Probabilités

Tribu

Exercice 1 [03995] [correction]
Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω.
Vérifier que $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega' / A \in \mathcal{T}\}$ définit une tribu sur Ω'.

Exercice 2 [03997] [correction]
Soient $f : \Omega \to \Omega'$ une application et $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω'. Vérifier que

$$\mathcal{T} = \left\{f^{-1}(A')/A' \in \mathcal{T}'\right\}$$

définit une tribu sur Ω.

Exercice 3 [03998] [correction]
a) Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribu sur un même ensemble Ω.
Montrer que

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

est une tribu sur Ω.
b) Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ la famille de toutes les tribus de Ω contenant les éléments de $\mathcal{S}$.
Vérifier que

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

est une tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$ et que c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété.

Exercice 4 [03999] [correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.
a) Vérifier que

$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n$$

est un évènement. A quelle condition simple sur la suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'évènement A sera-t-il réalisé ?
b) Même question avec

$$A' = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

Exercice 5 [04006] [correction]
Soit Ω un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de Ω vérifiant

$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$$

On pose

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{n\in T} A_n / T \in \wp(\mathbb{N})\right\}$$

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω.
b) On suppose l'ensemble Ω dénombrable.
Montrer que toute tribu infinie sur Ω est de la forme ci-dessus pour une certaine famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Existe-t-il des tribus dénombrables ?

Exercice 6 [04007] [correction]
Dans ce sujet dénombrable signifie « au plus dénombrable ».
Soit Ω un ensemble. On introduit

$$\mathcal{T} = \left\{A \subset \Omega / A \text{ ou } \bar{A} \text{ est dénombrable}\right\}$$

a) Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.
b) Justifier que $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant les singletons $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.
c) Vérifier que si Ω est dénombrable alors $\mathcal{T} = \wp(\Omega)$.

Exercice 7 [04008] [correction]
Soit une application $f : \Omega \to \Omega'$ et l'ensemble

Non défin

Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

Définition d'une probabilité

Exercice 8 [04002] [correction]
Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$.
Montrer que

$$P(\{n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 9 [04016] [correction]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}$ vérifiant

$$P\left(\{n, n+1, \ldots\}\right) = \lambda a_n$$

Exercice 10 [04011] [correction]
Dans ce sujet dénombrable signifie « au plus dénombrable » .
Soit Ω un ensemble non dénombrable. On introduit

$$\mathcal{T} = \left\{A \subset \Omega / A \text{ ou } \bar{A} \text{ est dénombrable}\right\}$$

a) Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.
b) Pour $A \in \mathcal{T}$, on pose

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ dénombrable} \\ 1 & \text{si } \bar{A} \text{ dénombrable} \end{cases}$$

Vérifier que P définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Exercice 11 [04009] [correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Pour $A, B \in \mathcal{T}$, on pose

$$d(A, B) = P(A\Delta B)$$

avec $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par

$$A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

a) Vérifier

$$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$$

b) En déduire

$$|P(A) - P(B)| \leqslant P(A\Delta B)$$

Exercice 12 [04010] [correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On introduit

$$A_\star = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n \text{ et } A^\star = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

a) Vérifier que $A_\star$ et $A^\star$ sont des évènements et que $A_\star \subset A^\star$
b) Montrer les inégalités de Fatou

$$P(A_\star) \leqslant \lim_{p\to+\infty} \inf_{n\geqslant p} P(A_n) \text{ et } \lim_{p\to+\infty} \sup_{n\geqslant p} P(A_n) \leqslant P(A^\star)$$

c) Déterminer un exemple où les inégalités précédentes s'avèrent strictes.

Exercice 13 [04041] [correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$$

Calcul de probabilité d'événements

Exercice 14 [04097] [correction]
Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné.
Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 > 0$)
a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
b) Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

Exercice 15 [04098] [correction]
On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile » . On note A_n l'événement

« on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n-ième lancer »

et l'on désire calculer sa probabilité a_n.
a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.
b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.
c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir un deux piles consécutifs.
d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Probabilités composées

Exercice 16 [03996] [correction]
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.
a) Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?
b) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?
c) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Probabilités conditionnelles

Exercice 17 [04014] [correction]
Chaque jour du lundi au vendredi, le professeur Zinzin a la probabilité $p \in]0,1[$ d'oublier ses notes de cours en classe. Peu lui importe car il improvise à chaque cours, mais ce vendredi soir il ne les retrouve plus et ça le contrarie. Il est cependant certain de les avoir eu en sa possession lundi matin.
a) Quelle est probabilité que le professeur Zinzin ait perdu ses notes de cours dans la journée de Lundi ?
b) Quel est le jour le plus probable où eu lieu cette perte ?

