \overline{z_k})$$

Si $\mathrm{Im} z > 0$ alors

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, |z - z_k| < |z - \overline{z_k}|$$

et donc

$$\left|\lambda \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)\right| < \bar{\lambda} \left|\prod_{k=1}^{n} (z - \overline{z_k})\right|$$

Ainsi z ne peut être racine de $P + \bar{P}$ et $\bar{z}$ non plus par le même raisonnement ou parce que $P + \bar{P}$ est un polynôme réel.
On en déduit que les racines de P sont toutes réelles et donc P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
Ainsi le polynôme $\mathrm{Re}P$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et, par une argumentation analogue, il en est de même de $\mathrm{Im}P$.

Exercice 10 : [énoncé]
a) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) est continue, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
b) Si x_0 est racine de multiplicité m de P alors x_0 est racine de multiplicité $m - 1$ de P' (en convenant qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine).
c) Notons $x_1 < \ldots < x_p$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. Puisque le polynôme P est supposé scindé, on a

$$m_1 + \cdots + m_p = \deg P$$

Les éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont racines de multiplicités $m_1 - 1, \ldots, m_p - 1$ de P'.
En appliquant le théorème de Rolle à P entre x_k et x_{k+1}, on détermine $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ racine de P'. Ces y_k sont distincts entre eux et distincts des $x_1, \ldots, x_p$. On a ainsi obtenu au moins

$$(p - 1) + (m_1 - 1) + \cdots + (m_p - 1) = \deg P - 1$$

racines de P'. Or $\deg P' = \deg P - 1$ donc P' est scindé.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Soient $a_1 < \ldots < a_n$ les zéros de f. En appliquant le théorème Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on obtient $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ annulant f'. Puisque

$$a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < b_{n-1} < a_n$$

les $b_1, \dots, b_{n-1}$ sont des annulations distinctes de f'.
b) Si P est scindé à racines simples, il possède n racines. Le polynôme P' possède alors au moins $n-1$ racines. Or $\deg P' = n-1$ donc le polynôme P' est scindé.
c) Soient $a_1 < \ldots < a_p$ les racines de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ leurs multiplicités avec

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$$

Les $a_1 < \ldots < a_p$ sont racines de P' de multiplicités respectives

$$\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_p - 1$$

Comme ci-dessus, par Rolle, on peut aussi assurer l'existence de $p-1$ autres racines à P'.
La somme des multiplicités des racines est donc au moins égales à

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i - 1 + p - 1 = n - 1 = \deg P'$$

et donc le polynôme P' est scindé.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Notons $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ les racines de P.
En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $x \mapsto P(x)$ sur l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$, on justifie l'existence d'un réel $b_i \in]a_{i-1}, a_i[$ tels que $P'(b_i) = 0$. Puisque

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < b_n < a_n$$

les réels $b_1, \ldots, b_n$ sont deux à deux distincts ce qui fournit n racines réelles au polynôme P'.
Puisque $\deg P' = \deg P - 1 = n$, il ne peut y en avoir d'autres.
b) Une racine multiple de $P^2 + 1$ est aussi racine du polynôme dérivé

$$(P^2 + 1)' = 2PP'$$

Or les racines de P ne sont pas racines de $P^2 + 1$ et les racines de P' sont réelles et ne peuvent donc être racines de $P^2 + 1$. Par suite $P^2 + 1$ et $(P^2 + 1)'$ n'ont aucunes racines communes : les racines de $P^2 + 1$ sont simples.

Exercice 13 : [énoncé]
Posons $n = \deg P \geqslant 2$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ les racines réelles distinctes de P et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ leurs ordres respectifs. On a $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$ car P est supposé scindé.
En appliquant le théorème de Rolle à $x \mapsto \tilde{P}(x)$ sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ on justifie l'existence de racines distinctes $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$ disposée de sorte que $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_{p-1} < a_p$.
Comme les $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des racines d'ordres $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_p - 1$ de P' et que $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$ sont des racines au moins simples de P', on vient de déterminer $(n-1) = \deg P'$ racines de P' comptées avec leur multiplicité.
Finalement P' est scindé.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Si P est degré 1 alors P' est constant. Si P est de degré $n \geqslant 2$, par application du théorème de Rolle, il figure une racine de P' entre deux racines consécutives de P. De surcroît, si a est racine de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^\star$ de P, a est aussi racine de multiplicité $\alpha - 1$ de P'. Par suite, P' en admet $n-1$ racines comptées avec multiplicité et est donc scindé.
b) 0 est racine multiple du polynôme dérivé à l'ordre 2. Si le polynôme était scindé, l'étude qui précède permet d'observer que 0 est racine du polynôme. Ce n'est pas le cas.

Exercice 15 : [énoncé]
Notons que par application du théorème de Rolle, les racines de P' sont réelles (et simples)
Les racines multiples de $P^2 + \alpha^2$ sont aussi racines de $(P^2 + \alpha^2)' = 2PP'$.
Or les racines de $P^2 + \alpha^2$ ne peuvent être réelles et les racines de PP' sont toutes réelles.
Il n'y a donc pas de racines multiples au polynôme $P^2 + \alpha^2$.

Exercice 16 : [énoncé]
Rappelons qu'un polynôme est scindé sur un corps si, et seulement si, la somme des multiplicités des racines de ce polynôme sur ce corps égale son degré.
Notons $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ les racines réelles de P et $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives. Le polynôme P étant scindé, on peut écrire

$$\deg P = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k$$

On convient de dire qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine d'un polynôme. Avec ses termes, si a_k est racine de multiplicité $\alpha_k \geqslant 1$ de P alors a_k

est racine de multiplicité $\alpha_k - 1$ du polynôme P' et donc racine de multiplicité au moins (et même exactement) $\alpha_k - 1$ du polynôme $P' + \alpha P$. Ainsi les a_k fournissent

$$\sum_{k=0}^{m} (\alpha_k - 1) = \deg P - (m+1)$$

racines comptées avec multiplicité au polynôme $P' + \alpha P$.
Considérons ensuite la fonction réelle $f : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Cette fonction est indéfiniment dérivable et prend la valeur 0 en chaque a_k.
En appliquant le théorème de Rolle à celle-ci sur chaque intervalle $[a_{k-1}, a_k]$, on produit des réels $b_k \in]a_{k-1}, a_k[$ vérifiant $f'(b_k) = 0$. Or

$$f'(x) = (P'(x) + \alpha P(x))\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

et donc b_k est racine du polynôme $P' + \alpha P$.
Ajoutons à cela que les b_k sont deux à deux distincts et différents des précédents a_k car, par construction

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < b_m < a_m$$

On vient donc de déterminer m nouvelles racines au polynôme $P' + \alpha P$ et ce dernier possède donc au moins

$$\deg P - 1$$

racines comptées avec multiplicité.
Dans le cas $\alpha = 0$, cela suffit pour conclure car $\deg P' = \deg P - 1$.
Dans le cas $\alpha \neq 0$, il nous faut encore une racine...
Si $\alpha > 0$, la fonction f tend vers 0 en $-\infty$ par argument de croissance comparée. On peut alors appliquer un théorème de Rolle généralisé à la fonction f sur l'intervalle $]-\infty, a_0]$ et cela fournit la racine manquante.
Si $\alpha < 0$, on exploite comme au dessus la nullité de la limite de f en $+\infty$ cette fois pour trouver une racine dans l'intervalle $]a_m, +\infty[$.

Exercice 17 : [énoncé]
Remarquons que puisque P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$, l'application du théorème de Rolle entre deux racines consécutives de P donne une annulation de P' et permet de justifier que P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Il est en de même de $P'', P''', \ldots$
Or, si le polynôme P admet deux coefficients consécutifs nuls alors l'un de ses polynômes dérivées admet 0 pour racine double. C'est impossible en vertu de la remarque qui précède.

Exercice 18 : [énoncé]
Ecrivons

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

et, quitte à considérer $-P$, supposons par l'absurde qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que

$$a_p = 0 \text{ avec } a_{p-1}, a_{p+1} > 0$$

Considérons alors

$$Q(X) = P^{(p-1)}(X) = (p-1)!a_{p-1} + \frac{(p+1)!}{2} a_{p+1} X^2 + \cdots$$

Puisque le polynôme P est scindé à racines simples, par application du théorème de Rolle, les racines $P^{(k+1)}$ sont séparées par les racines des $P^{(k)}$. En particulier les racines de Q' sont séparées par les racines de Q.
Or 0 est minimum local de Q avec $Q(0) > 0$.
Si le polynôme Q admet des racines strictement positives et si a est la plus petite de celles-ci alors Q' admet une racine dans $]0, a[$ par application du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de Rolle. Or 0 est aussi racine de Q' et donc les racines de Q' ne sont pas séparées par les racines de Q. C'est absurde.
Il en est de même si la polynôme admet des racines strictement négatives.

