

# Réduction

## Sous-espaces stables

### Exercice 1 [00755] [correction]

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

On suppose que  $u$  et  $v$  commutent, montrer que  $\text{Im}u$  et  $\ker u$  sont stables par  $v$ .

Que dire de la réciproque ?

### Exercice 2 [00756] [correction]

Montrer qu'un endomorphisme  $f$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  commute avec un projecteur  $p$  si, et seulement si, les espaces  $\text{Im}p$  et  $\ker p$  sont stables par  $f$ .

### Exercice 3 [01722] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .

a) Montrer que  $\ker f$  et  $\text{Im}f$  sont stables par  $g$  i.e.  $g(\ker f) \subset \ker f$  et  $g(\text{Im}f) \subset \text{Im}f$

b) En déduire que, si  $p$  est un projecteur de  $E$ , on a :

$p$  et  $f$  commutent si, et seulement si,  $\text{Im}p$  et  $\ker p$  sont stables par  $f$ .

### Exercice 4 [00758] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

On pose

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \ker u^p \text{ et } I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im}u^p$$

a) Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $N = \ker u^n$  et  $I = \text{Im}u^n$ .

b) Etablir que  $N$  et  $I$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par  $u$  et tels que les restrictions de  $u$  à  $N$  et  $I$  soient respectivement nilpotente et bijective.

c) Réciproquement on suppose  $E = F \oplus G$  avec  $F$  et  $G$  sous-espaces vectoriels stables par  $u$  tels que les restrictions de  $u$  à  $F$  et  $G$  soient respectivement nilpotente et bijective. Etablir  $F = N$  et  $G = I$ .

### Exercice 5 [00216] [correction]

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  (avec  $\dim E < +\infty$ ) nilpotent et  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$ .

a) Etablir que pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ , il existe un sous-espace vectoriel  $F_k$  de  $E$  tel que

$$\ker u^k = \ker u^{k-1} \oplus F_k$$

b) Etablir que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

c) Observer que la matrice de  $u$  dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

### Exercice 6 [03459] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  non nulle et  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $f^2 = -\text{Id}_E$ .

a) Soit  $a \in E$  non nul. Montrer que la famille  $(a, f(a))$  est libre.

On pose  $F(a) = \text{Vect}(a, f(a))$ .

b) Montrer qu'il existe des vecteurs de  $E$   $a_1, \dots, a_p$  non nuls tels que

$$E = F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_p)$$

c) En déduire que la dimension de  $E$  est paire et justifier l'existence d'une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est simple.

### Exercice 7 [03205] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$u^3 + u = 0$$

a) Montrer que l'espace  $\text{Im}u$  est stable par  $u$ .

b) Pour  $x \in \text{Im}u$ , calculer  $u^2(x)$

c) Soit  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\text{Im}u$ .

Montrer que  $v$  est un isomorphisme.

d) En déduire que le rang de l'endomorphisme  $u$  est un entier pair.

### Exercice 8 [00757] [correction]

Déterminer les sous-espaces vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Exercice 9** [03462] [correction]

[Endomorphisme cyclique]

Soient  $u$  endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$ .On suppose que  $E$  est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par  $u$ .a) L'endomorphisme  $u$  possède-t-il des valeurs propres ?b) Montrer que pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , la famille  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .Quelle est la forme de la matrice de  $u$  dans cette base ?c) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de  $x$ .**Exercice 10** [00759] [correction]Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .On suppose  $u \circ v = v \circ u$  et  $v$  nilpotent.

On désire montrer

$$\det(u + v) = \det u$$

en raisonnant par récurrence sur la dimension  $n \geq 1$ .a) Traiter le cas  $n = 1$  et le cas  $v = 0$ .b) Pour  $n \geq 2$  et  $v \neq 0$ , former les matrices de  $u$  et  $v$  dans une base adaptée à  $\text{Im} v$ .c) Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux restrictions de  $u$  et  $v$  au départ de  $\text{Im} v$ .**Exercice 11** [03116] [correction]Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent.Soit  $S$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  et tel que

$$E = S + \text{Im} u$$

Montrer que  $S = E$ .**Exercice 12** [00760] [correction]Soit  $E = E_1 \oplus E_2$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E), \ker u = E_1 \text{ et } \text{Im} u = E_2\}$$

a) Montrer, pour tout  $u$  de  $\Gamma$  que  $\tilde{u} = u|_{E_2}$  est un automorphisme de  $E_2$ .Soit  $\phi : \Gamma \rightarrow \text{GL}(E_2)$  définie par  $\phi(u) = \tilde{u}$ .b) Montrer que  $\circ$  est une loi interne dans  $\Gamma$ .c) Montrer que  $\phi$  est un morphisme injectif de  $(\Gamma, \circ)$  dans  $(\text{GL}(E_2), \circ)$ .d) Montrer que  $\phi$  est surjectif.e) En déduire que  $(\Gamma, \circ)$  est un groupe. Quel est son élément neutre ?**Exercice 13** [02897] [correction]On note  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et on pose, pour toute  $f \in E$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

a) L'opérateur  $T$  est-il un automorphisme de  $E$  ?b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie impaire et stable par  $T$  ?**Matrices semblables****Exercice 14** [00721] [correction]Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant  $A^2 = 0$  et  $A \neq 0$ .Établir que  $A$  est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 15** [00722] [correction]Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant

$$A^{n-1} \neq O_n \text{ et } A^n = O_n$$

Établir que  $A$  est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 16** [00723] [correction]Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice non nulle telle que les espaces  $\text{Im} A$  et  $\ker A$  soient supplémentaires.Montrer que la matrice  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$$

**Exercice 17** [00724] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice non nulle telle que  $A^2 = 0$ .  
Montrer que  $A$  est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $r = \text{rg}A$ .

**Exercice 18** [00725] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non nulle vérifiant

$$A^3 + A = O_3$$

Montrer que  $A$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 19** [00726] [correction]

Soit  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 + I = 0$ .

Montrer que  $M$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 20** [00728] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de trace nulle.

Montrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 21** [03136] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang 1.

a) Montrer que  $A$  est semblable à une matrice dont les  $n - 1$  premières colonnes sont nulles.

b) En déduire

$$A^2 = \text{tr}(A).A \text{ et } \det(I_n + A) = 1 + \text{tr}A$$

**Exercice 22** [02382] [correction]

Quelles sont les matrices carrées réelles d'ordre  $n$  qui commutent avec  $\text{diag}(1, 2, \dots, n)$  et lui sont semblables ?

**Exercice 23** [02691] [correction]

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 24** [03032] [correction]

Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  non constante telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , prouver l'équivalence :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow f(A) \neq 0$$

**Exercice 25** [01322] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non nulle vérifiant  $A^2 = O_3$ .

Déterminer la dimension de l'espace

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM - MA = O_3\}$$

**Exercice 26** [03778] [correction]

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**Exercice 27** [02541] [correction]

Soit  $G$  une partie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non réduite à la matrice nulle.

On suppose que  $(G, \times)$  est un groupe. Montrer qu'il existe  $r \in \mathbb{N}^*$  tel que le groupe  $(G, \times)$  soit isomorphe à un sous-groupe de  $(\text{GL}_r(\mathbb{R}), \times)$ .

## Etude théorique des éléments propres d'un endomorphisme

### Exercice 28 [00763] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer

$$0 \notin \text{sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ surjectif}$$

### Exercice 29 [00762] [correction]

Soient  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $0 \in \text{sp}(f^n)$ . Montrer que  $0 \in \text{sp}(f)$ .

### Exercice 30 [00764] [correction]

Soit  $u$  un automorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Etablir

$$\text{Sp}u^{-1} = \{\lambda^{-1} / \lambda \in \text{Sp}u\}$$

### Exercice 31 [00765] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $a \in \text{GL}(E)$  et  $v = a \circ u \circ a^{-1}$ . Comparer  $\text{Sp}u$  et  $\text{Sp}v$  d'une part,  $E_\lambda(u)$  et  $E_\lambda(v)$  d'autre part.

### Exercice 32 [00766] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre. Montrer que  $u$  est une homothétie vectorielle.

### Exercice 33 [00042] [correction]

Soient  $u, v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

- Si  $\lambda \neq 0$  est valeur propre de  $u \circ v$ , montrer qu'il l'est aussi de  $v \circ u$ .
- Pour  $P \in E = \mathbb{R}[X]$ , on pose

$$u(P) = P' \text{ et } v(P) = \int_0^X P(t) dt$$

ce qui définit des endomorphismes de  $E$ . Déterminer

$$\ker(u \circ v) \text{ et } \ker(v \circ u)$$

- Montrer que la propriété de la première question reste valable pour  $\lambda = 0$  si l'espace  $E$  est de dimension finie.

### Exercice 34 [02544] [correction]

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$  alors  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $v \circ u$ .

## Crochet de Lie

### Exercice 35 [00775] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $AB - BA = A$ .

- Calculer  $A^k B - BA^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- A quelle condition la matrice  $A^k$  est-elle vecteur propre de l'endomorphisme  $M \mapsto MB - BM$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
- En déduire que la matrice  $A$  est nilpotente.

### Exercice 36 [02719] [correction]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$  tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

- Montrer que  $f$  est nilpotent.
- On suppose  $f^{n-1} \neq 0$ . Montrer qu'il existe une base  $e$  de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\text{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_e g = \text{diag}(\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1)$$

**Exercice 37** [ 02441 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle,  $u, v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $a, b$  dans  $\mathbb{C}$ . On suppose

$$u \circ v - v \circ u = au + bv$$

a) On étudie le cas  $a = b = 0$ .

Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

b) On étudie le cas  $a \neq 0, b = 0$ .

Montrer que  $u$  est non inversible.

Calculer  $u^n \circ v - v \circ u^n$  et montrer que  $u$  est nilpotent.

Conclure que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

c) On étudie le cas  $a, b \neq 0$ .

Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

**Exercice 38** [ 02868 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle,  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que

$$f \circ g - g \circ f = af + bg$$

Montrer que  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.

**Exercice 39** [ 02395 ] [correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Soient  $u$  et  $v$  des endomorphismes de  $E$ ; on pose  $[u, v] = uv - vu$ .

a) On suppose  $[u, v] = 0$ . Montrer que  $u$  et  $v$  sont cotrigonalisables.

b) On suppose  $[u, v] = \lambda u$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $u$  est nilpotent et que  $u$  et  $v$  sont cotrigonalisables.

c) On suppose l'existence de complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $[u, v] = \alpha u + \beta v$ . Montrer que  $u$  et  $v$  sont cotrigonalisables.

**Exercice 40** [ 00829 ] [correction]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tels que  $f \circ g - g \circ f = I$ .

a) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^{n-1}$ .

b) En dimension finie non nulle, montrer qu'il n'existe pas deux endomorphismes  $f$  et  $g$  tels que  $f \circ g - g \circ f = I$ .

c) Montrer que dans  $E = \mathbb{K}[X]$  les endomorphismes  $f$  et  $g$  définis par  $f(P) = P'$  et  $g(P) = XP$  conviennent.