Exercice 18 [04015] [correction]
Deux entreprises asiatiques produisent des « langues de belle-mère » en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, dans la proportion p_1 pour la première entreprise, dans la proportion p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles. Il souffle dans une première et celle-ci fonctionne : le voilà prêt pour fêter le nouvel an !
a) Quelle est la probabilité pour qu'une seconde langue de belle-mère choisie dans le même sachet fonctionne ?
b) Quelle est la probabilité que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?

Exercice 19 [04030] [correction]
Trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :
- à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties consécutives.
a) Etablir que le jeu s'arrête presque sûrement.
b) A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Exercice 20 [04031] [correction]
Deux joueurs A et B s'affrontent en des parties indépendantes. Le joueur A dispose d'une fortune égale à n brouzoufs tandis que le joueur B dispose de $N-n$ brouzoufs. A chaque tour, le joueur A a la probabilité $p \in]0,1[$ de l'emporter et le joueur B a la probabilité complémentaire $q = 1-p$. Le joueur perdant cède alors un brouzouf au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.
On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut n.
a) Que valent a_0 et a_N ? Etablir la formule de récurrence

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!], a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$ est géométrique.
c) Calculer a_n en distinguant les cas $p = q$ et $p \neq q$.
d) Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

Evènements Indépendants

Exercice 21 [04000] [correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On considère l'évènement

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

dont la réalisation signifie qu'une infinité des évènements A_n sont réalisés.
a) On suppose la convergence de la série $\sum P(A_n)$.
Montrer que $P(A) = 0$.
b) A l'inverse, on suppose la divergence de la série $\sum P(A_n)$.
Montrer que $P(A) = 1$.
Ce résultat s'appelle la loi du zéro-un de Borel.

Exercice 22 [04013] [correction]
a) Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'évènements mutuellement indépendants. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\widetilde{A_i} = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Vérifier la famille $(\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_n})$ est constituée d'évènements mutuellement indépendant.
b) Etendre le résultat au cas d'une famille $(A_i)_{i\in I}$.

Exercice 23 [04081] [correction]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.

Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\right)$$

Exercice 24 [04082] [correction]
Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star$$

a) Pour quelle(s) valeur(s), l'application P détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^\star, \mathcal{P}(\mathbb{N}^\star))$?
b) Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on introduit l'événement

$$A_p = \{n \in \mathbb{N}^\star / p \mid n\}$$

Exprimer simplement la probabilité de l'événement A_p.
c) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.
d) En étudiant $P(\{1\})$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
$\Omega' = \Omega \cap \Omega'$ avec $\Omega \in \mathcal{T}$ donc $\Omega' \in \mathcal{T}'$.
Soit $B \in \mathcal{T}'$. On peut écrire $B = A \cap \Omega'$ avec $A \in \mathcal{T}$ et alors $\Omega' \backslash B = \bar{A} \cap \Omega'$ avec $\bar{A} \in \mathcal{T}$. Ainsi le complémentaire de B dans Ω' est élément de $\mathcal{T}'$.
Soit (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{T}'$. On peut écrire $B_n = A_n \cap \Omega'$ avec $A_n \in \mathcal{T}$ et alors

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap \Omega' \text{ avec } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$$

Ainsi

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \in \mathcal{T}'$$

Exercice 2 : [énoncé]
$\Omega = f^{-1}(\Omega')$ avec $\Omega' \in \mathcal{T}'$ donc

$$\Omega \in \mathcal{T}$$

Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $A' \in \mathcal{T}'$ tel que $A = f^{-1}(A')$. On a alors

$$\bar{A} = f^{-1}\left(\overline{A'}\right) \text{ avec } \overline{A'} \in \mathcal{T}'$$

donc

$$\bar{A} \in \mathcal{T}'$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}'^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = f^{-1}(A'_n)$$