Exercice 19 : [énoncé]
a) Parmi les polynômes constants, seul le polynôme nul est solution.
Parmi les polynômes non constants, si P est solution alors $2(\deg P - 1) = \deg P$ et donc $\deg P = 2$. On peut alors écrire $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

$$P'^2 = 4P \Leftrightarrow 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = b^2/4 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont $P = 0$ et $P = X^2 + bX + b^2/4$ avec $b \in \mathbb{K}$.
b) Parmi les polynôme de degré inférieur à 1, seul le polynôme nul est solution.
Pour P polynôme tel que $\deg P \geqslant 2$ alors la relation $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ implique, en raisonnant sur l'annulation des coefficients dominants, $\deg P(\deg P - 1) = 6$ donc $\deg P = 3$.
En cherchant P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \in \mathbb{K}^\star$, on obtient que seuls les polynômes $P = a(X^3 + X)$ avec $a \in \mathbb{K}^\star$ sont solutions.
Finalement les polynômes solutions sont les $a(X^3 + X)$ avec $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 20 : [énoncé]
Les polynômes solutions de $P_n - P_n' = X^n$ sont nécessairement de degré n.

Cherchons ceux-ci de la forme :

$$P_n = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

$P_n - P_n' = X^n$ équivaut à

$$a_n = 1, a_{n-1} = na_n, a_{n-2} = (n-1)a_{n-1}, \ldots, a_0 = 1.a_1$$

Par suite l'équation $P_n - P_n' = X^n$ possède une et une seule solution qui est :

$$P = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \cdots + n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k$$

Exercice 21 : [énoncé]
Parmi les polynômes constants, seul le polynôme nul est divisible par son polynôme dérivé.
Soit P un polynôme non constant et n son degré.
Si $P' \mid P$ alors on peut écrire $nP = (X-a)P'$ avec $a \in \mathbb{K}$ car $\deg P' = \deg P - 1$.
En dérivant $nP' = (X-a)P'' + P'$ donc $(n-1)P' = (X-a)P''$.
Ainsi de suite jusqu'à $P^{(n-1)} = (X-a)P^{(n)}$.
Or, si on pose λ le coefficient dominant de P, on a $P^{(n)} = n!\lambda$ donc en remontant les précédents calculs on obtient $n!P = n!(X-a)^n\lambda$. Ainsi $P = \lambda(X-a)^n$.
Inversement, un tel polynôme est solution.
Finalement les solutions sont les $P = \lambda(X-a)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 22 : [énoncé]
Par la formule de Taylor

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

donc

$$P(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

et plus généralement

$$P^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!}$$

Par la formule de Taylor

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k$$

puis en permutant les sommes (qui se limitent à un nombre fini de termes non nuls)

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

Autre méthode : On exploite les ingrédients suivants :
- l'application qui à P associe $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$ est linéaire ;
- par la formule du binôme, cette application envoie chaque X^k sur $(X+1)^k$;
- deux applications linéaires égales sur une base sont égales sur l'espace.

Exercice 23 : [énoncé]
Soit P un polynôme et Q un polynôme primitif de P. P est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, Q(k+1) - Q(k) = k+1$$

En raisonnant par coefficients inconnus, on observe que $Q(X) = \frac{1}{2}X(X+1)$ est solution.
Si $\tilde{Q}(X)$ est aussi solution alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (Q - \tilde{Q})(k+1) = (Q - \tilde{Q})(k)$$

et on en déduit que le polynôme $Q - \tilde{Q}$ est constant.
On en déduit que

$$P(X) = X + \frac{1}{2}$$

est l'unique solution du problème posé.

Exercice 24 : [énoncé]
Par la formule de Taylor, on a pour tout $x \geqslant 0$

$$P(a+x) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k \geqslant P(a) > 0$$

Exercice 25 : [énoncé]
Cette division euclidienne s'écrit $P = Q(X-a)(X-b) + R$ avec $\deg R < 2$.
On peut écrire $R = \alpha X + \beta$. En évaluant en a et b, on obtient un système dont la résolution donne
$$\alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}$$

Exercice 26 : [énoncé]
Cette division euclidienne s'écrit
$$P = Q(X-a)^2 + R \text{ avec } \deg R < 2$$
On peut écrire $R = \alpha X + \beta$.
En évaluant en a, puis en dérivant avant d'évaluer à nouveau en a, on obtient un système dont la résolution donne
$$\alpha = P'(a) \text{ et } \beta = P(a) - aP'(a)$$

Exercice 27 : [énoncé]
$(X\cos t + \sin t)^n = (X^2+1)Q + R$ avec $\deg R < 2$ ce qui permet d'écrire
$R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Cette relation doit être aussi vraie dans $\mathbb{C}[X]$ et peut donc être évaluée en i :
$(i\cos t + \sin t)^n = R(i) = ai + b$ or $(i\cos t + \sin t)^n = \mathrm{e}^{i(n\pi/2 - nt)}$ donc
$a = \sin n(\pi/2 - t)$ et $b = \cos n(\pi/2 - t)$.

Exercice 28 : [énoncé]
On a $k = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$.
Or $X^k - X^r = X^r(X^{nq} - 1)$ et $X^n - 1 \mid X^{nq} - 1$. On peut donc écrire
$$X^{nq} - 1 = (X^n - 1)Q(X)$$
puis
$$X^k = (X^n - 1)X^rQ(X) + X^r \text{ avec } \deg X^r < \deg(X^n - 1)$$
ce qui permet de reconnaître le reste de division euclidienne cherchée.

Exercice 29 : [énoncé]
a) $n = mq + r$ avec $0 \leqslant r < m$.
$X^n - 1 = X^{mq+r} - 1 = X^{mq+r} - X^r + X^r - 1 = X^r(X^{mq} - 1) + X^r - 1$
or $X^{mq} - 1 = (X^m - 1)(1 + X^m + \cdots + X^{m(q-1)})$ donc $X^n - 1 = (X^m - 1)Q + R$ avec $Q = X^r(1 + X^m + \cdots + X^{m(q-1)})$ et $R = X^r - 1$.
Puisque $\deg R < \deg X^m - 1$, R est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
b) Suivons l'algorithme d'Euclide calculant le pgcd de n et m.
$a_0 = n$, $a_1 = m$ puis tant que $a_k \neq 0$, on pose a_{k+1} le reste de la division euclidienne de a_{k-1} par a_k.
Cet algorithme donne $\operatorname{pgcd}(m,n) = a_p$ avec a_p le dernier reste non nul.
Par la question ci-dessus on observe que si on pose $A_k = X^{a_k} - 1$ alors
$A_0 = X^n - 1$, $A_1 = X^m - 1$ et pour tout k tel que $a_k \neq 0$, $A_k \neq 0$ et A_{k+1} est le reste de la division euclidienne de A_{k-1} par A_k.
Par suite $\operatorname{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \operatorname{pgcd}(A_0, A_1) = \operatorname{pgcd}(A_1, A_2) = \cdots =$
$\operatorname{pgcd}(A_p, A_{p+1}) = A_p = X^{\operatorname{pgcd}(m,n)} - 1$ car $A_{p+1} = 0$ puisque $a_{p+1} = 0$.

Exercice 30 : [énoncé]
a) $X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X-1)(X^2 - X + 2)$.
b) $X^3 - 3X^2 + 3X - 2 = (X-2)(X^2 - X + 1)$.
c) $X^3 + 3X^2 - 2 = (X+1)(X^2 + 2X - 2)$.

Exercice 31 : [énoncé]
$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2+2)(X^2 + X + (\lambda - 2)) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda$.
Le polynôme $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ si, et seulement si,
$\lambda = 3, \mu = 2$.