**Exercice 41** [ 00828 ] [correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  vérifiant

$$f \circ g - g \circ f = f$$

a) Calculer

$$f^n \circ g - g \circ f^n$$

b) Soit  $P$  un polynôme. Montrer que si  $P(f) = 0$  alors  $f \circ P'(f) = 0$ .

c) En déduire que  $f$  est un endomorphisme nilpotent.

**Exercice 42** [ 03031 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On considère l'endomorphisme  $T$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  défini par

$$T(M) = AM - MA$$

a) On suppose que la matrice  $A$  est nilpotente.

Montrer que l'endomorphisme  $T$  est aussi nilpotent.

b) Réciproque ?

**Exercice 43** [ 03374 ] [correction]

Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$AB - BA = C$$

On suppose en outre que  $C$  commute avec les matrices  $A$  et  $B$ .

a) On suppose que  $A$  est diagonalisable. Montrer que la matrice  $C$  est nulle.

b) On suppose que la matrice  $C$  est diagonalisable. Montrer à nouveau de que la matrice  $C$  est nulle.

## Eléments propres d'un endomorphisme

**Exercice 44** [ 00768 ] [correction]

Soient  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $D$  l'endomorphisme de  $E$  qui à  $f$  associe sa dérivée  $f'$ . Déterminer les valeurs propres de  $D$  ainsi que les sous-espaces propres associés.

**Exercice 45** [ 03126 ] [correction]

Soient  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $f : E \rightarrow E$  l'application qui transforme une suite  $u = (u_n)$  en  $v = (v_n)$  définie par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .

**Exercice 46** [ 00770 ] [correction]

Soient  $E$  l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et  $\Delta : E \rightarrow E$  l'endomorphisme défini par

$$\Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de  $\Delta$ .

**Exercice 47** [ 00769 ] [correction]

Soient  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $I$  l'endomorphisme de  $E$  qui à  $f \in E$  associe sa primitive qui s'annule en 0.

Déterminer les valeurs propres de  $I$ .

**Exercice 48** [ 03467 ] [correction]

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  convergeant en  $+\infty$ .

Soit  $T$  l'endomorphisme de  $E$  donné par

$$\forall x \in [0, +\infty[, T(f)(x) = f(x+1)$$

Déterminer les valeurs propres de  $T$  et les vecteurs propres associés.

**Exercice 49** [ 00771 ] [correction]

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel des fonctions de  $\mathcal{C}([0, +\infty[ \mathbb{R})$  s'annulant en 0.

Pour tout  $f \in E$ , on définit  $\varphi(f) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\varphi(f)(0) = 0 \text{ et } \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ pour } x > 0$$

a) Montrer que  $\varphi(f) \in E$  puis que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .

**Exercice 50** [ 03435 ] [correction]

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $f \in E$ , on définit  $T(f) : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ pour } x > 0$$

a) Montrer que la fonction  $T(f)$  se prolonge par continuité en 0 et qu'alors  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Déterminer les éléments propres de  $T$ .

**Exercice 51** [ 03063 ] [correction]

Soit  $E$  l'espace des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(0) = 0$ .

Pour un élément  $f$  de  $E$  on pose  $T(f)$  la fonction définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$  et trouver ses valeurs propres.

**Exercice 52** [ 02700 ] [correction]

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Si  $f \in E$  on pose

$$T(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

a) Vérifier que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $T$ .

**Exercice 53** [ 02577 ] [correction]

a) Montrer que  $\Phi$ , qui à  $P$  associe

$$(X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_4[X]$ .

b) Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \left( \frac{5 - \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 + \lambda}{2(x + 1)} \right) y$$

c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\Phi$ .

**Exercice 54** [ 03125 ] [correction]

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par

$$\varphi : P \mapsto (X^2 - 1)P' - nXP$$

**Exercice 55** [ 02511 ] [correction]

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 2$ .

a) Montrer que  $\phi(P)(X) = (X - a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

b) A l'aide de la formule de Taylor, déterminer l'image et le noyau de  $\phi$ .

c) Trouver ses éléments propres. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

**Exercice 56** [03187] [correction]

a) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si  $a$  est valeur propre de  $f$ , de multiplicité  $m$ , et si  $E(f, a)$  est le sous-espace propre attaché, montrer

$$1 \leq \dim E(f, a) \leq m$$

b) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer simplement les valeurs propres de  $A$ .  
La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

## Polynômes caractéristiques

**Exercice 57** [00778] [correction]

a) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.  
b) Réciproque ?

**Exercice 58** [00779] [correction]

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.  
Établir que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  divise le polynôme caractéristique de  $u$ .

**Exercice 59** [00781] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

a) Établir l'égalité quand  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .  
b) Pour  $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , justifier que pour  $p \in \mathbb{N}$  assez grand  $A + \frac{1}{p}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .  
En déduire que l'égalité est encore vraie pour  $A$  non inversible.

**Exercice 60** [01272] [correction]

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . En multipliant à droite et à gauche la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

par des matrices triangulaires par blocs bien choisies, établir

$$\lambda^p \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$$

**Exercice 61** [02697] [correction]

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

Indice : Commencer par le cas où

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 62** [01109] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Établir

$$\chi_{(AB)^p} = \chi_{(BA)^p}$$

**Exercice 63** [00780] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible de polynôme caractéristique  $\chi_A$ .  
Établir que pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{x^n}{\chi_A(0)} \chi_A(1/x)$$

**Exercice 64** [02901] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer

$$\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$$

**Exercice 65** [02698] [correction]

a) Si  $P \in \mathbb{Z}[X]$  est unitaire de degré  $n$ , existe-t-il une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  de polynôme caractéristique  $(-1)^n P(X)$  ?  
b) Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  et le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

On suppose  $P \in \mathbb{Z}[X]$ . Montrer que pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$  le polynôme

$$P_q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^q)$$

appartient encore à  $\mathbb{Z}[X]$ .

c) Soit  $P$  dans  $\mathbb{Z}[X]$  unitaire dont les racines complexes sont de modules  $\leq 1$ . Montrer que les racines non nulles de  $P$  sont des racines de l'unité.

**Exercice 66** [ 03213 ] [correction]

Soient  $n \geq 2$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  endomorphisme de rang 2.

Déterminer le polynôme caractéristique de  $f$  en fonction de  $\text{tr}f$  et  $\text{tr}f^2$ .

**Exercice 67** [ 02699 ] [correction]

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

a) Comparer  $\text{Sp}B$  et  $\text{Sp}^t B$ .

b) Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que s'il existe  $\lambda$  pour lequel  $AC = \lambda C$ , alors

$\text{Im}C \subset \ker(A - \lambda I_n)$ .

c) Soit  $\lambda$  une valeur propre commune à  $A$  et  $B$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $C \neq 0$ , telle que  $AC = CB = \lambda C$ .

d) On suppose l'existence de  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $\text{rg}C = r$  et  $AC = CB$ . Montrer que le PGCD des polynômes caractéristiques de  $A$  et  $B$  est de degré  $\geq r$ .

e) Etudier la réciproque de d).

**Exercice 68** [ 03476 ] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang  $r$  tel que

$$AM = MB$$

Montrer que  $\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \geq r$ .

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

## Calcul de polynômes caractéristiques

**Exercice 69** [ 00782 ] [correction]

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

**Exercice 70** [ 00784 ] [correction]

Soient

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$$

a) Montrer

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$$

Calculer  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$ .

b) Pour tout  $x \in ]-2, 2[$ , on pose  $x = 2 \cos \alpha$  avec  $\alpha \in ]0, \pi[$ . Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}$$

c) En déduire que  $P_n(x)$  admet  $n$  racines puis que  $A_n$  est diagonalisable.

**Exercice 71** [ 02493 ] [correction]

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$ , tous distincts et  $P(x) = \det(A + xI_n)$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer  $P(a_i)$  et décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}$$

b) En déduire  $\det A$ .

**Exercice 72** [ 00785 ] [correction]

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$  deux à deux distincts.

On pose

$$P(x) = \det(A + xI_n) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer  $P(a_i)$ .  
 b) Justifier que  $P$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .  
 c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{P(X)}{\prod_{i=1}^n (X - a_i)}$$

- d) En déduire le déterminant de  $A + I_n$ .

## Applications du polynôme caractéristique

### Exercice 73 [02696] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont même valeurs propres.

### Exercice 74 [03083] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Sp}A \subset \mathbb{R}^+$ .

Montrer

$$\det A \geq 0$$

### Exercice 75 [03121] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Etablir

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset$$

### Exercice 76 [03991] [correction]

a) Soient  $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  semblables

Pour  $x \in \mathbb{C}$ , montrer que les matrices  $xI_n - B$  et  $xI_n - C$  sont semblables.

En est-il de même de  $(xI_n - B)^{-1}$  et  $(xI_n - C)^{-1}$  ?

b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $P_A(x) = \det(xI_n - A)$  et  $P'_A$  le polynôme dérivé de  $P_A$ .

On suppose que  $x$  n'est pas valeur propre de  $A$ , montrer

$$\text{tr}(xI_n - A)^{-1} = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}$$

## Existence de valeurs propres dans un espace complexe

### Exercice 77 [00786] [correction]

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- a) Justifier que tout endomorphisme de  $E$  possède au moins une valeur propre  
 b) Observer que l'endomorphisme  $P(X) \mapsto (X - 1)P(X)$  de  $\mathbb{C}[X]$  n'a pas de valeurs propres.

### Exercice 78 [00502] [correction]

a) Rappeler pourquoi un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle admet au moins un vecteur propre.

b) Soient  $u, v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle.

On suppose

$$u \circ v = v \circ u$$

Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

### Exercice 79 [00787] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $AB = BA$ .

Montrer que  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre en commun.

### Exercice 80 [00788] [correction]

Montrer que  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ont une valeur propre en commun si, et seulement si, il existe  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non nulle vérifiant  $UA = BU$ .

### Exercice 81 [03795] [correction]

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifie la propriété (P) si

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(M + \lambda A) \neq 0$$

- a) Rappeler pourquoi une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet au moins une valeur propre.  
 b) Soit  $T$  une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.  
 Calculer  $\det(I_n + \lambda T)$ . En déduire que  $T$  vérifie la propriété (P)

c) Déterminer le rang de la matrice

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

d) Soient  $A$  vérifiant  $(P)$  et  $B$  une matrice de même rang que  $A$ ; montrer

$$\exists(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2, B = PAQ$$

et en déduire que  $B$  vérifie  $(P)$ .

e) Conclure que, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , les matrices non inversibles vérifient  $(P)$  et que ce sont les seules.

f) Que dire des cette propriété dans le cas  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (on distinguera  $n$  pair et  $n$  impair) ?

**Exercice 82** [ 04073 ] [correction]

Soient  $u, v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle vérifiant  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

## Eléments propres d'une matrice

**Exercice 83** [ 00772 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $\text{rg}(A) = 1$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A^2 = \lambda A$  et que ce scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ .

**Exercice 84** [ 00773 ] [correction]

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

Montrer que

$$\text{Sp}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$$

**Exercice 85** [ 00774 ] [correction]

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$   $a_{i,j} > 0$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

a) Montrer que  $1 \in \text{Sp}(A)$ .

b) Justifier que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A$  alors  $|\lambda| \leq 1$ .

c) Observer que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A$  et vérifie  $|\lambda| = 1$  alors  $\lambda = 1$ .

**Exercice 86** [ 03280 ] [correction]

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$   $a_{i,j} \in \mathbb{R}^+$  et pour

tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

a) Montrer que  $1 \in \text{Sp}(A)$ .

b) Justifier que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A$  alors  $|\lambda| \leq 1$ .

c) Observer que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A$  et vérifie  $|\lambda| = 1$  alors  $\lambda$  est une racine de l'unité.

**Exercice 87** [ 02729 ] [correction]

Soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donnée par  $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

a) Trouver une matrice triangulaire inférieure unité  $L$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  telle que  $A = LU$ .

b) Exprimer  $A^{-1}$  à l'aide de

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

c) Montrer que  $\text{Sp}A^{-1} \subset [0, 4]$ .

**Exercice 88** [ 02704 ] [correction]

Déterminer les valeurs propres de la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 89** [ 02861 ] [correction]

Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

**Exercice 90** [ 03173 ] [correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Déterminer les valeurs propres de la comatrice de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On commencera par étudier le cas où la matrice  $A$  est inversible.

**Exercice 91** [ 03316 ] [correction]

Soient  $n \geq 3$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

- a) Calculer les rangs de  $A$  et  $A^2$ .
- b) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement représenté par la matrice  $A$ . Montrer

$$\ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}^n$$

- c) En déduire que la matrice  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & 0 & B \\ (0) & & & \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

- d) Calculer  $\text{tr} B$  et  $\text{tr} B^2$ .  
En déduire les valeurs propres de  $B$  puis celles de  $A$ .
- e) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 92** [ 03672 ] [correction]

Soit  $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ . On suppose que 1 est racine simple de

$$P(X) = X^p - (a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0)$$

On suppose la convergence d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  déterminée par ses  $p$  premiers termes  $u_0, \dots, u_{p-1}$  et la relation de récurrence

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n$$

Déterminer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 93** [ 02543 ] [correction]

Expliquer brièvement pourquoi

$${}^t \text{com}(A)A = \det(A)I_n$$

On suppose que  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes ; que vaut  $\det(A)$  ?  
Que représente un vecteur propre de  $A$  pour  ${}^t \text{com}(A)$  ?  
On suppose de plus que  $A$  n'est pas inversible. Déterminer

$$\dim \ker {}^t \text{com} A$$

Prouver que  ${}^t \text{com} A$  n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

**Exercice 94** [ 02613 ] [correction]

Soient

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

et  $\chi_n$  son polynôme caractéristique.

- a) Calculer

$$u_n = \chi_n(2 \cos \alpha)$$

- pour tout  $\alpha \in ]0, \pi[$ .
- b) Déterminer les valeurs propres de  $A_n$ .  
Quelle est la dimension des sous-espaces propres de  $A_n$  ?
- c) Déterminer les sous-espaces propres de  $A_n$   
Indice : on pourra, pour  $\lambda$  valeur propre de  $A_n$ , chercher

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

vérifiant  $AX = \lambda X$  et poser  $x_0 = x_{n+1} = 0$ .

## Éléments propres d'un endomorphisme matriciel

### Exercice 95 [00776] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $A \in E$ , on introduit  $u : E \rightarrow E$  défini par

$$u(M) = AM$$

Montrer que  $A$  et  $u$  ont les mêmes valeurs propres et préciser les sous-espaces propres de  $u$  en fonction de ceux de  $A$ .

### Exercice 96 [00777] [correction]

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\Phi_A$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par  $\Phi_A(M) = AM$ .

- Montrer que les valeurs propres de  $\Phi_A$  sont les valeurs propres de  $A$ .
- Déterminer les valeurs propres de  $\Psi_A : M \mapsto MA$ .

### Exercice 97 [00767] [correction]

On considère les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Calculer  $AM - MA$ .
- Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme  $M \mapsto AM - MA$ .

## Diagonalisabilité d'une matrice par similitude

### Exercice 98 [00796] [correction]

Montrer que si  $A$  est diagonalisable alors  ${}^tA$  l'est aussi.

### Exercice 99 [01673] [correction]

Soient  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On suppose la matrice  $AB$  diagonalisable. Montrer que  $BA$  est diagonalisable.

## Diagonalisabilité d'une matrice par l'étude des éléments propres

### Exercice 100 [00789] [correction]

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

- On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- Mêmes questions avec  $B$ .

### Exercice 101 [00790] [correction]

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est-elle diagonalisable ?

### Exercice 102 [00792] [correction]

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^*$  tels que  $|a| \neq |b|$  et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ (avec } n \geq 2)$$

- Calculer le rang de  $A$ . En déduire que 0 est valeur propre de  $A$  et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires et en déduire que  $A$  est diagonalisable.

### Exercice 103 [03123] [correction]

Monter que la matrice suivante est diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & \ddots & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$$

(indice : on pourra interpréter  $A$  comme la matrice d'un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ )

**Exercice 104** [ 03283 ] [correction]

a) Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

en fonction du polynôme

$$P(X) = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0)$$

b) Soit  $\lambda$  une racine de  $P$ . Déterminer le sous-espace propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

c) A quelle condition la matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 105** [ 03767 ] [correction]

Considérons la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$$

1. On suppose  $k$  réel, la matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  ? (sans calculs) ;

2.a) Déterminer le rang de  $A$ .

2.b) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de  $A$  est de la forme

$$X^2(X - u_1)(X - u_2)$$

avec  $u_1, u_2$  appartenant à  $\mathbb{C}^*$  et vérifiant

$$u_1 + u_2 = k \text{ et } u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6$$

2.c) Etudier les éléments propres dans le cas où  $u_1 = u_2$ .

2.d) En déduire les valeurs de  $k$  pour que  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ .

**Exercice 106** [ 03433 ] [correction]

Pour quelle(s) valeurs de  $x \in \mathbb{R}$ , la matrice suivante n'est-elle pas diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} -2-x & 5+x & x \\ x & -2-x & -x \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 107** [ 02536 ] [correction]

Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres complexes avec  $a^2 + b^2 \neq 0$  et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

a) Calculer  $A^t A$ ,  $\det A$  et montrer que  $\text{rg}(A) = 2$  ou  $4$ .

b) On pose  $\alpha^2 = b^2 + c^2 + d^2$  supposé non nul. Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 108** [ 02522 ] [correction]

Soit  $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ .

a) Quel est le rang de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} ?$$

b) Avec la trace, que peut-on dire des valeurs propres ?

c)  $A$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 109** [ 00798 ] [correction]

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}$ .

a) Etudier les valeurs propres de  $B$  en fonction de celles de  $A$ .

b) On suppose  $A$  diagonalisable.  $B$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 110** [ 00797 ] [correction]

Soient  $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et  $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A_1$  et  $A_2$  le sont.

## Diagonalisabilité des matrices de rang 1

### Exercice 111 [ 00793 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{rg}A = 1$ .

Etablir

$A$  diagonalisable si, et seulement si,  $\text{tr}A \neq 0$

### Exercice 112 [ 00794 ] [correction]

Soient  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nuls.

A quelle condition la matrice  $X^t Y$  est-elle diagonalisable ?

### Exercice 113 [ 02391 ] [correction]

Soient  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Montrer que  $J$  est diagonalisable.

### Exercice 114 [ 02702 ] [correction]

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ . La matrice  $(a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  est-elle diagonalisable ?

### Exercice 115 [ 00791 ] [correction]

Parmi les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , lesquelles sont diagonalisables ?

### Exercice 116 [ 02595 ] [correction]

Soient  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  et

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Calculer  $N^2$ , la matrice  $N$  est-elle diagonalisable ?

Montrer que  $M = 2N + I_n$  est inversible et calculer  $M^{-1}$ .

## Diagonalisation d'une matrice

### Exercice 117 [ 02706 ] [correction]

On pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

pour tous  $a, b$  réels.

a) Ces matrices sont-elles simultanément diagonalisables ?

b) Etudier et représenter graphiquement l'ensemble des  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $M(a, b)^n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $\infty$ .

### Exercice 118 [ 02705 ] [correction]

Soient  $a, b$  deux réels et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \ddots & a & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{pmatrix}$$

Réduire ces deux matrices.

### Exercice 119 [ 02703 ] [correction]

Diagonaliser les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 120 [ 03255 ] [correction]

Soit

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & & (b) \\ & \ddots & \\ (a) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

A quelle condition la matrice  $M_n$  est-elle diagonalisable ?  
Déterminer alors une base de vecteurs propres

## Calcul de puissances d'une matrice

**Exercice 121** [ 00811 ] [correction]

Calculer  $A^n$  pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 122** [ 00812 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 2 \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer deux réels  $\alpha, \beta$  tel que  $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ .  
b) Calculer  $A^n$  pour  $n \geq 1$ .

**Exercice 123** [ 00842 ] [correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } n \geq 2$$

- a) Montrer que  $M$  est diagonalisable.  
b) Déterminer le polynôme minimal de  $M$ .  
c) Calculer  $M^p$  pour  $p \in \mathbb{N}$ .

## Applications diverses de la diagonalisabilité

**Exercice 124** [ 00813 ] [correction]

a) Déterminer les valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Combien y a-t-il de matrice  $M$  telle que  $M^2 = A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ? dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 125** [ 00814 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

- a) Diagonaliser la matrice  $A$  en précisant la matrice de passage  $P$   
b) Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $M^2 + M = A$ .  
Justifier que la matrice  $P^{-1}MP$  est diagonale.  
c) Déterminer les solutions de l'équation  $M^2 + M = A$ .

**Exercice 126** [ 00815 ] [correction]

Soit pour  $n \geq 2$  la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que la matrice  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$   
b) Application : calculer

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

**Exercice 127** [ 02692 ] [correction]

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

**Exercice 128** [ 03145 ] [correction]

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  vérifiant

$$\forall M \in G, M^2 = I_n$$

- a) Montrer que  $G$  est commutatif.
- b) En déduire que les éléments de  $G$  sont codiagonalisables.
- c) En déduire

$$\text{Card}G \leq 2^n$$

- d) Application : Montrer que s'il existe un isomorphisme entre  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  et  $(\text{GL}_m(\mathbb{R}), \times)$  alors  $n = m$ .

**Exercice 129** [ 02453 ] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $B$  diagonalisable.  
Montrer

$$AB^3 = B^3A \Rightarrow AB = BA$$

**Exercice 130** [ 03122 ] [correction]

Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et  $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $A, B$  diagonalisables. Montrer

$$A^p M B^q = O_n \Rightarrow A M B = O_n$$

**Exercice 131** [ 02980 ] [correction]

Soit  $\varphi$  une application de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  vers  $\mathbb{C}$  vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \text{ et } \varphi \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda$$

Montrer que  $\varphi = \det$ .

**Exercice 132** [ 03276 ] [correction]

On considère trois suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur  $(u_0, v_0, w_0)$ , ces trois suites sont-elles convergentes ?