Or

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n\right) \text{ avec } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n \in \mathcal{T}'$$

donc

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) Ω appartient à toutes les tribus $\mathcal{T}_i$ donc aussi à $\mathcal{T}$.
Soit $A \in \mathcal{T}$. La partie A appartient à toutes les tribus $\mathcal{T}_i$ donc $\bar{A}$ aussi et par conséquent $\bar{A} \in \mathcal{T}$.
Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $i \in I$, $(A_n) \in (\mathcal{T}_i)^{\mathbb{N}}$ donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i$ puis $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.
Finalement, $\mathcal{T}$ s'avère bien un tribu.
b) Par ce qui précède, on peut déjà affirmer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
Pour toute partie A éléments de $\mathcal{S}$, on a $A \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$ et donc $A \in \mathcal{T}$.
Ainsi, $\mathcal{T}$ est une tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$.
Enfin, si $\mathcal{T}'$ est une autre tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$, celle-ci figure dans la famille $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ et donc

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}'$$

Exercice 4 : [énoncé]
a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\bigcap\limits_{n\geqslant p} A_n$ est un évènement car intersection dénombrable d'évènements. On en déduit que A est un évènement par union dénombrable d'évènements.
L'évènement A sera réalisé si, et seulement si, $\bigcap\limits_{n\geqslant p} A_n$ est réalisé pour un certain p. Cela signifie que les évènements de la suite (A_n) sont réalisé à partir d'un certain rang (ou encore que seul un nombre fini de A_n ne sont pas réalisés).
b) A' est un évènement par des arguments analogues aux précédents.
La non réalisation de A' signifie la réalisation de

$$\overline{A'} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}$$

ce qui revient à signifier que seul un nombre fini de A_n sont réalisés.
Par négation, la réalisation de A' signifie qu'une infinité de A_n sont réalisés.

Exercice 5 : [énoncé]
a) Considérons l'application $\varphi : \Omega \to \mathbb{N}$ qui envoie ω sur l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$.
Pour chaque $T \subset \mathbb{N}$, on a $\varphi^{-1}(T) = \bigcup\limits_{n\in T} A_n$ et donc $\mathcal{A}$ se comprend comme l'image réciproque de la tribu $\wp(\mathbb{N})$ par l'application φ. C'est donc bien une tribu.
b) Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur l'ensemble dénombrable Ω. On définit une relation d'équation $\mathcal{R}$ sur Ω en affirmant que deux éléments ω et ω' sont en relation si, et seulement si,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \omega \in A \Leftrightarrow \omega' \in A$$

Les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ constituent une partition de Ω et puisque l'ensemble Ω est dénombrable, ces classes d'équivalence sont au plus dénombrables.
Par construction

$$\forall A \in \mathcal{A}, \omega \in A \Rightarrow Cl(\omega) \subset A$$

Aussi, si $\omega' \notin Cl(\omega)$ alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$(\omega \in A \text{ et } \omega' \notin A) \text{ ou } (\omega \notin A \text{ et } \omega' \in A)$$

Quitte à considérer $\overline{A}$, on peut supposer $\omega \in A$ et $\omega' \notin A$ et l'on note $A_{\omega'}$ cet ensemble.
On a alors

$$Cl(\omega) = \bigcap_{\omega' \notin Cl(\omega)} A_{\omega'} \in \mathcal{A}$$

En effet :
- l'intersection est élément de $\mathcal{A}$ car il s'agit d'une intersection au plus dénombrable ;
- la classe est incluse dans l'intersection car ω est élément de cette intersection ;
- si un élément ω' n'est par dans la classe, il n'est pas non plus dans l'ensemble $A_{\omega'}$ figurant dans l'intersection.

De plus, les éléments A de la tribu $\mathcal{A}$ se décrivent sous la forme

$$A = \bigcup_{\omega \in A} Cl(\omega)$$

S'il n'y a qu'un nombre fini de classe d'équivalence, la tribu $\mathcal{A}$ est de cardinal fini ce que les hypothèses excluent. Les classes d'équivalences sont donc en nombre dénombrables, on peut les décrire par une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du sujet et les éléments de la tribu $\mathcal{A}$ apparaissent comme ceux de la forme

$$\bigcup_{n \in T} A_n \text{ avec } T \in \wp(\mathbb{N})$$

c) L'ensemble $\wp(\mathbb{N})$ n'étant pas dénombrable, ce qui précède assure l'inexistence de tribus dénombrables.