Exercice 32 : [énoncé]
On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$
a) On a
$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left([P(X)]^k - X^k\right)$$
avec $P(X) - X$ divisant $[P(X)]^k - X^k$ car
$$a^k - b^k = (a-b)\sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell b^{k-1-\ell}$$
b) $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - P(X)$ et le polynôme $P(X) - X$. Il divise donc leur somme $P(P(X)) - X$.

c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$ et vient d'être établie pour $n = 2$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.

$$P^{[n+1]}(X) - P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\left[P^{[n]}(X)\right]^k - X^k\right)$$

$P^{[n]}(X) - X$ divise $\left[P^{[n]}(X)\right]^k - X^k$ donc $P^{[n]}(X) - X$ divise $P^{[n+1]}(X) - P(X)$.
Par hypothèse de récurrence, $P(X) - X$ divise alors $P^{[n+1]}(X) - P(X)$ et enfin on en déduit que $P(X) - X$ divise $P^{[n+1]}(X) - X$.
Récurrence établie.

Exercice 33 : [énoncé]
Puisque
$$P(P(X)) - X = (P(P(X)) - P(X)) + (P(X) - X)$$
le problème revient à montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
On écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et on a

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left([P(X)]^k - X^k\right)$$

avec $P(X) - X$ divisant $[P(X)]^k - X^k$ car

$$a^k - b^k = (a - b)\sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell b^{k-1-\ell}$$

On en déduit que $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - P(X)$ et donc le polynôme $P(P(X)) - X$.

Exercice 34 : [énoncé]
($\Rightarrow$) Si a divise b, on peut écrire $b = ac$ et alors

$$X^b - 1 = (X^a)^c - 1^c = (X^a - 1)(1 + X^a + \dots + X^{a(c-1)})$$

donc $X^a - 1$ divise $X^b - 1$.
($\Leftarrow$) Si $X^a - 1$ divise $X^b - 1$, réalisons la division euclidienne de b par a

$$b = aq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < a$$

On peut écrire
$$X^b - 1 = X^r(X^{aq} - 1) + X^r - 1$$
et puisque $X^a - 1$ divise $X^b - 1$ et aussi $X^{aq} - 1$, on peut affirmer que $X^a - 1$ divise $X^r - 1$.
Or $r < a$ donc nécessairement $r = 0$ et donc a divise b.

Exercice 35 : [énoncé]
Posons $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$. On a $D^2 = \operatorname{pgcd}(A^2, B^2)$ associé à A^2 donc $\deg D^2 = \deg A^2$ puis $\deg D = \deg A$.
Or $D \mid A$ donc D et A sont associés. Puisque $D \mid B$, on obtient $A \mid B$.

Exercice 36 : [énoncé]
Unicité : Soit (U, V) et $(\hat{U}, \hat{V})$ deux couples solutions. On a $A(U - \hat{U}) = B(\hat{V} - V)$.
$A \mid B(\hat{V} - V)$ et $A \wedge B = 1$ donc $A \mid \hat{V} - V$. Or $\deg(\hat{V} - V) < \deg A$ donc $\hat{V} - V = 0$.
Par suite $\hat{V} = V$ et de même $\hat{U} = U$.
Existence : Puisque $A \wedge B = 1$, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.
Réalisons la division euclidienne de U par B : $U = BQ + \hat{U}$ avec $\deg \hat{U} < \deg B$.
Posons ensuite $\hat{V} = V + AQ$. On a $A\hat{U} + B\hat{V} = AU + BV = 1$ avec $\deg \hat{U} < \deg B$.
Comme $\deg A\hat{U} + B\hat{V} < \max(\deg A\hat{U}, \deg B\hat{V})$ on a $\deg A\hat{U} = \deg B\hat{V}$ d'où $\deg \hat{V} = \deg A + \deg \hat{U} - \deg B < \deg A$.

Exercice 37 : [énoncé]
(i) $\Rightarrow$ (ii) Posons $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$ qui est non constant.
Puisque $D \mid A$ et $D \mid B$ on peut écrire $A = DV$ et $-B = DU$ avec $\deg V < \deg A$ et $\deg U < \deg B$.
de sorte que $AU + BV = DUV - DUV = 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons (ii)
Si par l'absurde $A \wedge B = 1$ alors, puisque $A \mid -BV$ on a $A \mid V$.
Or $V \neq 0$ donc $\deg A \leqslant \deg V$ ce qui est exclu. Absurde.

Exercice 38 : [énoncé]
Si $A \wedge B = 1$ alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.
On a alors $A(U - V) + (A + B)V = 1$ donc $A \wedge (A + B) = 1$. De même $B \wedge (A + B) = 1$.
Par suite $AB \wedge (A + B) = 1$.
Si $AB \wedge (A + B) = 1$ alors puisque $\operatorname{pgcd}(A, B) \mid AB$ et $\operatorname{pgcd}(A, B) \mid A + B$ on a $\operatorname{pgcd}(A, B) = 1$ puis $A \wedge B = 1$.

Exercice 39 : [énoncé]
$\text{pgcd}(A, C) \mid A$ et $\text{pgcd}(A, C) \mid C$ donc $\text{pgcd}(A, C) \mid BC$ puis
$\text{pgcd}(A, C) \mid \text{pgcd}(A, BC)$.
Inversement. Posons $D = \text{pgcd}(A, BC)$. On a $D \mid A$ et $A \wedge B = 1$ donc $D \wedge B = 1$.
De plus $D \mid BC$ donc par le théorème de Gauss, $D \mid C$ et finalement
$D \mid \text{pgcd}(A, C)$.

Exercice 40 : [énoncé]
Si $a = b$ alors $(X - a)^2$ divise $(X^3 - a)^2$ si, et seulement si, a est racine au moins double de $(X^3 - a)^2$. Ceci équivaut à $a^3 = a$ ce qui donne $a \in \{-1, 0, 1\}$.
Les polynômes solutions correspondant sont alors $X^2, (X - 1)^2$ et $(X + 1)^2$, tous réels.
Si $a \neq b$ alors $(X - a)(X - b)$ divise $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si, a et et b sont racines de $(X^3 - a)(X^3 - b)$.
Si $a^3 \neq b^3$ alors a et b sont racines $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si, $\begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = b \end{cases}$
ou $\begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases}$.
Dans le premier cas, sachant $a \neq b$, on parvient aux polynômes
$X(X - 1), X(X + 1)$ et $(X - 1)(X + 1)$.
Puisque $\begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a^9 = a \end{cases}$, dans le second cas, on parvient à
$(X - \mathrm{e}^{i\pi/4})(X - \mathrm{e}^{3i\pi/4})$, $X^2 + 1$ et $(X - \mathrm{e}^{-i\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-3i\pi/4})$.
Ainsi quand $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, on parvient à 6 polynômes dont 4 réels.
Enfin, si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ alors $(X - a)(X - b)$ divise $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si, $a^3 = a$ ou $a^3 = b$. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a^3 = a$ et on parvient alors aux polynômes $(X - 1)(X - j)$, $(X - 1)(X - j^2)$,
$(X + 1)(X + j)$ et $(X + 1)(X + j^2)$ selon que $a = 1$ ou $a = -1$ (le cas $a = 0$ étant à exclure car entraînant $b = a$).
Au final on obtient $3 + 6 + 4 = 13$ polynômes solutions dont $3 + 4 + 0 = 7$ réels.

Exercice 41 : [énoncé]
a) $P(p/q) = 0$ donne

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Puisque $p \mid a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1}$, on a $p \mid a_0 q^n$ or $p \wedge q = 1$ donc $p \mid a_0$. De même $q \mid a_n$.

b) Si P admet un racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ alors $p \in \{-5, -1, 1, 5\}$ et $q \in \{1, 2\}$.
$-\frac{5}{2}$ est racine de P.

$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5 = (2X + 5)(X^2 - 3X + 1) = (2X + 5)\left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

c) Si P est composé dans $\mathbb{Q}[X]$ alors P possède une racine rationnelle, or ce n'est pas le cas.
Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 42 : [énoncé]
$P(a) = P(b) = P(c) = 1$ et a, b, c deux à deux distincts donc

$$(X - a)(X - b)(X - c) \mid P - 1$$

De plus $\deg P \leqslant 3$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$P = \lambda(X - a)(X - b)(X - c) + 1$$

Puisque $P(0) = 0$, on a $\lambda = \frac{1}{abc}$.

Exercice 43 : [énoncé]
a) $\sin((2n + 1)\alpha) = \text{Im}\left(\mathrm{e}^{i(2n+1)\alpha}\right) = \text{Im}\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n+1}\right)$ donne en développant $\sin((2n + 1)\alpha) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n + 1}{2p + 1} \cos^{2(n-p)}\alpha . \sin^{2p+1}\alpha$.
b) On observe $\sin((2n + 1)\alpha) = \sin^{2n+1}\alpha P(\cot^2\alpha)$.
Posons $\beta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Les $x_k = \cot^2\beta_k$ sont n racines distinctes de P, or $\deg P = n$, ce sont donc exactement les racines de P.