**Exercice 133** [ 03858 ] [correction]

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^2$  soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts. Montrer que  $M$  est aussi triangulaire supérieure.

**Exercice 134** [ 03113 ] [correction]

- a) Soit  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Déterminer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

- b) Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonalisables telles que  $\text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset$ .  
Montrer que pour toute matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , les matrices suivantes sont semblables

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O_n & B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{pmatrix}$$

**Exercice 135** [ 03270 ] [correction]

- a) Déterminer les entiers  $k$  pour lesquels l'équation

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

admet au moins une solution  $\theta \in \mathbb{R}$ .

- b) Soit  $S_k$  l'ensemble des suites réelles  $u$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n + u_{n+k-1}$$

A quelle condition sur  $k$ ,  $S_k$  contient-il une suite périodique non nulle.

## Diagonalisabilité d'un endomorphisme par l'étude de ses éléments propres

**Exercice 136** [ 00799 ] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ .  
On suppose que

$$\text{Im}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u + \text{Id}_E) = \{0_E\}$$

Montrer que  $u$  est diagonalisable.

**Exercice 137** [ 00800 ] [correction]

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour  $P \in E$ , on pose  $\varphi(P) = P - (X + 1)P'$ .

- a) Justifier que  $\varphi$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- b) Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$  et justifier que  $\varphi$  est diagonalisable.

**Exercice 138** [ 00801 ] [correction]

Montrer que l'application

$$f : P(X) \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Former la matrice de  $f$  relative à la base canonique de  $E$ . En déduire la diagonalisabilité de  $f$  ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

**Exercice 139** [ 00802 ] [correction]

Soient  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et deux réels  $a \neq b$ . Pour  $P \in E$ , on pose

$$\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$$

- Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$  et en déduire que  $\varphi$  est diagonalisable.

**Exercice 140** [ 00803 ] [correction]

L'endomorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par

$$\phi(M) = M + \text{tr}(M).I_n$$

est-il diagonalisable ?

**Exercice 141** [ 00804 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$  définie par  $F(u) = f \circ u$ .

- Montrer que  $f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $F$  l'est.
- Montrer que  $f$  et  $F$  ont les mêmes valeurs propres.
- Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . Etablir  $\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f)$ .

**Exercice 142** [ 03015 ] [correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, un projecteur fixé de  $E$  et  $\mathcal{F} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  définie par

$$\mathcal{F} : f \mapsto \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$$

- $\mathcal{F}$  est-elle linéaire ?
- $\mathcal{F}$  est-elle diagonalisable ?
- Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés ?

**Exercice 143** [ 02718 ] [correction]

Soient  $A \in \mathbb{R}[X]$  et  $B \in \mathbb{R}[X]$  scindé à racines simples de degré  $n + 1$ . Soit  $\Phi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui à  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ . Déterminer les éléments propres de  $\Phi$ . L'endomorphisme  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 144** [ 03582 ] [correction]

Soient  $A, B$  fixés dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On note  $f$  l'application qui, à  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme ; est-ce un isomorphisme ?
- On suppose dans la suite que les polynômes  $A$  et  $B$  premiers entre eux avec  $B$  scindé à racines simples ; donner les valeurs propres de  $f$ .
- L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 145** [ 02722 ] [correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = f$ . Etudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme  $u \mapsto fu - uf$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Exercice 146** [ 02723 ] [correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On définit  $T \in \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  par

$$T(g) = f \circ g - g \circ f$$

Montrer que si  $f$  est diagonalisable, alors  $T$  est diagonalisable ; si  $f$  est nilpotente, alors  $T$  est nilpotente.

**Exercice 147** [ 03776 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  déterminé par

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, f(e_k) = e_k + \sum_{i=1}^n e_i$$

- Donner la matrice de  $f$  dans  $e$ .
- Déterminer les sous-espaces propres de  $f$ .
- L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
- Calculer le déterminant de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il inversible ?

**Exercice 148** [ 03450 ] [correction]

On considère un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $U = (u_{i,j})$  la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ ,  $e_{i,j}$  les projecteurs associés à cette base et  $E_{i,j}$  la matrice de ces projecteurs.

On considère  $\varphi$  l'endomorphisme dans  $\mathcal{L}(E)$  tel que

$$\varphi(v) = u \circ v$$

- Montrer que  $\varphi$  et  $u$  ont les mêmes valeurs propres.
- Calculer  $UE_{i,j}$  en fonction des  $E_{k,j}$ . En déduire qu'il existe une base de  $\mathcal{L}(E)$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est diagonale par blocs.
- Exprimer cette matrice.

**Exercice 149** [ 00810 ] [correction]

Soient  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\varphi : M \mapsto DM - MD$  endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Calculer  $\varphi(E_{i,j})$  où  $E_{i,j}$  désigne la matrice élémentaire d'indice  $(i, j)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Quelle particularité présente la matrice de  $\varphi$  relativement à la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ?

- Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

L'endomorphisme  $\phi : u \mapsto f \circ u - u \circ f$  de  $\mathcal{L}(E)$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 150** [ 01324 ] [correction]

Soient  $E = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et  $\Phi : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  définie par

$$\Phi(S) = AS + S^t A$$

- Déterminer la matrice de  $\Phi$  dans une base de  $E$ .
- Quelle relation existe-t-il entre les polynômes caractéristiques  $\chi_\Phi$  et  $\chi_A$  ?
- Si  $\Phi$  est diagonalisable, la matrice  $A$  l'est-elle ?
- Si  $A$  est diagonalisable, l'endomorphisme  $\Phi$  l'est-il ?

## Applications de la diagonalisabilité d'un endomorphisme

**Exercice 151** [ 00809 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  admettant

exactement  $n$  valeurs propres distinctes.

- Montrer qu'il existe un vecteur  $a \in E$  tel que la famille  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .
- Quelle est la forme de la matrice de  $f$  dans cette base ?

**Exercice 152** [ 00808 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec  $f$ .

- Montrer que  $\mathcal{C}_f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .
- Montrer qu'un endomorphisme  $g$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  si, et seulement si, chaque sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .
- En déduire que

$$\dim \mathcal{C}_f = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \alpha_\lambda^2$$

où  $\alpha_\lambda$  est l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda$ .

- On suppose que les valeurs propres de  $f$  sont simples. Montrer que  $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 153** [ 02539 ] [correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ .

- Donner un exemple d'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
- On suppose, dans cette question seulement, que  $f$  est une endomorphisme de  $E$  diagonalisable.

Justifier que l'image et le noyau de  $f$  sont supplémentaires.

- Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer qu'il existe un entier naturel non nul  $k$  tel que

$$\text{Im}(f^k) \oplus \ker(f^k) = E$$

L'endomorphisme  $f^k$  est-il nécessairement diagonalisable ?

- Le résultat démontré en c) reste-t-il valable si l'espace est de dimension infinie ?

**Exercice 154** [ 00806 ] [correction]

Soit  $v$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie diagonalisable.

- Montrer qu'il existe un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant  $u^2 = v$ .
- Montrer qu'on peut choisir  $u$  solution qui soit un polynôme en  $v$  (indice : on pourra introduire un polynôme interpolateur).

**Exercice 155** [ 03252 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  possédant exactement  $n$  valeurs propres.

- Déterminer la dimension des sous-espaces propres de  $f$ .
- Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $g^2 = f$ . Montrer que  $g$  et  $f$  commutent. En déduire que les vecteurs propres de  $f$  sont aussi vecteurs propres de  $g$ .
- Combien y a-t-il d'endomorphismes  $g$  de  $E$  solutions de l'équation

$$g^2 = f$$

**Exercice 156** [ 03454 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $f$  possède exactement  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer que seuls les polynômes en  $f$  commutent avec  $f$  (indice : on pourra introduire un polynôme interpolateur convenable).

**Exercice 157** [ 02502 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $v \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisables vérifiant

$$u^3 = v^3$$

Montrer que  $u = v$ .

## Trigonalisabilité d'une matrice

**Exercice 158** [ 00816 ] [correction]

Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

**Exercice 159** [ 03284 ] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $AB = O_n$ .

- Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre en commun.
- Etablir que  $A$  et  $B$  sont simultanément trigonalisables.

## Trigonalisation d'une matrice

**Exercice 160** [ 00820 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- Trigonaliser la matrice  $A$ .

**Exercice 161** [ 00821 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- Trigonaliser la matrice  $A$ .

**Exercice 162** [ 03583 ] [correction]

Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 163** [ 02526 ] [correction]

Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est trigonalisable et préciser une matrice de passage.

**Exercice 164** [ 03809 ] [correction]

a) Déterminer l'ensemble  $\Omega$  des réels  $a$  tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

b) Pour  $a \in \Omega$ , trouver  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure.

## Réduction et sous-espaces stables

### Exercice 165 [00805] [correction]

Soient  $f, g$  endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose que  $f$  est diagonalisable. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \text{chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g$$

### Exercice 166 [00807] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie vérifiant :

« Tout sous-espace vectoriel stable par  $f$  admet un supplémentaire stable »

Montrer que l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

### Exercice 167 [02675] [correction]

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Déterminer les  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que tout sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$  possède un supplémentaire stable.

### Exercice 168 [00761] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B}$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $H$  un hyperplan.

- Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel  $\{u \in E^* / u(H) = \{0\}\}$ .
- Montrer que si  $H$  a pour équation  $u(x) = 0$  alors  $H$  est stable par  $f$  si, et seulement si,  $u \circ f$  est colinéaire à  $u$ .
- Soient  $A$  et  $L$  les matrices dans  $\mathcal{B}$  de  $f$  et  $u$ .

Montrer que  $H$  est stable par  $f$  si, et seulement si,  ${}^tL$  est vecteur propre de  ${}^tA$

- Déterminer les plans stables par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

### Exercice 169 [03464] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par  $u$ .

### Exercice 170 [03745] [correction]

Soient  $f$  une endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  et  $A$  sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $\lambda$  est une valeur propre non réelle de  $A$  et que  $Z \in \mathbb{C}^n$  est un vecteur propre associé.

On note  $X$  et  $Y$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de  $Z$ .

- Montrer que  $X$  et  $Y$  sont non colinéaires.
- Montrer que  $\text{Vect}(X, Y)$  est stable par  $f$ .
- On suppose que la matrice de  $f$  est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer tous les plans stables par  $f$ .

Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

### Exercice 171 [02726] [correction]

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$u^3 = \text{Id}$$

Décrire les sous-espaces stables de  $u$ .

Même question avec  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### Exercice 172 [00855] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Montrer qu'un sous-espace vectoriel  $F$  non nul est stable par  $u$  si, et seulement si, il possède une base de vecteurs propres de  $u$ .

### Exercice 173 [00856] [correction]

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par  $f$ .

## Application de la trigonalisabilité

### Exercice 174 [03551] [correction]

Expliquer pourquoi le déterminant de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est le produit des valeurs propres complexes de  $A$ , valeurs propres comptées avec multiplicité.