Exercice 6 : [énoncé]
a) $\bar{\Omega} = \emptyset$ donc $\bar{\Omega}$ est dénombrable et $\Omega \in \mathcal{T}$.
$\mathcal{T}$ est évidemment stable par passage au complémentaire.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.
Cas 1 : Tous les A_n sont dénombrables
La réunion $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable de parties dénombrables.
Cas 2 : L'un des A_n n'est pas dénombrable.
Posons A_{n_0} ce vilain canard. On a nécessairement $\overline{A_{n_0}}$ dénombrable.
Or

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$$

donc $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ est dénombrable car inclus dans une partie qui l'est.
Dans les deux cas, l'union des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de $\mathcal{T}$.
b) $\mathcal{T}$ est une tribu contenant tous les $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.
Soit $\mathcal{A}$ une tribu contenant tous les $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.
Les parties dénombrables de Ω peuvent se percevoir comme réunion dénombrable de leurs éléments et sont donc éléments de la tribu A.
Les partie dont le complémentaire est dénombrables sont alors aussi éléments de la tribu A.
On en déduit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$.
c) Si Ω est dénombrable alors toute partie de Ω peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties $\{\omega\}$ et est donc élément de $\mathcal{T}$. On en déduit $\wp(\Omega) = \mathcal{T}$.

Exercice 7 : [énoncé]
On a $\Omega = f^{-1}(f(\Omega))$ donc $\Omega \in \mathcal{T}$.
Soit $A \in \mathcal{T}$. Vérifions $\bar{A} \in \mathcal{T}$ i.e. $\bar{A} = f^{-1}\left(f\left(\bar{A}\right)\right)$.
L'inclusion directe est toujours vraie. Inversement, soit $x \in f^{-1}\left(f\left(\bar{A}\right)\right)$. Il existe $y \in \bar{A}$ tel que $f(x) = f(y)$. Si par l'absurde $x \in A$ alors $y \in f^{-1}(f(A)) = A$. Ceci étant exclu, $x \in \bar{A}$ et donc $f^{-1}\left(f\left(\bar{A}\right)\right) \subset \bar{A}$ puis égal.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.
On a

$$f\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f(A_n)$$

puis

$$f^{-1}\left(f\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-1}\left(f(A_n)\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$

On peut donc conclure

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$$

Exercice 8 : [énoncé]
On a $P(\mathbb{N}) = 1$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$. Par σ-additivité d'une probabilité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = 1$$

Puisque cette série converge, son terme général tend vers 0.
Par considération de reste de série convergente, on a aussi

$$P(\{k/k \geqslant n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 9 : [énoncé]
Analyse : Si P est solution alors $P(\mathbb{N}) = 1$ et donc $\lambda a_0 = 1$. On en déduit $\lambda = 1/a_0$.
De plus,

$$P(\{n\}) = P(\{n, n+1, \ldots\}) - P(\{n+1, n+2, \ldots\}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$$

ce qui détermine P.
Synthèse : Posons

$$p_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$$

Les p_n sont des réels positifs car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{a_0}\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - a_{n+1}) = 1$$

car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle. Il existe donc une probabilité P sur $\mathbb{N}$ vérifiant

$$P(\{n\}) = p_n$$

et alors, par continuité croissante

$$P(\{n, n+1, \ldots\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = \frac{a_n}{a_0}$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) $\bar{\Omega} = \emptyset$ donc $\bar{\Omega}$ est dénombrable et $\Omega \in \mathcal{T}$.
$\mathcal{T}$ est évidemment stable par passage au complémentaire.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.
Cas 1 : Tous les A_n sont dénombrables
La réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable de parties dénombrables.
Cas 2 : L'un des A_n n'est pas dénombrable.
Posons A_{n_0} ce vilain canard. On a nécessairement $\overline{A_{n_0}}$ dénombrable.
Or

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$$

donc $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ est dénombrable car inclus dans une partie qui l'est.
Dans les deux cas, l'union des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de $\mathcal{T}$.
b) $P(\Omega) = 1$ car Ω n'est pas dénombrable.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints.
Cas 1 : Tous les A_n sont dénombrables
On en déduit que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est aussi dénombrable et l'égalité

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

est vérifiée.
Cas 2 : L'un des A_n n'est pas dénombrable. Notons n_0 son indice.
$\overline{A_{n_0}}$ est dénombrable et, par distinctions des A_n, on a $A_n \subset \overline{A_{n_0}}$ pour tout $n \neq n_0$. On en déduit que seul A_{n_0} n'est pas dénombrable et donc l'égalité

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

est à nouveau vérifiée.