Exercice 44 : [énoncé]
a) On a

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

donc

$$4a^3 - 3a = \cos(\pi/3) = 1/2$$

Ainsi a est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$.
b) Soit x une racine rationnelle de ce polynôme. On peut écrire $x = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. On a alors

$$8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$$

On en déduit $p \mid 8p^3 - 6pq^2 = q^3$. Or p et q sont premiers entre eux et donc par le théorème de Gauss $p = \pm 1$. De plus $q^2 \mid 6pq^2 + q^3 = 8p^3$ et, par un argument analogue au précédent, $q^2 \mid 8$. Ainsi $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$.
Or $1, -1, 1/2$ et $-1/2$ ne sont pas les valeurs de $\cos(\pi/9)$. On peut donc conclure que a est irrationnel.

Exercice 45 : [énoncé]
Soient $P = A - B$ et $n = \max(\deg A, \deg B) \in \mathbb{N}^\star$ de sorte que $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
Les solutions des équations $A(z) = 0$ et $A(z) = 1$ sont racines de P.
Soit p est le nombre de racines distinctes de l'équation $A(z) = 0$.
Puisque la somme des multiplicité des racines de A vaut n, ces racines sont susceptibles d'être racines de l'équation $A'(z) = 0$ avec une somme de multiplicités égale à $n - p$ (en convenant qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine. . .)
Si q est le nombre de racines distinctes de l'équation $A(z) = 1$ alors de même celles-ci sont racines de l'équation $A'(z) = 0$ et la somme de leurs multiplicités vaut $n - q$.
Or ces dernières se distinguent des précédentes et puisque $\deg A' = n - 1$, on peut affirmer $n - p + n - q \leqslant n - 1$ ce qui donne $p + q \geqslant n + 1$.
Le polynôme P possède donc au moins $n + 1$ racines donc $P = 0$ puis $A = B$.

Exercice 46 : [énoncé]
a) Posons

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

On a $\deg P \leqslant n - 1$ et

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ P(a_k) = 1$$

Le polynôme $P - 1$ possède donc n racines et étant de degré strictement inférieur à n, c'est le polynôme nul. On conclut $P = 1$.
b) On a

$$A'(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (X - a_j)$$

donc

$$A'(a_i) = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j)$$

La quantité

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$$

apparaît alors comme le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme P.
On conclut que pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)} = 0$$

Exercice 47 : [énoncé]
Les racines de $X^p - 1$ sont simples et toutes racines de $X^{pq} - 1$.
Les racines de $X^q - 1$ sont simples et toutes racines de $X^{pq} - 1$.
En dehors de 1, les racines de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ sont distinctes.
Comme 1 racine double de $(X - 1)(X^{pq} - 1)$, on peut conclure
$(X^p - 1)(X^q - 1) \ \mid\ (X - 1)(X^{pq} - 1)$.

Exercice 48 : [énoncé]
a) Posons $P = (X + 1)^n - nX - 1$. On a $P(0) = 0$ et $P' = n(X + 1)^{n-1} - n$ donc $P'(0) = 0$.
0 est au moins racine double de P donc $X^2 \mid P$.
b) Posons $P = nX^{n+2} - (n + 2).X^{n+1} + (n + 2)X - n$. On observe $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$.
1 est au moins racine triple de P donc $(X - 1)^3 \mid P$.

Exercice 49 : [énoncé]
1 est au moins racine double de $P - 1$ donc 1 est au moins racine simple de $(P - 1)' = P'$.
De même -1 est au moins racine simple de P'. Par suite $X^2 - 1 \mid P'$.
Puisque $\deg P' \leqslant 2$, on peut écrire $P' = \lambda(X^2 - 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par suite $P = \frac{\lambda}{3}X^3 - \lambda X + \mu$. $P(1) = 1$ et $P(-1) = -1$ permettent de déterminer λ et μ.
On obtient : $\lambda = -\frac{3}{2}$ et $\mu = 0$.

Exercice 50 : [énoncé]
$1 + X + X^2 = (X - j)(X - j^2)$.
j et j^2 sont racines de $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$ donc
$1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$.

Exercice 51 : [énoncé]
On peut factoriser
$$X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$$
On en déduit
$$X^2+X+1 \mid X^{2n}+X^n+1 \Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } X^{2n}+X^n+1$$
Puisque $X^{2n}+X^n+1$ est un polynôme réel j en est racine si, et seulement si, j^2 l'est.
$$(X^{2n}+X^n+1)(j)=j^{2n}+j^n+1=\begin{cases} 3 \text{ si } n=0 \quad [3] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
Finalement
$$X^2+X+1 \mid X^{2n}+X^n+1 \Leftrightarrow n \neq 0 \quad [3]$$

Exercice 52 : [énoncé]
Soit P solution. $X \mid (X+4)P(X)$ donc $X \mid P$ puis $(X+1) \mid P(X+1)$ donc $(X+1) \mid (X+4)P(X)$ puis $X+1 \mid P$ etc...
Ainsi on obtient que $P(X)=X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X)$ avec $Q(X+1)=Q(X)$ donc Q constant.
La réciproque est immédiate.

Exercice 53 : [énoncé]
Dans un premier temps cherchons P vérifiant $P(0)=1$, $P(1)=2$,$P'(0)=3$, $P'(1)=4$,$P''(0)=5$ et $P''(1)=6$ puis on considèrera $P(X-1)$ au terme des calculs.
Un polynôme vérifiant $P(0)=1$ et $P(1)=2$ est de la forme
$$P(X)=X+1+X(X-1)Q(X)$$
Pour que le polynôme P vérifie $P'(0)=3$,$P'(1)=4$,$P''(0)=5$ et $P''(1)=6$ on veut que Q vérifie $Q(0)=-2$, $Q(1)=3$, $Q'(0)=-9/2$ et $Q'(1)=0$.
Le polynôme $Q(X)=5X-2+X(X-1)R(X)$ vérifie les deux premières conditions et vérifie les deux suivantes si $R(0)=19/2$ et $R(1)=-5$.
Le polynôme $R=-\frac{29}{2}X+\frac{19}{2}$ convient.
Finalement
$$P(X)=X+1+X(X-1)\left(5X-2+X(X-1)\left(-\frac{29}{2}X+\frac{19}{2}\right)\right)$$
est solution du problème transformé et
$$P(X)=-\frac{29}{2}X^5+111X^4-\frac{655}{2}X^3+464X^2-314X+82$$
est solution du problème initial.
Les autres solutions s'en déduisent en observant que la différence de deux solutions possède 1 et 2 comme racine triple.
Finalement, la solution générale est
$$-\frac{29}{2}X^5+111X^4-\frac{655}{2}X^3+464X^2-314X+82+(X-1)^3(X-2)^3Q(X)$$
avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 54 : [énoncé]
a) Puisque les racines communes à P et P' permettent de dénombrer les multiplicités des racines de P, on a
$$p=\deg P-\deg(\text{pgcd}(P,P'))$$
et des relations analogues pour q et r.
De plus, on a
$$P'Q-Q'P=Q'R-R'Q=R'P-P'R$$
et ce polynôme est non nul car les polynômes P,Q,R sont non constants. En effet, si $P'Q-Q'P=0$, alors une racine de P est nécessairement racine de Q ce qui est exclu.
Puisque les polynôme $\text{pgcd}(P,P')$, $\text{pgcd}(Q,Q')$ et $\text{pgcd}(R,R')$ divisent chacun le polynôme $Q'R-R'Q$ et puisqu'ils sont deux à deux premiers entre eux (car P,Q,R le sont), on a
$$\text{pgcd}(P,P')\text{pgcd}(Q,Q')\text{pgcd}(R,R') \mid Q'R-R'Q$$
Par considérations des degrés
$$\deg P-p+\deg Q-q+\deg R-r \leqslant \deg Q+\deg R-1$$
et donc
$$\deg P \leqslant p+q+r-1$$
b) Soient $n \geqslant 3$ et P,Q,R vérifiant
$$P^n+Q^n=R^n$$