### Exercice 175 [00817] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $\chi_A$  scindé.

- Justifier que  $A$  est trigonalisable.
- Etablir que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Sp}(A^k) = \{\lambda^k / \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

### Exercice 176 [00818] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  de polynôme caractéristique

$$\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Déterminer une matrice à coefficients entiers de polynôme caractéristique

$$\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^p)$$

### Exercice 177 [00819] [correction]

Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}A)$$

### Exercice 178 [03120] [correction]

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

On suppose le polynôme caractéristique de  $A$  de la forme

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

Exprimer le polynôme caractéristique de  $P(A)$ .

### Exercice 179 [02389] [correction]

- Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  telles que  $AB = BA$ . Montrer que  $B \in \mathbb{K}[A]$  ou  $A \in \mathbb{K}[B]$ .
- Le résultat subsiste-t-il dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  ?

### Exercice 180 [02954] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{tr}(A^m) \rightarrow 0$  quand  $m \rightarrow +\infty$ .

Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont de module  $< 1$

### Exercice 181 [03479] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant

$$\forall m \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^m) = \text{tr}(B^m)$$

Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres.

### Exercice 182 [02521] [correction]

Pour  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on définit  $A \star B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$  par

$$A \star B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$$

- Montrer que si  $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  alors  $(A \star B)(A' \star B') = (AA') \star (BB')$ .
- En déduire que  $A \star B$  est inversible si, et seulement si,  $A$  et  $B$  sont inversibles.
- Déterminer le spectre de  $A \star B$ .

En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de  $A \star B$ .

### Exercice 183 [04072] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Déterminer les valeurs propres de  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

## Polynômes en un endomorphisme ou une matrice

### Exercice 184 [00753] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On suppose qu'il existe un vecteur  $x_0 \in E$  telle que la famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  soit libre.

Montrer que seuls les polynômes en  $u$  commutent avec  $u$ .

**Exercice 185** [ 02598 ] [correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices réelles carrées d'ordre  $n$  telles qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré au moins égal à 1 et vérifiant

$$P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A)$$

Montrer que  $A$  est inversible et que  $A$  et  $B$  commutent.

**Exercice 186** [ 03423 ] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose qu'il existe un polynôme non constant  $P \in \mathbb{K}[X]$  vérifiant

$$AB = P(A) \text{ et } P(0) \neq 0$$

Montrer que  $A$  est inversible et que  $A$  et  $B$  commutent.

**Exercice 187** [ 03033 ] [correction]

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A$  est nilpotente et qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(0) = 1$  et  $B = AP(A)$ . Montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q(0) = 1$  et  $A = BQ(B)$ .

**Exercice 188** [ 03210 ] [correction]

Soient  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $B^p = O_n$ .

a) Montrer que  $I_n + A^{-1}BA$  est inversible et exprimer son inverse.

b) On pose

$$H = \{I_n + P(B) / P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$$

Montrer que  $H$  est un sous-groupe commutatif de  $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ .

**Exercice 189** [ 02574 ] [correction]

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exprimer simplement  $P(aI_n + J)$  pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

**Lemme de décomposition des noyaux****Exercice 190** [ 00754 ] [correction]

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $u^3 = \text{Id}$ . Justifier

$$\ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id}) = E$$

**Exercice 191** [ 02681 ] [correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $a$  un élément non nul de  $\mathbb{K}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 - 3af^2 + a^2f = 0$ . Est-il vrai que  $\ker f$  et  $\text{Im} f$  sont supplémentaires ?

**Exercice 192** [ 03465 ] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  annulateur de  $u$ . On suppose qu'on peut écrire  $P = QR$  avec  $Q$  et  $R$  premiers entre eux.

Etablir

$$\text{Im} Q(u) = \ker R(u)$$

**Polynômes annulateurs****Exercice 193** [ 00822 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Justifier l'existence d'un entier  $p \geq 0$  tel que la famille  $(\text{Id}, u, \dots, u^p)$  soit liée.

En déduire que  $u$  possède un polynôme annulateur non nul.

**Exercice 194** [ 02916 ] [correction]

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

On suppose connus deux polynômes  $P$  et  $Q \in \mathbb{K}[X]$  annulateurs de  $A$  et  $B$  respectivement.

Exprimer en fonction de  $P$  et  $Q$  un polynôme annulateur de  $M$ .

**Exercice 195** [ 00823 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que les espaces  $\ker(u \circ (u - \text{Id}))$  et  $\ker(u \circ (u + \text{Id}))$  soient supplémentaires.

Montrer que  $u$  est une symétrie vectorielle.

**Exercice 196** [ 02442 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur  $P$  de  $f$  vérifiant

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) \neq 0$$

Montrer que l'image et le noyau de  $f$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 197** [ 03277 ] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur de  $u$  dont 0 est racine simple. Montrer

$$\ker u = \ker u^2$$

**Exercice 198** [ 02501 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  ayant 0 comme racine simple et tel que  $P(u) = 0$ .

a) Montrer

$$\ker u^2 = \ker u \text{ et } \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$$

b) En déduire

$$E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$$

**Exercice 199** [ 01353 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent. On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(u) = 0$ . Si  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , existe-t-il  $R \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $R(Q(u)) = 0$  ?

## Polynôme minimal

**Exercice 200** [ 00824 ] [correction]

Soient  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant un polynôme minimal  $\Pi_u$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que  $P(u)$  est inversible si, et seulement si,  $P$  et  $\Pi_u$  sont premiers entre eux.

Observer qu'alors  $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$ .

**Exercice 201** [ 00825 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires  $F$  et  $G$  stables par  $u$ . Etablir que  $\Pi_u = \operatorname{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G})$  (en notant  $\Pi_v$  le polynôme minimal d'un endomorphisme  $v$ ).

**Exercice 202** [ 00826 ] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Si  $u$  admet un polynôme minimal  $\Pi_u$  et si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$  alors montrer que  $u_F$  admet un polynôme minimal et que celui-ci divise  $\Pi_u$ .

**Exercice 203** [ 00827 ] [correction]

Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de polynôme minimal  $(X - 1)^2$  est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme

$$(1) \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 204** [ 02393 ] [correction]

Existe-t-il dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de polynôme minimal  $X^2 + 1$  ?

**Exercice 205** [ 02708 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$$

Quels sont les  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(A) = 0$  ?

**Exercice 206** [ 02727 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de polynôme minimal  $\Pi_f$ .

Montrer l'existence de  $x \in E$  tel que

$$\{P \in \mathbb{C}[X] / P(f)(x) = 0\}$$

soit l'ensemble des multiples de  $\Pi_f$ .

**Exercice 207** [ 03073 ] [correction]

Etant donné  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $\lambda$  un scalaire, on dit que  $\lambda$  est séparable si le noyau et l'image de  $u - \lambda \text{Id}$  sont supplémentaires.

- Montrer que tout scalaire non séparable de  $u$  en est une valeur propre.
- Montrer qu'un endomorphisme scindé est diagonalisable si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont séparables.
- Caractériser la séparabilité d'une valeur propre à l'aide du polynôme minimal de  $u$ .
- Soit, avec ces notations, l'endomorphisme  $m$  de  $\mathcal{L}(E)$  qui à  $v$  associe  $u \circ v$ . Comparer l'ensembles ses scalaires séparables relativement à  $m$  avec celui des scalaires séparables relativement à  $u$ .

## Polynômes annulateurs et valeurs propres

**Exercice 208** [ 00830 ] [correction]

Soit  $P$  un polynôme annulateur d'un endomorphisme  $f$ .  
Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  alors  $P(\lambda) = 0$ .

**Exercice 209** [ 03191 ] [correction]

- Montrer que si  $P$  est un polynôme annulateur d'un endomorphisme  $f$  alors  $P(\lambda) = 0$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $f$ .
- Montrer que si  $f$  vérifie

$$f^3 + 2f^2 - f - 2\text{Id} = 0$$

alors  $f$  est bijectif.

**Exercice 210** [ 00831 ] [correction]

Pour  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on note  $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$ . L'application  $\varphi : f \mapsto \tilde{f}$  est clairement un endomorphisme involutif de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Quelles en sont les valeurs propres ?

**Exercice 211** [ 00832 ] [correction]

Soit  $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'endomorphisme défini par  $T(P) = P(1 - X)$ .

- Montrer que  $T$  est un automorphisme.
- Déterminer valeurs propres de  $T$ .

**Exercice 212** [ 00833 ] [correction]

Montrer que si un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension quelconque admet un polynôme minimal  $\Pi_u$  alors les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines de son polynôme minimal.

## Théorème de Cayley Hamilton

**Exercice 213** [ 00834 ] [correction]

Déterminer un polynôme annulateur de

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

Exprimer  $A^{-1}$  lorsque celle-ci existe.

**Exercice 214** [ 00835 ] [correction]

Soit

$$A \in \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Montrer que  $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$  est annulateur de  $A$ .

**Exercice 215** [ 03693 ] [correction]

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

- $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?
- $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ?
- Soit  $\lambda$  un réel non nul ; la matrice  $B = A + \lambda I_3$  est-elle inversible ?
- Montrer qu'il existe trois réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que

$$B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

**Exercice 216** [ 03019 ] [correction]

Soit  $u$  un automorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Montrer que  $u^{-1}$  est un polynôme en  $u$ .

**Exercice 217** [ 00836 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . On suppose que  $f$  possède une unique valeur propre  $\lambda$ .

- A quelle condition l'endomorphisme est-il diagonalisable?
- Calculer le polynôme caractéristique de  $f$ .
- Justifier que l'endomorphisme  $f - \lambda \text{Id}$  est nilpotent.

**Exercice 218** [ 00839 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .  
On suppose qu'il existe  $x \in E$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $(x, f(x), \dots, f^{N-1}(x))$  soit une famille génératrice de  $E$ .

- Montrer que la famille  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .
- Démontrer que les endomorphismes commutant avec  $f$  sont les polynômes en  $f$ .

**Exercice 219** [ 00840 ] [correction]

Soient  $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $AM = MB$  avec  $M \neq O_n$ .

- Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on a  $P(A)M = MP(B)$ .
- Montrer que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre en commun.

**Exercice 220** [ 02667 ] [correction]

Montrer qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

**Exercice 221** [ 03185 ] [correction]

a) Soit  $u$  un endomorphisme inversible d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Montrer qu'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  vérifiant

$$u^{-1} = Q(u)$$

b) Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  qui envoie le polynôme  $P(X)$  sur  $P(2X)$ .

Montrer que  $u$  est un automorphisme et déterminer ses éléments propres.

Existe-t-il  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$u^{-1} = Q(u) ?$$

**Exercice 222** [ 03755 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice inversible.

Montrer que  $A$  est triangulaire supérieure si, et seulement si,  $A^k$  l'est pour tout  $k \geq 2$ .

Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice  $A$  inversible.