Exercice 11 : [énoncé]
a) On vérifie par les éléments l'inclusion

$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$$

et donc

$$P(A\Delta C) \leqslant P(A\Delta B) + P(B\Delta C)$$

b) On a

$$P(A) = P(A\Delta\emptyset) \leqslant P(A\Delta B) + P(B\Delta\emptyset) = P(A\Delta B) + P(B)$$

donc
$$P(A) - P(B) \leqslant P(A\Delta B)$$
Un raisonnement symétrique fournit aussi
$$P(B) - P(A) \leqslant P(A\Delta B)$$

Exercice 12 : [énoncé]
a) $A_\star$ et $A^\star$ sont des évènements par réunions et intersections dénombrables d'évènements.
Soit $\omega \in A_\star$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$ pour tout $n \geqslant p$.
Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a alors $\omega \in \bigcup_{n\geqslant q} A_n$ et donc $\omega \in A^\star$.
b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant p$, on a $\bigcap_{n\geqslant p} A_n \subset A_n$ et donc
$$P\left(\bigcap_{n\geqslant p} A_n\right) \leqslant P(A_n)$$
La borne inférieure étant le plus grand des minorants, on obtient
$$P\left(\bigcap_{n\geqslant p} A_n\right) \leqslant \inf_{n\geqslant p} P(A_n)$$
Enfin, par continuité croissante
$$P(A_\star) = \lim_{p\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\geqslant p} A_n\right)$$
et donc
$$P(A_\star) \leqslant \lim_{p\to+\infty} \inf_{n\geqslant p} P(A_n)$$
Cette dernière limite existant car la suite $\left(\inf_{n\geqslant p} P(A_n)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.
L'autre inégalité s'obtient par un procédé analogue.
c) $\Omega = \{0,1\}$ muni de la probabilité uniforme et
$$A_{2p} = \{0\}\,,\, A_{2p+1} = 1$$
On a $P(A_n) = 1/2$ donc
$$\lim_{p\to+\infty} \inf_{n\geqslant p} P(A_n) = \lim_{p\to+\infty} \sup_{n\geqslant p} P(A_n) = \frac{1}{2}$$
tandis que
$$P(A_\star) = P(\emptyset) = 0 \text{ et } P(A^\star) = P(\Omega) = 1$$

Exercice 13 : [énoncé]
On a
$$\sum_{n=0}^{N} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leqslant P(\Omega) = 1$$
Puisque les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$ sont majorées, celle-ci converge. En particulier, son terme général tend vers 0.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Notons A_n l'événement « la cible est atteinte au rang n » . L'événement « J_1 gagne » est la réunion disjointe de A_{2k+1}. Or $P(A_{2k+1}) = (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1$ et donc, par sommation géométrique,
$$P(J_1 \text{ gagne}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1 = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$$
b) L'événement « J_2 gagne » est la réunion disjointe des A_{2k}. Or $P(A_{2k}) = (1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2$ et donc
$$P(J_2 \text{ gagne}) = \frac{p_2 - p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$$
La somme $P(J_1 \text{ gagne}) + P(J_2 \text{ gagne})$ vaut 1 et donc il est quasi-certain que le jeu se termine.
c) Le jeu est équitable lorsque $P(J_1 \text{ gagne}) = 1/2$ i.e. $2p_1 = (p_1 + p_2 - p_1p_2)$.
Cette équation en l'inconnue p_2 a pour seule solution
$$p_2 = \frac{p_1}{1-p_1} \text{ (si } p_1 \neq 1)$$
Cette solution est élément de $]0,1]$ si, et seulement si, $p_1 \leqslant 1/2$.