Si a est racine commune aux polynômes P et Q alors a est racine de R. En suivant ce raisonnement et en simplifiant les racines communes, on peut se ramener à une situation où les polynômes P, Q, R sont deux à deux premiers entre eux. Il en est alors de même de P^n, Q^n et R^n. L'étude qui précède donne alors

$$n \deg P < p + q + r$$

mais aussi, de façon analogue

$$n \deg Q < p + q + r \text{ et } n \deg R < p + q + r$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$n(\deg P + \deg Q + \deg R) < 3(p + q + r)$$

ce qui est absurde car $n \geqslant 3$, $\deg P \geqslant p$ etc.
On en déduit que les polynômes P, Q, R sont constants.
Les solutions de l'équation

$$P^n + Q^n = R^n$$

apparaissent alors comme des triplets

$$P = \alpha T,\ Q = \beta T \text{ et } R = \gamma T$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $T \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$$

c) Pour

$$P = \frac{1}{2}(X^2 + 1),\ Q = \frac{i}{2}(X^2 - 1) \text{ et } R = X$$

on a

$$P^2 + Q^2 = R^2$$

ce qui produit un triplet solution d'une forme différente des précédents obtenus pour $n \geqslant 3$.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Si $P(a) = 0$ alors $P(a^2) = -P(a)P(a + 1) = 0$ donc a^2 est racine de P.
b) Si $a \neq 0$ et a non racine de l'unité alors la suite des a^{2^n} est une suite de complexe deux à deux distincts, or tous les termes de cette suite sont racines de P or $P \neq 0$ donc ce polynôme ne peut avoir une infinité de racines. Absurde.

Exercice 56 : [énoncé]
Si a est racine de P alors $a^2, a^4, \ldots$ le sont aussi. Comme un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines, on peut affirmer que les $a, a^2, a^4, \ldots$ sont redondants ce qui implique $a = 0$ ou $|a| = 1$.
Si a est racine de P alors $(a - 1)^2$ l'est aussi donc $a - 1 = 0$ ou $|a - 1| = 1$.
Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a nécessairement $|a| = |a - 1| = 1$. Via parties réelle et imaginaire, on obtient $a = -j$ ou $-j^2$.
Si P est solution, non nulle, alors son coefficient dominant vaut 1 et on peut écrire :
$P = X^\alpha (X - 1)^\beta (X^2 - X + 1)^\gamma$. En injectant une telle expression dans l'équation, on observe que celle-ci est solution si, et seulement si, $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$.

Exercice 57 : [énoncé]
Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.
Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis $a^4, a^8, \ldots$.
Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} $(n \in \mathbb{N})$ sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.
De plus, si a est racine de P alors $(a - 1)$ est aussi racine de $P(X + 1)$ donc $(a - 1)^2$ est racine de P. On en déduit que $a - 1 = 0$ ou $a - 1$ est racine de l'unité.
Si $a \neq 0, 1$ alors $|a| = |a - 1| = 1$ d'où l'on tire $a = -j$ ou $-j^2$.
Au final, les racines possibles de P sont $0, 1, -j$ et $-j^2$.
Le polynôme P s'écrit donc

$$P(X) = \lambda X^\alpha (X - 1)^\beta (X + j)^\gamma (X + j^2)^\delta$$

avec $\lambda \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.
En injectant cette expression dans l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

on obtient

$$\lambda^2 = \lambda,\ \alpha = \beta \text{ et } \gamma = \delta = 0$$

On conclut

$$P(X) = [X(X - 1)]^\alpha$$

Exercice 58 : [énoncé]
a) Si a est une racine de P non nulle alors $a^2, a^4, \ldots$ sont racines de P. Or $P \neq 0$ donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La série précédente est donc redondante et par suite a est une racine de l'unité et donc $|a| = 1$.

Si $a = 0$ est racine de P alors $1 = (0+1)^2$ aussi puis $4 = (1+1)^2$ l'est encore,... et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu.
Finalement les racines de P sont toutes de module 1.
b) Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. $a+1$ est racine de $P(X-1)$ donc $(a+1)^2$ est aussi racine de P. Il s'ensuit que $|a| = |a+1| = 1$. En résolvant cette double équation on obtient $a = j$ ou j^2 et donc P est de la forme

$$P(X) = \lambda(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$$

Le nombre j est racine de multiplicité α de P donc j est racine de multiplicité au moins α de

$$P(X^2) = (X^2-j)^\alpha(X^2-j^2)^\beta$$

et par suite $\beta \geqslant \alpha$. Un raisonnement symétrique permet de conclure $\beta = \alpha$ et le polynôme$P$ est de la forme

$$\lambda(X^2+X+1)^\alpha$$

Un tel P est solution du problème posé si, et seulement si,

$$\lambda^2(X^4+X^2+1)^\alpha = \lambda((X-1)^2+(X-1)+1)^\alpha(X^2+X+1)^\alpha$$

égalité qui est vérifiée si, et seulement si, $\lambda = 1$.
Finalement les solutions du problème posé sont les polynômes $P = (X^2+X+1)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 59 : [énoncé]
Supposons P solution.
Le coefficient dominant λ de P vérifie $\lambda = \lambda^2$ et donc est égal à 1.
Si a est racine de P alors a^2 et $(a+1)^2$ le sont aussi.
Si $a \neq 0$ est une racine de P alors $a^2, a^4, \dots$ sont racines de P. Or $P \neq 0$ et donc P n'admet qu'un nombre fini de racines. La suite précédente est donc redondante et par conséquent a est une racine de l'unité. En particulier $|a| = 1$.
Si $a = 0$ est racine de P alors $1 = (0+1)^2$ aussi puis $4 = (1+1)^2$ l'est encore,... et finalement P admet une infinité de racines ce qui est exclu.
Finalement les racines de P sont toutes de module 1.
Or si a est racine de P, $(a+1)^2$ l'étant encore et donc

$$|a| = |a+1| = 1$$

Les seuls complexes vérifiant cette identité sont j et j^2 (ce sont les points intersection du cercle unité et du cercle de centre -1 et de rayon 1 du plan complexe). On en déduit

$$P = (X^2+X+1)^n$$

car P est un polynôme réel et que donc ses racines complexes conjuguées sont d'égales multiplicités.
Inversement, on vérifie par le calcul qu'un tel polynôme est bien solution.

Exercice 60 : [énoncé]
Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.
Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis $a^4, a^8, \dots$.
Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} $(n \in \mathbb{N})$ sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.
De plus, si a est racine de P alors $(a+1)$ est aussi racine de $P(X-1)$ donc $(a+1)^2$ est racine de P. On en déduit que $a+1 = 0$ ou $a+1$ est racine de l'unité.
Si $a \neq 0, -1$ alors $|a| = |a+1| = 1$ d'où l'on tire $a = j$ ou j^2.
Au final, les racines possibles de P sont $0, -1, j$ et j^2.
Le polynôme P s'écrit donc $P(X) = \lambda X^\alpha(X+1)^\beta(X-j)^\gamma(X-j^2)^\delta$ avec $\lambda \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.
En injectant cette expression dans l'équation $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ on obtient $\lambda^2 = \lambda$, $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = \delta$.
On conclut

$$P(X) = \left[X^2+X+1\right]^\gamma$$

Exercice 61 : [énoncé]
a) Dans $\mathbb{C}[X]$

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$$

et dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$$

b) Dans $\mathbb{C}[X]$

$$X^5 - 1 = \prod_{k=0}^{4}(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}})$$

et dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^5 - 1 = (X-1)(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1)(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1)$$

c) Dans $\mathbb{C}[X]$

$$(X^2-X+1)^2+1 = (X^2-X+1+i)(X^2-X+1-i) = (X-i)(X-1+i)(X+i)(X-1-i)$$

et dans $\mathbb{R}[X]$

$$(X^2-X+1)^2+1 = (X^2+1)(X^2-2X+2)$$

Exercice 62 : [énoncé]
a) $X^4+X^2+1=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$
b)
$X^4+X^2-6=(X^2+1/2)^2-25/4=(X^2-2)(X^2+3)=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+3)$
c) $X^8+X^4+1=(X^4+1)^2-(X^2)^2=(X^4-X^2+1)(X^4+X^2+1)$ puis
$X^8+X^4+1==(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$.