**Exercice 223** [ 03918 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .  
On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  les valeurs propres de  $u$ ,  $n_1, \dots, n_q$  leurs multiplicités respectives. On suppose que tout  $i$  de  $\{1, \dots, q\}$ , l'espace propre de  $u$  associé à  $\lambda_i$  est de dimension 1.

a) Si  $1 \leq i \leq q$  et  $0 \leq m \leq n_i$ , montrer que le noyau de  $(u - \lambda_i \text{Id}_E)^m$  est de dimension  $m$ .

b) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Montrer qu'il existe un polynôme unitaire  $Q$  de  $\mathbb{C}[X]$  tel que

$$F = \ker(Q(u))$$

c) Montrer que le nombre de sous-espaces de  $E$  stables par  $u$  est le nombre de diviseurs unitaires de  $\chi_u$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 224** [ 03299 ] [correction]

Soient  $n \geq 2$ ,  $A$  et  $B$  des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  de déterminants non nuls et premiers entre eux.

Montrer qu'il existe  $U$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que

$$UA + VB = I_n$$

(on pourra écrire  $\chi_A(X) = XQ_A(X) \pm \det A$ )

On donnera un exemple pour  $n = 2$ .

## Calcul de polynôme minimal

**Exercice 225** [ 00841 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer  $\mu_A$ .

**Exercice 226** [ 00845 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

- a) On suppose que  $f$  est diagonalisable. A quelle condition existe-t-il un vecteur  $x \in E$  tel que la famille formée des vecteurs  $x_1 = x, x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$  forme une base de  $E$ ?
- b) On ne suppose plus  $f$  diagonalisable mais on suppose l'existence d'une base  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $E$  du type précédent. Déterminer le commutant de  $f$ . Quel est le polynôme minimal de  $f$ ?

**Exercice 227** [ 02707 ] [correction]

Soient  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dont les éléments diagonaux valent  $a$  et les autres valent  $b$ .  $A$  est-elle diagonalisable? Quelles sont les valeurs propres de  $A$ ? Quel est le polynôme minimal de  $A$ ? Sous quelles conditions sur  $a$  et  $b$ ,  $A$  est-elle inversible? Lorsque c'est le cas trouver l'inverse de  $A$ .

**Exercice 228** [ 00843 ] [correction]

Soit  $a$  un réel. Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose

$$L(M) = aM + \text{tr}(M)I_n$$

- a) Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , trouver ses éléments propres et son polynôme minimal.
- b) Pour quels  $a$ ,  $L$  est-il un automorphisme? Trouver son inverse dans ces cas.

**Exercice 229** [ 02497 ] [correction]

Soit  $a$  un réel. Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (avec  $n \geq 2$ ), on pose

$$L(M) = aM + \text{tr}(M)I_n$$

- a) Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et trouver ses éléments propres et son polynôme minimal.
- b) Pour quels  $a$ , l'endomorphisme  $L$  est-il un automorphisme? Trouver son inverse dans ces cas.

## Diagonalisabilité des matrices scindées simples

**Exercice 230** [ 00847 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

Calculer  $A^2$ .

Selon que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  dire si la matrice  $A$  est, ou non, diagonalisable.

**Exercice 231** [ 00848 ] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$  définie par blocs

$$A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

- a) Calculer  $A^2$ .
- b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable? Déterminer les valeurs propres de  $A$  et les dimensions de ses espaces propres?

**Exercice 232** [ 00846 ] [correction]

Montrer qu'une matrice de permutation est diagonalisable.

**Exercice 233** [ 03645 ] [correction]

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$M^2 + {}^tM = I_n$$

- a) Montrer

$$M \text{ inversible si, et seulement si, } 1 \notin \text{Sp}M$$

- b) Montrer que la matrice  $M$  est diagonalisable.

**Exercice 234** [ 03469 ] [correction]

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$M^2 + {}^tM = 2I_n$$

Montrer que cette matrice  $M$  est diagonalisable.

**Exercice 235** [ 03792 ] [correction]

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $M$  une matrice carrée de taille  $n$  telle que  $M^2 + {}^tM = I_n$

Quelles sont les valeurs propres de  $M$ ? Est-elle symétrique? Est-elle diagonalisable?

**Exercice 236** [ 03192 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  telle que  $\det A = 1$  et qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  pour lequel

$$A^p = I_n$$

a) Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

On note  $\alpha$  et  $\beta$  les deux valeurs propres de  $A$ .

b) Montrer que  $|\alpha| = |\beta| = 1$ , que  $\alpha = \bar{\beta}$  et

$$|\operatorname{Re}(\alpha)| \in \{0, 1/2, 1\}$$

c) Montrer que  $A^{12} = I_2$

d) Montrer que l'ensemble  $G = \{A^n/n \in \mathbb{N}\}$  est un groupe monogène fini pour le produit matriciel.

**Exercice 237** [ 03138 ] [correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

b) Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit diagonalisable.

**Exercice 238** [ 03281 ] [correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $AB = BA$

a) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

b) Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  et  $B$  pour que  $M$  soit diagonalisable.

**Exercice 239** [ 02953 ] [correction]

Déterminer les couples  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  tels que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

**Exercice 240** [ 03027 ] [correction]

Trouver les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $M^5 = M^2$  et  $\operatorname{tr}(M) = n$ .

**Exercice 241** [ 03056 ] [correction]

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ ,  $\lambda \neq \mu$  et  $A, B, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  telles que

$$I_p = A + B$$

$$M = \lambda A + \mu B$$

$$M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$$

a) Montrer que  $M$  est inversible et exprimer  $M^{-1}$ .

On pourra calculer  $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$

b) Montrer que  $A$  et  $B$  sont des projecteurs.

c) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable? Déterminer son spectre.

**Exercice 242** [ 00708 ] [correction]

Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$  tel que

$$C = A + B, C^2 = 2A + 3B \text{ et } C^3 = 5A + 6B$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables?

**Exercice 243** [ 03291 ] [correction]

a) Montrer que, pour  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  avec  $z_1 \neq 0$ , on a l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

si, et seulement si, il existe  $n - 1$  réels positifs  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  tels que

$$\forall k \geq 2, z_k = \alpha_k z_1$$

b) Déterminer toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M^n = I_n$  et  $\operatorname{tr} M = n$

**Exercice 244** [ 03425 ] [correction]

Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

et  $m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$  canoniquement associé à  $M$ .a) En procédant à un calcul par bloc, déterminer  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^p = I_5$ .En déduire que  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ .b) Déterminer un vecteur  $x \in \mathbb{R}^5$  tel que  $x, m(x), m^2(x), m^3(x)$  et  $m^4(x)$  forme une base de  $\mathbb{R}^5$ .Quelle est la matrice de  $m$  dans cette base ?**Exercice 245** [ 00479 ] [correction]Soit  $A$  la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer un polynôme annulateur non trivial de la matrice  $A$ .b) Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant

$$M^2 + M = A$$

Justifier que la matrice  $M$  est diagonalisable et déterminer les valeurs propres possibles pour  $M$ .c) Déterminer alors les matrices  $M$  possibles à l'aide de polynômes annulateurs appropriés.**Exercice 246** [ 03810 ] [correction]a) Trouver les valeurs propres des matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer alors les matrices  $M$  solutions à l'aide de polynômes annulateurs appropriés.**Diagonalisabilité des endomorphismes scindés simples****Exercice 247** [ 00851 ] [correction]Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $p^2$  soit un projecteur.a) Quelles sont les valeurs propres possibles pour  $p$  ?b) Montrer que  $p$  est diagonalisable si, et seulement si,  $p^3 = p$ .**Exercice 248** [ 00852 ] [correction]Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$f^4 = f^2$$

On suppose que 1 et  $-1$  sont valeurs propres de  $f$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.**Exercice 249** [ 03030 ] [correction]Soient  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de projection et  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par

$$\varphi(M) = PM + MP$$

Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable**Exercice 250** [ 02720 ] [correction]Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ . On suppose  $u^3 = u$ ,  $\text{tr}u = 0$  et  $\text{tr}u^2 = 2n$ . On note

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) / uv = vu\}$$

a) Calculer la dimension  $C(u)$ .b) Quels sont les  $n$  tels que  $C(u) = \mathbb{R}[u]$  ?**Exercice 251** [ 02721 ] [correction]Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $f_A(M) = AM$ , pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .a) Montrer que si  $A^2 = A$  alors  $f_A$  est diagonalisable.b) Montrer que  $f_A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 252** [ 00853 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On pose  $f(M) = AM$  pour toute  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- L'application  $f$  est-elle un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?
- Etudier l'équivalence entre les inversibilités de  $A$  et de  $f$ .
- Etudier l'équivalence entre les diagonalisabilités de  $A$  et de  $f$ .

**Exercice 253** [ 03646 ] [correction]

Soient  $f, u, v$  trois endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose qu'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  distincts tels que

$$\begin{cases} \text{Id} = u + v \\ f = \alpha u + \beta v \\ f^2 = \alpha^2 u + \beta^2 v \end{cases}$$

- Montrer que  $f$  est diagonalisable.
- Justifier que  $u$  et  $v$  sont des projections vectorielles dont on précisera noyau et image en fonction des espace  $\ker(f - \alpha \text{Id})$  et  $\ker(f - \beta \text{Id})$ .
- Exprimer  $f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $u, v$ .

**Exercice 254** [ 03028 ] [correction]

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  et  $u, v, f$  trois endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie vérifiant

$$\begin{cases} f = \alpha u + \beta v \\ f^2 = \alpha^2 u + \beta^2 v \\ f^3 = \alpha^3 u + \beta^3 v \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 255** [ 03798 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non triviaux. On note  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  et parallèlement à  $G$ . Enfin on pose pour  $f$  endomorphisme de  $F$

$$\phi(f) = p \circ f \circ s$$

ce qui définit un endomorphisme  $\phi$  sur  $\mathcal{L}(E)$ .

- Montrer que  $\phi$  annule un polynôme « simple ». L'endomorphisme  $\phi$  est-il diagonalisable ?
- Déterminer les éléments propres de  $\phi$ .  
(indice : on pourra considérer les matrices de  $p$  et  $s$  dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ )

**Exercice 256** [ 03744 ] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $A, B \in E$  fixées non nulles, on définit  $f \in \mathcal{L}(E)$  par

$$\forall M \in E, f(M) = M + \text{tr}(AM)B$$

- Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de  $f$  et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $(A, B)$  pour que  $f$  soit diagonalisable. Quels sont alors les éléments propres de  $f$  ?
- Déterminer  $\dim C$  où

$$C = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$$

Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

**Exercice 257** [ 02410 ] [correction]

Soient  $n \geq 2$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par

$$f(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$$

où  $\text{tr}$  désigne la forme linéaire trace.

Etudier la réduction de l'endomorphisme  $f$  et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

**Exercice 258** [ 02513 ] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie tel qu'il existe deux réels non nuls distincts  $a$  et  $b$  vérifiant

$$(u - a\text{Id})(u - b\text{Id}) = 0$$

Soient

$$p = \frac{1}{b-a}(u - a\text{Id}) \text{ et } q = \frac{1}{a-b}(u - b\text{Id})$$

- Calculer  $p + q$ ,  $p \circ p$ ,  $q \circ q$  et  $q \circ p$ .
- Montrer que  $E = \ker p \oplus \ker q$ .
- Trouver les éléments propres de  $u$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

## Etude de matrice ou d'endomorphisme vérifiant une identité polynomiale

**Exercice 259** [ 00849 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$f^3 = 4f$$

Montrer que la trace de  $f$  est un entier pair.