Exercice 15 : [énoncé]
a) $a_1 = 0$ et $a_2 = p^2$ et $a_3 = (1-p)p^2$.
b) Considérons les résultats des deux premiers lancers :
$$PP, PF, FP \text{ et } FF$$

et le système complet d'événements

$$PP,\ PF \text{ et } F = FP \cup FF$$

Par translation du problème

$$P(A_{n+2} \mid PF) = P(A_n) \text{ et } P(A_{n+2} \mid F) = P(A_{n+1})$$

et

$$P(A_{n+2} \mid PP) = 0$$

Par la formule des probabilités totales

$$a_{n+2} = 0 \times p^2 + a_n \times p(1-p) + a_{n+1}p$$

soit encore

$$a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n$$

c) Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. En sommant les relations précédentes, on obtient

$$S - (a_1 + a_2) = (1-p)(S - a_1) + p(1-p)S$$

On en tire $S = 1$ et donc il est quasi-certain que deux piles consécutifs apparaissent.
d) Il s'agit de calculer

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$$

On exploite la relation

$$(n+2)a_{n+2} = (1-p)(n+2)a_{n+1} + p(1-p)(n+2)a_n$$

et on somme

$$\mu - 2a_2 - a_1 = (1-p)\left((\mu - a_1) + (S - a_1)\right) + p(1-p)\left(\mu + 2S\right)$$

On en tire

$$\mu = \frac{1+p}{p^2}$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) Notons A_n l'évènement

« les n premieres boules tirées sont rouges »

On a $P(A_0) = 1$ et

$$P(A_n \mid A_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n}$$

car si A_{n-1} a lieu, l'urne est composée d'une boule blanche et de $2n-1$ boules rouges lors du n-ième tirage.
Par probabilités composées

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

b)En vertu de la formule de Stirling

$$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par continuité décroissante

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$$

c) Dans ce nouveau modèle

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-2}{3k-1}$$

et donc

$$\ln P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{3k-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

car $\sum \ln(1 - 1/(3k-1))$ est une série à termes négatifs divergente. A nouveau l'on obtient

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$$

Exercice 17 : [énoncé]
a) Notons Lu, Ma, Me, Je, Ve les évènements correspondant à la perte des notes de cours les jours correspondants. On a

$$P(Lu) = p,\ P(Ma \mid \overline{Lu}) = p,\ P(Me \mid \overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = p, \ldots$$

et donc

$$P(Ma \cap \overline{Lu}) = P(Ma \mid \overline{Lu})P(\overline{Lu}) = p(1-p)$$

Puisque $Lu \cup Ma$ est la réunion disjointes de Lu et $Ma \cap \overline{Lu}$, on a

$$P(Lu \cup Ma) = p + p(1-p)$$

Aussi

$$P(Me \cap \overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = P(Me \mid \overline{Lu} \cap \overline{Ma})P(\overline{Lu} \cap \overline{Ma})$$

avec

$$P(\overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = 1 - P\left(Lu \cup Ma\right) = 1 - p - p(1-p) = (1-p)^2$$

puis

$$P(Me \cap \overline{Lu} \cap \overline{Ma}) = p(1-p)^2 \text{ et } P(Lu \cup Ma \cup Me) = p + p(1-p) + p(1-p)^2$$

Etc

Finalement

$$P(Lu \cup \ldots \cup Ve) = p + p(1-p) + \cdots + p(1-p)^4 = 1 - (1-p)^5$$

et

$$P(Lu \mid Lu \cup \ldots \cup Ve) = \frac{p}{1-(1-p)^5}$$

b) On a aussi

$$P(Ma \mid Lu \cup \ldots \cup Ve) = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^5}, P(Me \mid Lu \cup \ldots \cup Ve) = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^5}, \ldots$$

Le jour le plus probable où la perte eu lieu est le premier jour de la semaine.

Exercice 18 : [énoncé]

a) Notons A_i l'évènement

« le sachet est produit dans l'entreprise d'indice i »

Notons B_1 l'évènement « la première langue de belle-mère choisie dans le sachet est fonctionnelle » Puisque les entreprises produisent en proportion égale

$$P(A_1) = P(A_2) = 1/2$$

et par la formule des probabilités totales

$$P(\overline{B_1}) = P(\overline{B_1} \mid A_1)P(A_1) + P(\overline{B_1} \mid A_2)P(A_2) = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

puis

$$P(B_1) = \frac{(1-p_1) + (1-p_2)}{2}$$

Notons B_2 l'évènement « la deuxième langue de belle-mère choisie dans le sachet est fonctionnelle » On veut calculer

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2 \mid A_1)P(A_1) + P(B_1 \cap B_2 \mid A_2)P(A_2)$$

On peut supposer l'indépendance des défectuosités à l'intérieur d'une même usine et l'on obtient

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{(1-p_1)^2 + (1-p_2)^2}{2}$$