Exercice 63 : [énoncé]
Les racines de $(X+i)^n-(X-i)^n$ sont les $z_k=\cot\frac{k\pi}{n}$ avec $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$.
Par suite

$$\prod_{k=1}^{n-1}(X-\cot\frac{k\pi}{n})\mid(X+i)^n-(X-i)^n$$

et il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que

$$(X+i)^n-(X-i)^n=\lambda\prod_{k=1}^{n-1}(X-\cot\frac{k\pi}{n})$$

Le coefficient dominant de $(X+i)^n-(X-i)^n$ étant $2ni$, on obtient

$$(X+i)^n-(X-i)^n=2ni\prod_{k=1}^{n-1}(X-\cot\frac{k\pi}{n})$$

Exercice 64 : [énoncé]
Les racines complexes de P sont les $\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ avec $k\in\{0,\dots,2n\}$.
On observe $\overline{\omega_k}=\omega_{2n-k}$ pour $k\in\{1,\dots,n\}$ donc

$$P=(X-1)\prod_{k=1}^{n}(X-\omega_k)(X-\overline{\omega_k})=(X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}X+1\right)$$

Exercice 65 : [énoncé]
Les racines de $X^2-2\cos(na)X+1$ sont e^{ina} et e^{-ina} donc

$$X^{2n}-2\cos(na)X^n+1=(X^n-\mathrm{e}^{ina})(X^n-\mathrm{e}^{-ina})$$

Les racines de $X^n-\mathrm{e}^{ina}$ sont les $\mathrm{e}^{ia+2ik\pi/n}$ avec $k\in\{0,\dots,n-1\}$ et celles de $X^n-\mathrm{e}^{-ia}$ s'en déduisent par conjugaison.
Ainsi

$$X^{2n}-2\cos(na)X^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{ia+2ik\pi/n})\prod_{k=0}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{-ia-i2k\pi/n})$$

dans $\mathbb{C}[X]$ puis

$$X^{2n}-2\cos(na)X^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{ia+2ik\pi/n})(X-\mathrm{e}^{-ia-2ik\pi/n})=\prod_{k=0}^{n-1}(X^2-2\cos\left(a+\frac{2k}{n}\right.$$

dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 66 : [énoncé]
Notons x_1,x_2,x_3,x_4 les racines du polynôme considéré avec $x_1+x_2=2$.

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0\\ \sigma_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-12\\ \sigma_4=x_1x_2x_3x_4=-5\end{cases}$$

σ_1 donne $x_3+x_4=-2$, σ_2 donne $x_1x_2+x_3x_4=4$ et σ_3 donne $x_1x_2-x_3x_4=6$.
On obtient $x_1x_2=5$ et $x_3x_4=-1$.
x_1 et x_2 sont les racines de X^2-2X+5 i.e. $1\pm 2i$.
x_3 et x_4 sont les racines de X^2+2X-1 i.e. $-1\pm\sqrt{2}$.

Exercice 67 : [énoncé]
Notons x_1,x_2,x_3 les racines de $X^3-7X+\lambda$. On peut supposer $x_2=2x_1$.
Les relations entre coefficients et racines donnent :

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-7\\ x_1x_2x_3=-\lambda\end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases}x_3=-3x_1\\ 2x_1^2-6x_1^2-3x_1^2=-7\\ -6x_1^3=-\lambda\end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 \\ x_1^2 = 1 \\ \lambda = 6x_1^3 \end{cases}$$

Pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine double d'une autre il est nécessaire que $\lambda = 6$ ou -6.
Pour $\lambda = 6$, $X^3 - 7X + 6$ admet $1, 2$ et -3 pour racines.
Pour $\lambda = -6$, $X^3 - 7X - 6$ admet $-1, -2$ et 3 pour racines.

Exercice 68 : [énoncé]
Notons x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. On peut supposer $x_1 + x_2 = x_3$.
Les relations entre coefficients et racines donnent :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 23 \\ x_1x_2x_3 = 28 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_1x_2 + 4(x_2 + x_1) = 23 \\ 4x_1x_2 = 28 \end{cases}.$$
Pour déterminer x_1 et x_2 il reste à résoudre $x^2 - 4x + 7 = 0$.
Finalement $x_1 = 2 + i\sqrt{3}, x_2 = 2 - i\sqrt{3}$ et $x_3 = 4$.

Exercice 69 : [énoncé]
a) $\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \sqrt{2} \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2\sqrt{2} + 2 \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 2\sqrt{2} \end{cases},$
On en déduit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2$, $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1 = 4$ et $x_1^2x_2^2x_3^2 = 8$.
Donc x_1^2, x_2^2 et x_3^2 sont racines de $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.
b) 2 est racine de l'équation ci-dessus :
$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$.
Quitte à réindexer : $x_1^2 = 2, x_2^2 = 2i$ et $x_3^2 = -2i$ d'où $x_1 = \pm\sqrt{2}, x_2 = \pm(1 + i)$ et $x_3 = \pm(1 - i)$.
Puisque $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \sqrt{2}$, on a $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 1 + i$ et $x_3 = 1 - i$.

Exercice 70 : [énoncé]
a) Soit (x, y, z) un triplet solution
On a $\sigma_1 = x + y + z = 1, \sigma_3 = xyz = -4$ et

$$\sigma_2 = xy + yz + zx = xyz(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = -4$$

Par suite x, y, z sont les racines de :

$$X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X - 1)(X - 2)(X + 2)$$

Donc $\{x, y, z\} = \{1, -2, 2\}$.
Inversement de tels triplets sont solutions.
b) Soit (x, y, z) un triplet solution de

$$\begin{cases} x(y + z) = 1 & (1) \\ y(z + x) = 1 & (2) \\ z(x + y) = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1) - (2)$ donne $xz = yz$, (3) donne $z \neq 0$ donc $x = y$.
De même on obtient $x = z$.
Ainsi $x = y = z = 1/\sqrt{2}$ ou $-1/\sqrt{2}$.
Inversement de tels triplets sont solutions.
c) Soit (x, y, z) un triplet solution.
Posons $S_1 = x + y + z = 2, S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 14$ et $S_3 = x^3 + y^3 + z^3$.
Déterminons $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx$ et $\sigma_3 = xyz$.
On a $\sigma_1 = 2$.
$S_1^2 - S_2 = 2\sigma_2$. Par suite $\sigma_2 = -5$.
Posons $t = x^2y + yx^2 + y^2z + zy^2 + z^2x + xz^2$.
On a $S_1S_2 = S_3 + t$ d'où $t = S_1S_2 - S_3 = 8$
On a $S_1^3 = S_3 + 3t + 6\sigma_3$ d'où $\sigma_3 = \frac{1}{6}(S_1^3 - S_3 - 3t) = -6$.
Par suite x, y, z sont les racines de

$$X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X - 1)(X + 2)(X - 3)$$

Donc $\{x, y, z\} = \{1, -2, 3\}$.
Inversement de tels triplets sont solutions.

Exercice 71 : [énoncé]
En développant

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx}$$

avec

$$\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} = \frac{2(z + x + y)}{2xyz} = 0$$

Exercice 72 : [énoncé]

a) On a

$$(X-1)P_n = X^{n+1} - 1 = \prod_{k=0}^{n} (X - \mathrm{e}^{2ik\pi/(n+1)})$$

donc

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (X - \mathrm{e}^{2ik\pi/(n+1)})$$

b) $P_n(1) = n+1$ et

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathrm{e}^{2ik\pi/(n+1)}) = (-2i)^n \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n+1}}$$

mais

$$\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n+1}} = \exp(in\pi/2) = i^n$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}$$

Exercice 73 : [énoncé]

$$(1+z)^n = \cos(2na) + i\sin(2na) = \mathrm{e}^{2ina} \Leftrightarrow 1+z = \mathrm{e}^{i\frac{2na+2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

Cette équation possède donc n solutions distinctes qui sont

$$z_k = \mathrm{e}^{i\left(2a+\frac{2k\pi}{n}\right)} - 1 \text{ avec } k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

On observe alors

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n(1 - \mathrm{e}^{2ina})$$

Or

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{i2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} - 1) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} 2i\sin(a+\frac{k\pi}{n}) = 2^n i^n \mathrm{e}^{ina+i\frac{(n-1)\pi}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(a+\frac{k\pi}{n})$$

donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 2^n i^{-1}(-1)^n \mathrm{e}^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(a+\frac{k\pi}{n})$$

puis

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a+\frac{k\pi}{n}) = \frac{i}{2^n}\frac{1-\mathrm{e}^{2ina}}{\mathrm{e}^{ina}} = \frac{1}{2^{n-1}}\sin na$$

Exercice 74 : [énoncé]

On écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0$$

Notons α_k la somme des zéros de $P^{(k)}$. Par les relations coefficients racines d'un polynôme scindé

$$\alpha_0 = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \alpha_1 = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n},\ \alpha_2 = -\frac{(n-2)a_{n-1}}{na_n},..$$

$$\alpha_k = -\frac{(n-k)a_{n-1}}{na_n},...,\ \alpha_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

Les $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont donc en progression arithmétique de raison a_{n-1}/na_n.