**Exercice 260** [ 00850 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A^3 - A^2 + A - I = O$$

Montrer que  $\det(A) = 1$ .

**Exercice 261** [ 02608 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$A^3 + I_n = O_n$$

Montrer que la trace de  $A$  est un entier.

**Exercice 262** [ 02714 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

Montrer que la matrice  $A$  est de rang pair.

**Exercice 263** [ 00838 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  vérifiant :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, A^n = I_2$$

Montrer que  $A^{12} = I_2$ .

**Exercice 264** [ 02652 ] [correction]

On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  et on note

$$E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) / \exists m \in \mathbb{N}^*, A^m = I_n\}$$

Pour  $A \in E_n$ , on pose

$$\omega(A) = \min \{m \in \mathbb{N}^* / A^m = I_n\}$$

Montrer que  $\omega(E_n)$  est fini.

## Diagonalisabilité et endomorphismes induits

**Exercice 265** [ 00854 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Montrer que la restriction de  $f$  à tout sous-espace vectoriel  $F \neq \{0\}$  stable est diagonalisable.

**Exercice 266** [ 03038 ] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour lequel il existe une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  vérifiant

$$u(e_1) = e_1 \text{ et } u(e_2) = e_1 + e_2$$

L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 267** [ 00857 ] [correction]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes diagonalisables d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Montrer que  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisables si, et seulement si, chaque sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

**Exercice 268** [ 00858 ] [correction]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes diagonalisables d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Montrer que  $f$  et  $g$  commutent si, et seulement si,  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisables.

## Diagonalisabilités des polynômes en un endomorphisme

**Exercice 269** [ 00859 ] [correction]

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

- On suppose que  $u$  est diagonalisable, montrer que  $P(u)$  l'est aussi.
- Que dire de la réciproque ?

**Exercice 270** [ 00860 ] [correction]

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

a) On suppose que  $f$  est diagonalisable. Montrer que  $f^2$  est diagonalisable et  $\ker f = \ker f^2$ .

On étudie désormais la propriété inverse.

b) Par un exemple, montrer que si  $f^2$  est diagonalisable,  $f$  n'est pas nécessairement diagonalisable.

c) Montrer que si  $f^2$  est diagonalisable et si  $\ker f = \ker f^2$  alors  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 271** [ 00861 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

a) Énoncer un critère de diagonalisabilité en terme de polynôme annulateur.

b) On suppose  $u \in \text{GL}(E)$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $u^2$  l'est.

c) Généralisation : Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On suppose  $P'(u) \in \text{GL}(E)$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $P(u)$  l'est.

**Exercice 272** [ 00862 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $P$  un polynôme complexe, on suppose que  $P(u)$  est diagonalisable et que la valeur prise par  $P$  sur toute racine complexe de  $P'$  n'est pas valeur propre de l'endomorphisme  $P(u)$ .

Montrer que  $u$  est diagonalisable.

**Exercice 273** [ 02524 ] [correction]

Soient  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que  $B = A^p$ .

Montrer que  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $B$  l'est.

## Trigonalisabilité et polynôme annulateur

**Exercice 274** [ 00866 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que 0 soit la seule valeur propre de  $A$ .

a) Montrer que  $A^n = 0$ .

b) Calculer  $\det(A + I_n)$ .

c) Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  commutant avec  $A$ . Calculer  $\det(A + M)$ .

d) Inversement, quelles sont les matrices  $A$  vérifiant :

$$\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), AM = MA \Rightarrow \det(A + M) = \det M ?$$

**Exercice 275** [ 03239 ] [correction]

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$f^2 = f^3 \text{ et } \dim \ker(f - \text{Id}) = 1$$

Montrer l'existence d'une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \{0, 1\}$$

**Exercice 276** [ 00864 ] [correction]

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ( $n \geq 3$ ) vérifiant

$$\text{rg} A = 2, \text{tr} A = 0 \text{ et } A^n \neq O_n$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 277** [ 01948 ] [correction]

Trouver les matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\text{tr} M = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = O_n$$

**Exercice 278** [ 02713 ] [correction]

Trouver les  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \text{ et } \text{tr} A = 8$$

## Nilpotence

**Exercice 279** [ 00783 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente.

a) Calculer  $\chi_A$ .

b) Même question avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 280** [ 00863 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente.

a) Montrer que  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

b) Le résultat est-il encore vrai pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 281** [ 03372 ] [correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que la matrice  $A$  est nilpotente et que la matrice  $B$  commute avec  $A$ . Que dire de  $\text{tr}(AB)$  ?

**Exercice 282** [ 00867 ] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ .

a) Montrer que  $A^n = 0$ .

b) Calculer  $\det(A + I_n)$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $AM = MA$ .

c) Calculer  $\det(A + M)$  (on pourra commencer par le cas où  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ).

d) Le résultat est-il vrai si  $M$  ne commute pas avec  $A$  ?

**Exercice 283** [ 01677 ] [correction]

Soient  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente telles que

$$AN = NA$$

Montrer que

$$\det(A + N) = \det A$$

**Exercice 284** [ 02724 ] [correction]

Soit  $A$  une matrice carrée réelle d'ordre  $n$ .

Montrer que  $A$  est nilpotente si, et seulement si,

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{tr} A^p = 0$$

**Exercice 285** [ 00865 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

a) Montrer que l'endomorphisme  $f$  est nilpotent si, et seulement si,

$$\text{Sp}(f) = \{0\}$$

b) Montrer que l'endomorphisme  $f$  est nilpotent si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \text{tr}(f^k) = 0$$

**Exercice 286** [ 00837 ] [correction]

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Montrer que  $u$  possède une seule valeur propre si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $u - \lambda \text{Id}_E$  soit nilpotent.

**Exercice 287** [ 02690 ] [correction]

Soient  $A$  et  $B$  des matrices complexes carrées d'ordre  $n$ . On suppose les matrices  $A + 2^k B$  nilpotentes pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ . Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont nilpotentes.

**Exercice 288** [ 00938 ] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$  deux à deux distincts dans  $\mathbb{C}$ . On suppose, pour  $1 \leq i \leq n+1$ , que  $A + \lambda_i B$  est nilpotente.

Montrer que  $A$  et  $B$  sont nilpotentes.

**Exercice 289** [ 03023 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On note  $\mathcal{I}_1 = \{P \in \mathbb{C}[X] / P(u) = 0\}$  et  $\mathcal{I}_2 = \{P \in \mathbb{C}[X] / P(u) \text{ est nilpotent}\}$ .

a) Montrer que  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  sont des idéaux non nuls de  $\mathbb{C}[X]$ .

On note  $P_1$  et  $P_2$  leurs générateurs unitaires respectifs.

b) Etablir un lien entre  $P_1$  et  $P_2$ .

c) Montrer l'existence de  $Q \in \mathcal{I}_2$  tel que  $u - Q(u)$  est diagonalisable

**Exercice 290** [ 03095 ] [correction]

Soit  $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B) \text{ et } \Phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \Phi(I_2)$$

a) Démontrer que  $\Phi(O_2) = 0$ .

b) Si  $A$  est nilpotente, démontrer que  $\Phi(A) = 0$ .

c) Soient  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $B$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en permutant les lignes de  $A$ .

Démontrer que  $\Phi(B) = -\Phi(A)$ .

d) Démontrer que  $A$  est inversible si, et seulement si,  $\Phi(A) \neq 0$ .

**Exercice 291** [ 01956 ] [correction]

Soient  $n \geq 2$  et  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  où  $a_{i,i+1} = 1$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , les autres coefficients étant nuls.

a) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

b) Existe-t-il  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $B^2 = A$  ?

**Exercice 292** [03253] [correction]

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

a) Montrer qu'il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant au voisinage de 0

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$$

b) Etablir que  $X^n$  divise alors le polynôme  $P_n^2(X) - X - 1$ .

c) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f^n = \tilde{0}$ .

Montrer qu'il existe un endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant

$$g^2 = \text{Id}_E + f$$

d) Soit maintenant  $f$  un endomorphisme de  $E$  ne possédant qu'une valeur propre  $\lambda$ .

Montrer que  $(f - \lambda \text{Id}_E)^n = \tilde{0}$  et conclure qu'il existe un endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant

$$g^2 = f$$

**Exercice 293** [03477] [correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a) On suppose  $A^3 = A^2$ . Montrer que  $A^2$  est diagonalisable et que  $A^2 - A$  est nilpotente.

b) Plus généralement on suppose  $A^{k+1} = A^k$  pour un certain entier  $k > 0$ .

Etablir l'existence d'un entier  $p > 0$  tel que  $A^p$  est diagonalisable et  $A^p - A$  nilpotente.

**Exercice 294** [03763] [correction]

Pour  $n \geq 2$ , on note  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ne contenant aucune matrice inversible.

a) Montrer que  $H$  contient toutes les matrices nilpotentes.

b) En déduire que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  rencontre  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 295** [03765] [correction]

Soient  $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $M$  matrice nilpotente.

a) On suppose  $MA = O_n$ . Montrer que les matrices  $A + M$  et  $A$  ont le même polynôme caractéristique.

b) Même question en supposant cette fois-ci  $AM = O_n$ .

**Exercice 296** [03616] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$ .

a) Montrer que  $L : E \rightarrow E^*$ ,  $A \mapsto L_A$  où  $L_A$  est la forme linéaire  $M \mapsto \text{tr}(AM)$  est un isomorphisme

d'espaces vectoriels. En déduire une description des hyperplans de  $E$ .

b) Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice triangulaire supérieure non nulle et  $H = \ker L_T$ . On note  $T_n^+$  (respectivement  $T_n^-$ ) le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) à diagonales nulles.

Déterminer  $H \cap T_n^+$ .

En discutant selon que  $T$  possède ou non un coefficient non nul (au moins) hors de la diagonale, déterminer la dimension de  $H \cap T_n^-$ .

c) Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite nilpotente s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $A^k = 0$ .

Prouver que les éléments de  $T_n^+ \cup T_n^-$  sont des matrices nilpotentes.

En déduire que  $H$  contient au moins  $n^2 - n - 1$  matrices nilpotentes linéairement indépendantes.

d) Montrer que tout hyperplan de  $E$  contient au moins  $n^2 - n - 1$  matrices nilpotentes linéairement indépendantes.

Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

**Exercice 297** [03474] [correction]

Soient  $\mathbb{K}$  un corps et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  nilpotentes commutant deux à deux.

Montrer

$$A_1 A_2 \dots A_n = O_n$$

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Soit  $y \in \text{Im}u$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$  et alors

$$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}u$$

Ainsi,  $\text{Im}u$  est stable par  $v$ .

Soit  $x \in \ker u$ . On a  $u(x) = 0_E$  donc

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$$

et  $v(x) \in \ker u$ . Ainsi  $\ker u$  est stable par  $v$ .

La réciproque est fautive, si  $u$  est un automorphisme il est certain que  $\text{Im}u = E$  et  $\ker u = \{0_E\}$  seront stables par  $v$  alors qu'il n'y a aucune raison que  $u$  et  $v$  commutent.