On en déduit

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{(1-p_1)^2 + (1-p_2)^2}{(1-p_1) + (1-p_2)}$$

b) Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, notons C_k l'évènement

« le sachet contient k articles fonctionnels »

On veut mesurer

$$P(C_k \mid B_1) = \frac{P(C_k \cap B_1)}{P(B_1)}$$

Pour $k = 0$, cette probabilité est nulle car $C_0 \cap B_1 = \emptyset$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$C_k \cap B_1 = B_1 \cap D_{k-1}$$

avec D_{k-1} l'évènement

« en dehors du premier article, le sachet contient $k-1$ articles fonctionnels »

On peut mesurer la probabilité de ces évènements dès que l'on connaît l'usine de production

$$P(B_1 \cap D_{k-1} \mid A_i) = (1-p_i)\binom{n-1}{k-1}(1-p_i)^{k-1}p_i^{n-k}$$

Par probabilités totales

$$P(B_1 \cap D_{k-1}) = \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\left[(1-p_1)^k p_1^{n-k} + (1-p_2)^k p_2^{n-k}\right]$$

et enfin

$$P(C_k \mid B_1) = \frac{\binom{n-1}{k-1}\left[(1-p_1)^k p_1^{n-k} + (1-p_2)^k p_2^{n-k}\right]}{(1-p_1) + (1-p_2)}$$

Exercice 19 : [énoncé]
a) Notons A_n l'évènement « le jeu dure au moins n affrontements »et B_n l'évènement « le jeu s'arrête lors du n-ième affrontement ».
On a la réunion disjointe

$$A_n = B_n \cup A_{n+1}$$

La suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et l'évènement « le jeu s'éternise »se comprend comme $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n$. Par continuité décroissante

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Or, pour $n \geqslant 1$, le jeu s'arrête à la $n+1$-ième confrontation si A_n est réalisé et que le joueur gagnant à la $n+1$-ième confrontation est celui ayant gagné à la n-ième (une chance sur 2). On en déduit

$$P(B_n) = \frac{1}{2}P(A_n) \text{ puis } P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n)$$

Ainsi

$$P(B_n) = P(A_{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ pour } n \geqslant 2$$

Il en découle

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n\right) = 0$$

b) Supposons que A remporte le premier affrontement. L'alternance des vainqueurs des confrontations jusqu'à l'arrêt du jeu entraîne que :
- si la partie s'arrête au rang $n = 2\quad [3]$, c'est le joueur A qui gagne ;
- si la partie s'arrête au rang $n = 0\quad [3]$, c'est le joueur C qui gagne ;
- si la partie s'arrête au rang $n = 1\quad [3]$, c'est le joueur B qui gagne.

La probabilité que C gagne sachant que A remporte le premier affrontement est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_{3k}) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}$$

Si en revanche B remporte le premier affrontement
- si la partie s'arrête au rang $n = 2\quad [3]$, c'est le joueur B qui gagne ;
- si la partie s'arrête au rang $n = 0\quad [3]$, c'est le joueur C qui gagne ;
- si la partie s'arrête au rang $n = 1\quad [3]$, c'est le joueur A qui gagne.

On en déduit que la probabilité que C gagne est encore $2/7$
Indépendamment, du résultat premier affrontement, la probabilité que C l'emporte vaut $2/7$.

Par symétrie du problème ou en adaptant les calculs qui précèdent, la probabilité que A (ou B) l'emporte est

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{7}\right) = \frac{5}{14}$$

Exercice 20 : [énoncé]
a) $a_0 = 0$ et $a_N = 1$.
a_n est la probabilité que le joueur A gagne lorsque sa fortune initiale vaut n.
Cette probabilité est aussi celle que le joueur A gagne lorsque sa fortune vaut n après le premier tour de jeu. En discutant selon que le joueur A gagne ou perd son premier tour de jeu, on obtient la formule

$$a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$$

b) En écrivant $a_n = pa_n + qa_n$, l'identité précédente donne

$$p(a_{n+1} - a_n) = q(a_n - a_{n-1})$$

et donc

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ u_{n+1} = \frac{q}{p}u_n$$

c) On obtient

$$\forall n \in [\![1, N]\!], u_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n u_1$$

Par télescopage

$$\forall n \in [\![1, N]\!], a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{q}{p}\right)^n u_1$$