Exercice 75 : [énoncé]

Puisque $\alpha+\beta+\gamma = -a$, on a

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = -\left(\frac{\alpha}{a+\alpha} + \frac{\beta}{a+\beta} + \frac{\gamma}{a+\gamma}\right)$$

et réduisant au même dénominateur

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{a^3 - 2ab + 3c}{ab - c}$$

car $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$ et $\alpha\beta\gamma = -c$.

Exercice 76 : [énoncé]

Posons $p = xy + yz + zx$ et $q = -xyz$.

Les nombres x, y, z sont racines du polynômes

$$X^3 + pX + q$$

On en déduit

$$x^3 + y^3 + z^3 = -p(x+y+z) - 3q = -3q$$

De plus

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2p$$

donc

$$x^2+y^2+z^2 = -2p$$

Aussi $x^3 = -px-q$ donne $x^5 = -px^3 - qx^2 = p^2x + pq - qx^2$ et donc

$$x^5+y^5+z^5 = 3pq+2pq = 5pq$$

et la relation proposée est dès lors immediate.

Exercice 77 : [énoncé]
Soit (x,y,z) un triplet de complexes et
$P(X) = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - pX^2 + qX - r$ avec

$$\begin{cases} p = x+y+z \\ q = xy+yz+zx \\ r = xyz \end{cases}$$

On a

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

Posons $t = x^3+y^3+z^3$ et $s = xy^2+yx^2+yz^2+zy^2+zx^2+xz^2$
On a

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = t+s \text{ et } pq = s+3r$$

donc $t = 3r - pq$.
Puisque x,y,z sont racines de $XP(X) = X^4 - pX^3 + qX^2 - rX$, on a

$$x^4+y^4+z^4 = pt - q\times(x^2+y^2+z^2) + rp$$

Puisque x,y,z sont racine de $X^2P(X) = X^5 - pX^4 + qX^3 - rX^2$, on a

$$x^5+y^5+z^5 = p(x^4+y^4+z^4) - q(x^3+y^3+z^3) + r(x^2+y^2+z^2)$$

On en déduit que (x,y,z) est solution du système posé si, et seulement si,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ pt+rp = 0 \\ -qt = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, sachant $t = 3r - pq$,

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ p(4r-pq) = 0 \\ q(3r-pq) = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ 3qr = pq^2 \end{cases}$$

et aussi à

$$\begin{cases} p^2 = 2q \\ 2pr = q^2 \\ qr = 0 \end{cases}$$

Que r soit nul ou non, le système entraîne $q = 0$ et est donc équivalent au système

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

Ainsi, un triplet (x,y,z) est solution du système proposé si, et seulement si, x, y et z sont les trois racines du polynôme $P_r(X) = X^3 - r$ (pour $r \in \mathbb{C}$ quelconque).
En introduisant $a \in \mathbb{C}$ tel que $a^3 = r$, les racines de $P_r(X)$ sont a, aj et aj^2.
Finalement les solutions du système, sont les triplets (x,y,z) avec

$$x = a,\ y = aj \text{ et } z = aj^2$$

pour $a \in \mathbb{C}$ quelconque.

Exercice 78 : [énoncé]
On a

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$$

donc

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}}$$

Par développement limité à un ordre N, on a quand $x \to +\infty$

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}} = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{S_\ell}{x^\ell} + o\left(\frac{1}{x^N}\right)$$

puis

$$xP'(x) = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{S_\ell}{x^\ell} P(x) + o\left(\frac{1}{x^{N-n}}\right)$$

Or

$$xP'(x) = na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$$

et

$$\sum_{\ell=0}^{N} \frac{S_\ell}{x^\ell} P(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{N+2n}x^{N-n}$$

avec

$$b_0 = a_0S_0,\ b_1 = a_0S_1 + a_1S_0, \ldots$$

$$b_k = \sum_{\ell=0}^{\min(k,n)} a_\ell S_{k-\ell}$$

Par unicité des coefficients de $x^n, x^{n-1}, \ldots, 1$ de notre développement limité généralisé, on obtient

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n, \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell S_{k-\ell} = (n-k)a_k$$

Pour $k = 0$, on obtient $S_0 = n$ (ce qui était immédiat) et on en déduit

$$\forall 0 < k \leqslant n, \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell S_{k-\ell} + ka_k = 0$$

Par unicité des coefficients de $1/x, 1/x^2, \ldots$ de notre développement limité généralisé, on obtient

$$\forall k > n,\ \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell S_{k-\ell} = 0$$

Exercice 79 : [énoncé]
a) $1, j, j^2$ conviennent.
b) Introduisons le polynôme $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$. Les coefficients de ce polynôme s'expriment à partir de $S_1 = a+b+c$, $S_2 = a^2+b^2+c^2$ et $S_3 = a^3+b^3+c^3$, le polynôme P est donc à coefficients réels. S'il n'admet pas trois racines, il possède deux racines complexes conjuguées. Celles-ci sont alors de même module ce qui est exclu.

Exercice 80 : [énoncé]
a) $f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x, f_2 : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $f_3 : x \mapsto 4x^3 - 3x$
b) $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos n\theta = 2xf_n(x)$ en posant $\theta = \arccos x$.
c) Existence : Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ conviennent.
Supposons le résultat établi aux rangs $n-1$ et $n \geqslant 1$.
Soit T_{n+1} le polynôme défini par $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.
On a $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = f_{n+1}(x)$.
Le polynôme T_{n+1} convient. Récurrence établie.
Unicité : Si T_n et R_n conviennent, alors ceux-ci prennent mêmes valeurs en un infinité de points, ils sont donc égaux.
d) Comme $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, on montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg T_n = n$.
Il est alors aisé de montrer, par récurrence simple, que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Notons que le coefficient dominant de T_0 est 1.
e) Résolvons l'équation $T_n(x) = 0$ sur $[-1, 1]$:
$\cos(n\arccos x) = 0 \Leftrightarrow n\arccos x = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2n} \quad \left[\frac{\pi}{n}\right]$
Posons $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ définis par $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ forment n racines distinctes appartenant à $]-1, 1[$ du polynôme T_n.
Or $\deg T_n = n$ donc il ne peut y avoir d'autres racines et celles-ci sont nécessairement simples.

Exercice 81 : [énoncé]
a) $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ sont racines de L_i donc $\forall j \neq i, L_i(a_j) = 0$.
De plus

$$L_i(a_i) = \frac{\prod\limits_{0\leqslant j\leqslant n, j\neq i}(a_i - a_j)}{\prod\limits_{0\leqslant j\leqslant n, j\neq i}(a_i - a_j)} = 1$$

Donc

$$\forall j \in \{0, 1, ..., n\},\ L_i(a_j) = \delta_{i,j}$$

b) Posons $Q = \sum\limits_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(X)$, on a

$$Q(a_j) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(a_j) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\delta_{i,j} = P(a_j)$$

P et Q sont deux polynômes de degré inférieur à n et prenant mêmes valeurs aux $n+1$ points $a_0, a_1, ..., a_n$ ils sont donc égaux.

Exercice 82 : [énoncé]
a) L_n est le polynôme dérivé d'ordre n d'un polynôme de degré $2n$ donc
$\deg L_n = n$.
De plus sont coefficient dominant est le même que celui de $\frac{n!}{(2n)!}(X^{2n})^{(n)}$ à savoir 1.
b) 1 et -1 sont racines d'ordre n de $(X^2-1)^n$. Par intégration par parties :

$$\frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^{(n)}Q(t)\,\mathrm{d}t = \left[(t^2-1)^{(n-1)}Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)^{(n-1)}Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)^{(n-1)}Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

puis en reprenant le processus

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_{-1}^{1}(t^2-1)^{(0)}Q^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

c) Soit $a_1, a_2, \dots, a_p$ les racines d'ordres impairs de L_n appartenant à $]-1,1[$.
Soit $Q = (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_p)$. La fonction $t \mapsto L_n(t)Q(t)$ est continue, de signe constant sur $[-1,1]$ sans être la fonction nulle donc $\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.
Compte tenu de b) on a nécessairement $p \geqslant n$ puis $p = n$ car le nombre de racines ne peut excéder n.. De plus les racines $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont simples car la somme de leurs multiplicités ne peut excéder n.

Exercice 83 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$
Pour $n = 0$: ok avec $P_2 = X$.
Supposons la propriété établie au rang $n-1 \in \mathbb{N}$.

$$1 + P_{n+2}P_n = 1 + XP_{n+1}P_n - P_n^2 = 1 + X(XP_n - P_{n-1})P_n - P_n^2$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$1 + P_{n+2}P_n = X^2P_n^2 - XP_{n-1}P_n - P_{n-1}P_{n+1}$$

donc

$$1 + P_{n+2}P_n = X^2P_n^2 - XP_{n-1}P_n - P_{n-1}(XP_n - P_{n-1}) = X^2P_n^2 - 2XP_{n-1}P_n + P_{n-1}^2 = P_{n+1}^2$$

Récurrence établie.
b) La relation ci-dessus peut se relire : $UP_n + VP_{n+1} = 1$. Donc P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
c) Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, établissons la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m$$

Pour $m = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $m \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$P_{m+n+1} = P_{n+1}P_{m+1} - P_nP_m = (XP_n - P_{n-1})P_{m+1} - P_nP_m = (XP_{m+1} - P_m)P_n - P_{n-1}P_{m+n}$$

donc

$$P_{m+n+1} = P_{m+2}P_n - P_{n-1}P_{m+1}$$

Récurrence établie.
d) Posons $D = \mathrm{pgcd}(P_n, P_{n+m})$ et $E = \mathrm{pgcd}(P_n, P_m)$.
Comme $P_{n+m} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m$ on a $E \mid D$.
Comme $P_{n-1}P_m = P_nP_{m+1} - P_{m+n}$ et $P_n \wedge P_{n-1} = 1$ on a $D \mid E$. Finalement $D = E$.
En notant r le reste de la division euclidienne de m par n on a $m = nq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et

$$\mathrm{pgcd}(P_n, P_m) = \mathrm{pgcd}(P_n, P_{n-m}) = \mathrm{pgcd}(P_n, P_{n-2m}) = \ldots = \mathrm{pgcd}(P_n, P_r)$$

e) En suivant l'algorithme d'Euclide menant le calcul de $\mathrm{pgcd}(m,n)$ simultanément avec celui menant le calcul de $\mathrm{pgcd}(P_m, P_n)$, on observe que

$$\mathrm{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$$

Exercice 84 : [énoncé]
Par la formule de dérivation de Leibniz

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(n-k)}(\mathrm{e}^{-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{k!}x^k\mathrm{e}^{-x}$$

donc

$$L_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!}X^k$$

est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

Exercice 85 : [énoncé]
On a

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{in\theta}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta\sin^k\theta\right)$$

donc

$$\cos n\theta = \sum_{\ell=0}^{E(n/2)}(-1)^\ell\binom{n}{2\ell}\cos^{n-2\ell}\theta(1-\cos^2\theta)^\ell$$

est un polynôme en $\cos\theta$. Cela assure l'existence de T_n, l'unicité provenant de ce que deux polynômes coïncidant en un nombre infini de points sont nécessairement égaux.
a)

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

donne

$$T_{n+1}-2XT_n+T_{n-1}=0$$

b) On a

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

donc en dérivant

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta$$

et

$$\sin^2\theta T_n''(\cos\theta)-\cos\theta T_n'(\cos\theta) = -n^2\cos n\theta$$

On en déduit par coïncidence de polynômes sur $[-1,1]$ que

$$(1-X^2)T_n''-XT_n'+n^2T_n=0$$

c) En dérivant cette relation à l'ordre k :

$$(1-X^2)T_n^{(k+2)}-2kXT_n^{(k+1)}-k(k-1)T_n^{(k)}-XT_n^{(k+1)}-kT_n^{(k)}+n^2T_n^{(k)}=0 \quad (1)$$

En évaluant (1) en 1 :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(1) = (n^2-k^2)T_n^{(k)}(1)$$

Comme $T_n^{(0)}(1)=1$, on obtient

$$T_n^{(k)}(1) = \begin{cases}\frac{(n!)^2 2^k k!}{(n-k)!(n+k)!(2k+1)!} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

En évaluant (1) en -1 :

$$(2k+1)T_n^{(k+1)}(1) = -(n^2-k^2)T_n^{(k)}(1)$$

Comme $T_n^{(0)}(-1)=(-1)^n$, on obtient

$$T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k}T_n^{(k)}(1)$$

Exercice 86 : [énoncé]
Soit (P,Q) un couple solution.
Si le polynôme P est constant alors nécessairement $Q=0$ et $P=\pm1$. Vérification immédiate.
Sinon, posons $n=\deg P\in\mathbb{N}^\star$. La relation $P^2+(1-X^2)Q^2=1$ impose que P et Q sont premiers entre eux et en dérivant on obtient
$PP'-XQ^2+(1-X^2)QQ'=0$. Par suite $Q\mid PP'$ puis $Q\mid P'$. Par des considérations de degré et de coefficient dominant on peut affirmer $P'=\pm nQ$.
Quitte à considérer $-Q$, supposons $P'=nQ$ et la relation
$PP'-XQ^2+(1-X^2)QQ'=0$ donne $(1-X^2)P''-XP'+n^2P=0$.
Résolvons l'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+n^2y=0$ sur $[-1,1]$.
Par le changement de variable $t=\cos\theta$, on obtient pour solution générale
$y(t)=\lambda\cos(n\arccos t)+\mu\sin(n\arccos t)$.
La fonction $t\mapsto\cos(n\arccos t)$ est polynômiale (cf. polynôme de Tchebychev), cela définit le polynôme T_n.
La fonction $t\mapsto\sin(n\arccos t)$ ne l'est pas car de dérivée $\frac{-n}{\sqrt{1-t^2}}\cos(n\arccos t)$ non polynômiale.
Par suite $P=\lambda T_n$ et $Q=\pm\frac{1}{n}T_n'$.
La relation $P^2+(1-X^2)Q^2=1$ évaluée en 1 impose $\lambda^2=1$ et finalement $(P,Q)=(\pm T_n,\pm\frac{1}{n}T_n')$.
Vérification : pour le couple $(P,Q)=(\pm T_n,\pm\frac{1}{n}T_n')$, le polynôme $P^2+(1-X^2)Q^2$ est constant car de polynôme dérivé nul et puisqu'il prend la valeur 1 en 1, on peut affirmer $P^2+(1-X^2)Q^2=1$.

Exercice 87 : [énoncé]
a) $P_2=X^2-2$, $P_3=X^3-3X$.
Par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$, on montre $\deg P_n=n$ et $\mathrm{coeff}(P_n)=1$.
b) Par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$:
Pour $n=0$ et $n=1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n+1$ (avec $n\geqslant 0$)

$$P_{n+2}(z)=(z+1/z)P_{n+1}(z)-P_n(z)\underset{HR}{=}\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)=z^{n+2}+\frac{1}{z^{n-}}$$

Récurrence établie.
c) $P_n(2\cos\theta)=P_n(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})=\mathrm{e}^{in\theta}+\mathrm{e}^{-in\theta}=2\cos n\theta$.

d) Soit $x \in [-2, 2]$. Il existe $\theta \in [0, \pi]$ unique tel que $x = 2\cos\theta$.

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos n\theta = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}$$

Par suite les $x_k = 2\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right)$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ constituent n racines distinctes de $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. Puisque le polynôme P_n est de degré n, il n'y en a pas d'autres.

Exercice 88 : [énoncé]
Montrons la propriété par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$, $P_1(X) = X$ convient.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
En dérivant la relation

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)\sin x P_n(\sin x) + \cos^2 x P_n'(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

Posons alors

$$P_{n+1}(X) = (n+1)XP_n(X) + (1 - X^2)P_n'(X)$$

de sorte que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

On peut écrire

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ avec } a_k \geqslant 0, a_n \neq 0$$

et alors

$$P_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$$

est un polynôme de degré $n + 1$ à coefficients positif ou nul.
Récurrence établie.
Par la relation de récurrence obtenue ci-dessus

$$P_1(X) = X,\ P_2(X) = 1 + X^2 \text{ et } P_3(X) = 5X + X^3$$

et

$$P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$$

donc

$$P_n(1) = n!$$