Si $p = q$ alors $a_n = nu_1$ et puisque $a_N = 1$, on obtient

$$\forall n \in [\![1, N]\!], a_n = \frac{n}{N}$$

Si $p \neq q$ alors

$$a_n = \frac{q}{p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}u_1$$

et sachant $a_N = 1$, on conclut

$$a_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

d) Un calcul symétrique détermine la probabilité b_n que B gagne lorsque sa fortune vaut n . On constate alors que $a_n + b_{N-n} = 1$. Il est donc presque sûr que la partie s'arrête.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Par continuité décroissante

$$P(A) = \lim_{p\to+\infty} P\left(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\right)$$

Or par l'inégalité de Boole

$$P\left(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\right) \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n)$$

Le majorant est ici le reste d'une série convergente, il est donc de limite nulle et par conséquent $P(A) = 0$.
b) Etudions

$$\bar{A} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} \bar{A}_n$$

Par continuité croissante

$$P(\bar{A}) = \lim_{p\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\geqslant p} \bar{A}_n\right)$$

Pour $N \geqslant p$, on a par inclusion

$$0 \leqslant P\left(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\right) \leqslant P\left(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\right)$$

Par indépendance mutuelle

$$P\left(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\right) = \prod_{n=p}^{N} P(\overline{A_n}) = \prod_{n=p}^{N} (1 - P(A_n))$$

Via l'inégalité de convexité $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$

$$P\left(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{n=p}^{N} \mathrm{e}^{-P(A_n)} = \exp\left(-\sum_{n=p}^{N} P(A_n)\right)$$

Enfin, la divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$ donne

$$\sum_{n=p}^{N} P(A_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

puis

$$P\left(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

donc

$$P\left(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\right) = 0$$

On peut alors conclure $P(\bar{A}) = 0$ puis $P(A) = 1$.

Exercice 22 : [énoncé]
a) Un calcul facile fournit

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\overline{B})$$

Il est alors immédiat de vérifier que

$$A_1, \ldots, A_n \text{ mutuellement indépendants } \Rightarrow A_1, \ldots, \overline{A_i}, \ldots, A_n \text{ mutuellement indépendants}$$

En enchaînant les négations, on obtiendra

$$A_1, \ldots, A_n \text{ mutuellement indépendants } \Rightarrow \widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_n}$$

b) C'est immédiat puisque l'indépendance mutuelle d'une famille infinie se ramène à celle des sous-familles finies.

Exercice 23 : [énoncé]
On étudie

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_0}\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right)$$

Par indépendances des $\overline{A_n}$, on a

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right) = \prod_{n=0}^{N} [1 - P(A_n)]$$

Or $1-x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-P(A_n)} = \exp\left(-\sum_{n=0}^{N} P(A_n)\right)$$

A la limite quand $N \to +\infty$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_0}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\right)$$

où l'on comprend l'exponentielle nulle si la série des $P(A_n)$ diverge.

Exercice 24 : [énoncé]

a) La condition

$$P(\mathbb{N}^\star) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\{n\}\right) = 1$$

détermine

$$\lambda = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right)^{-1}$$

Inversement, cette valeur convient car on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, P\left(\{n\}\right) \geqslant 0 \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\{n\}\right) = 1$$

b) On peut exprimer

$$A_p = \{pk/k \in \mathbb{N}^\star\}$$

et donc

$$P\left(A_p\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{kp\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{k^s p^s} = \frac{1}{p^s}$$

c) Soit $p_1, \ldots, p_N$ des nombres premiers deux à deux distincts.

$$A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_N} = \{n \in \mathbb{N}^\star / \forall k \in [\![1, N]\!], p_k \mid n\}$$

Or les p_k étant des nombres premiers deux à deux distincts

$$(\forall k \in [\![1, N]\!], p_k \mid n) \Leftrightarrow p_1 \ldots p_N \mid n$$

et donc

$$A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_N} = A_{p_1 \ldots p_N}$$

On vérifie alors immédiatement

$$P\left(A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_N}\right) = \frac{1}{\left(p_1 \ldots p_N\right)^s} = P\left(A_{p_1 \ldots p_N}\right)$$

d) On a

$$\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$$

car tout naturel supérieur à 2 est divisible par un nombre premier. Par continuité décroissante

$$P\left(\{1\}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} P\left(\overline{A_p}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Or

$$P\left(\{1\}\right) = \lambda$$

et la relation demandée découle des résultats obtenus.