### Exercice 2 : [énoncé]

Supposons  $f \circ p = p \circ f$ . Pour tout  $x \in \ker p$ ,  $p(f(x)) = f(p(x)) = 0$  donc  $f(x) \in \ker p$ .

Rappelons  $\text{Im}p = \ker(p - \text{Id})$ . Pour tout  $x \in \text{Im}p$ ,  $p(f(x)) = f(p(x)) = f(x)$  donc  $f(x) \in \text{Im}p$ .

Inversement. Supposons  $\ker p$  et  $\text{Im}p$  stables par  $f$ . Pour tout  $x \in E$ , on peut écrire  $x = u + v$  avec  $u \in \ker p$  et  $v \in \text{Im}p$ . On a alors  $f(p(x)) = f(v)$  et  $p(f(x)) = p(f(u) + f(v)) = f(v)$  donc  $p \circ f = f \circ p$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

a) Soit  $\vec{x} \in \ker f$ ,  $f(g(\vec{x})) = g(f(\vec{x})) = g(0_E) = 0_E$  donc  $g(\vec{x}) \in \ker f$ . Ainsi  $\ker f$  est stable par  $g$ .

Soit  $\vec{y} \in \text{Im}f$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $\vec{y} = f(\vec{x})$  et alors

$$g(\vec{y}) = g(f(\vec{x})) = f(g(\vec{x})) \in \text{Im}f \text{ donc } \text{Im}f \text{ est stable par } g.$$

b) ( $\Rightarrow$ ) immédiat via a).

( $\Leftarrow$ ) Si  $\text{Im}p$  et  $\ker p$  sont stables par  $f$  alors, puisque ces derniers sont supplémentaires dans  $E$ . Soit  $\vec{x} \in E$ , on peut écrire  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$  avec  $\vec{u} \in \text{Im}p$  et  $\vec{v} \in \ker p$ .

$$\text{On a alors } (f \circ p)(\vec{x}) = f(p(\vec{u}) + p(\vec{v})) = f(\vec{u}) \text{ et}$$

$$p \circ f(\vec{x}) = p(f(\vec{u}) + f(\vec{v})) = f(\vec{u}) \text{ car } f(\vec{u}) \in \text{Im}p \text{ et } f(\vec{v}) \in \ker p. \text{ Ainsi}$$

$$\forall \vec{x} \in E, (f \circ p)(\vec{x}) = (p \circ f)(\vec{x})$$

puis  $p$  et  $f$  commutent.

### Exercice 4 : [énoncé]

a) Rappelons que les suites  $(\ker u^p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\text{Im}u^p)_{p \in \mathbb{N}}$  sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion. La suite  $(\dim \ker u^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante et majorée d'entiers naturels, elle est donc stationnaire :

$\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \dim \ker u^p = \dim \ker u^n$  or  $\ker u^p \supset \ker u^n$  donc  $\ker u^p = \ker u^n$  puis  $N = \ker u^n$ . Aussi

$\dim \text{Im}u^p = \dim E - \dim \ker u^p = \dim E - \dim \ker u^n = \dim \text{Im}u^n$  et  $\text{Im}u^p \subset \text{Im}u^n$  donc  $\text{Im}u^p = \text{Im}u^n$  puis  $I = \text{Im}u^n$ .

b)  $\dim N + \dim I = \dim \ker u^n + \dim \text{Im}u^n = \dim E$  en vertu du théorème du rang. Soit  $x \in N \cap I$ . Il existe  $a \in E$  tel que  $x = u^n(a)$  et alors  $u^n(x) = 0$  donc  $u^{2n}(a) = 0$ . Ainsi  $a \in \ker u^{2n} = \ker u^n$  donc  $x = u^n(a) = 0$ . Ainsi  $N \cap I = \{0\}$  d'où  $E = N \oplus I$ .

$u$  et  $u^n$  commutent donc  $N$  et  $I$  sont stables par  $u$ .

$(u_N)^n = (u^n)_{\ker u^n} = 0$  donc  $u_N$  est nilpotente.

$\text{Im}u^{n+1} = \text{Im}u^n$  donne  $u(\text{Im}u^n) = \text{Im}u^n$  donc  $u_I$  est surjective puis bijective car  $\dim \text{Im}u^n < +\infty$ .

c) Par supplémentarité :  $\dim E = \dim F + \dim G = \dim N + \dim I$ .

Il existe  $p \in \mathbb{N}$ , tel que  $(u_F)^p = 0$  donc  $F \subset \ker u^p \subset N$ .

$u_G$  est bijective donc  $(u_G)^n$  aussi or  $G = \text{Im}(u_G)^n \subset \text{Im}(u^n) = I$ .

On a alors  $\dim F \leq \dim N$ ,  $\dim G \leq \dim I$  et  $\dim F + \dim G = \dim N + \dim I$  donc  $\dim F = \dim N$  et  $\dim G = \dim I$ . Par inclusion et égalité des dimensions  $F = N$  et  $G = I$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

a)  $\ker u^{k-1}$  est un sous-espace vectoriel de  $\ker u^k$  et comme on se place en dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

b)

$$E = \ker u^p = \ker u^{p-1} \oplus F_p = \ker u^{p-2} \oplus F_{p-1} \oplus F_p = \dots = \ker u^0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

avec  $\ker u^0 = \{0\}$ .

c)  $\ker u^{k-1}$  dans  $\ker u^k$ . On a  $E = \ker u^p = \ker u^{p-1} \oplus F_p = \dots = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ . Dans une base adaptée à cette décomposition la matrice de  $u$  est :

$$\begin{pmatrix} (0) & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$$

et c'est donc une matrice triangulaire supérieure stricte.

### Exercice 6 : [énoncé]

a) Supposons  $\lambda a + \mu f(a) = 0_E$  (1)

En appliquant  $f$ , on obtient  $-\mu a + \lambda f(a) = 0_E$  (2).

La combinaison  $\lambda(1) - \mu(2)$  donne  $(\lambda^2 + \mu^2)a = 0_E$ , or  $a \neq 0_E$  donc  $\lambda = \mu = 0$  puisque  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

b) Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$  la propriété

« il existe  $a_1, \dots, a_k$  non nuls tels que les espaces  $F(a_1), \dots, F(a_k)$  sont en somme directe » ou « il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  et il existe  $a_1, \dots, a_p$  tel que  $E = F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_p)$  »

Pour  $k = 1$  la propriété est claire car  $E \neq \{0_E\}$ .

Supposons la propriété établie au rang  $k$ .

Puisque la propriété est supposée vraie au rang  $k$  l'une des deux alternatives définissant celle-ci est vérifiée. Si c'est la seconde alors la propriété est immédiate vérifiée au rang  $k + 1$ . Sinon, c'est qu'il existe  $a_1, \dots, a_k$  vecteurs non nuls de  $E$  tels que les espaces  $F(a_1), \dots, F(a_k)$  sont en somme directe.

Si  $E = F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_k)$  alors la propriété est vérifiée au rang  $k + 1$  en choisissant  $p = k$ .

Sinon, il existe  $a_{k+1} \in E$  tel que  $a_{k+1} \notin F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_k)$ .

Montrons qu'alors les espaces  $F(a_1), \dots, F(a_k), F(a_{k+1})$  sont en somme directe.

Supposons  $x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} = 0_E$  (1) avec  $x_j = \lambda_j a_j + \mu_j f(a_j) \in F(a_j)$ .

En appliquant  $f$ , on obtient  $y_1 + \dots + y_k + y_{k+1} = 0_E$  (2) avec

$$y_j = -\mu_j a_j + \lambda_j f(a_j).$$

La combinaison  $\lambda_{k+1}(1) - \mu_{k+1}(2)$  donne alors

$$(\lambda_{k+1}^2 + \mu_{k+1}^2)a_{k+1} \in F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_k) \text{ et donc } \lambda_{k+1} = \mu_{k+1} = 0 \text{ car on a choisi } a_{k+1} \notin F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_k).$$

On en déduit  $x_{k+1} = 0_E$  et la relation (1) devient  $x_1 + \dots + x_k = 0_E$  qui donne  $x_1 = \dots = x_k = 0_E$  car les espaces  $F(a_1), \dots, F(a_k)$  sont en somme directe.

Récurrence établie.

c) Ce qui précède assure  $\dim E = 2p$  et dans la base  $(a_1, f(a_1), \dots, a_p, f(a_p))$ , la matrice de  $f$  est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 7 : [énoncé]

a) L'image d'un endomorphisme est toujours stable par celui-ci... En effet

$$\forall x \in \text{Im}u, u(x) \in \text{Im}u$$

b) Si  $x \in \text{Im}u$  alors il existe  $a \in E$  tel que  $x = u(a)$ . On a alors

$$u^2(x) = u^3(a) = -u(a) = -x$$

c) En vertu de ce qui précède,  $v^2 = -\text{Id}$  donc  $v$  est un isomorphisme et  $v^{-1} = -v$ .

d) D'une part

$$\det(v^{-1}) = \frac{1}{\det v}$$

et d'autre part

$$\det(-v) = (-1)^{\dim \text{Im}u} \det v$$

donc

$$(-1)^{\dim \text{Im}u} > 0$$

On en déduit que la dimension de l'image de  $u$  est paire.

### Exercice 8 : [énoncé]

Les  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathbb{K}[X]$  sont des sous-espaces vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable.

Si  $F$  est de dimension finie alors les polynômes de  $F$  sont de degrés bornés.

Soit  $P$  un polynôme de  $F$  de degré  $n$  maximal. On a  $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ .

Or la famille des polynômes  $P, P', P'', \dots, P^{(n)}$  est de degrés étagés et formés d'éléments de  $F$  car  $F$  est stable pour la dérivation donc

$$\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(P, P', \dots, P^{(n)}) \subset F \text{ puis } F = \mathbb{K}_n[X].$$

Si  $F$  n'est pas de dimension finie alors pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $F \not\subset \mathbb{K}_m[X]$  et donc il existe  $P \in F$  tel que  $n = \deg P > m$ . Or en raisonnant comme ci-dessus, on démontre  $\mathbb{K}_n[X] \subset F$  et donc  $\mathbb{K}_m[X] \subset F$ . Ainsi  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_m[X] \subset F$  donc  $F = \mathbb{K}[X]$ .

Finalement les  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathbb{K}[X]$  sont les seuls sous-espace vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation.

### Exercice 9 : [énoncé]

a) Si  $x$  est vecteur propre de  $u$  alors  $D = \text{Vect}(x)$  est stable par  $u$ . C'est contraire à l'hypothèse de travail car  $D$  est un sous-espace vectoriel non nul distinct de  $E$ .

On en déduit que  $u$  ne possède pas de valeurs propres.

b) Puisque  $x \neq 0_E$ , il existe un plus grand entier  $p \geq 1$  tel que la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre.

Par définition de  $p$ , on a alors  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), u^p(x))$  liée et donc  $u^p(x) \in \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ . On en déduit que le sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est stable par  $u$ .

Puisque ce sous-espace vectoriel est non nul, on a  $F = E$  et donc par dimension  $p = n$ . Au final, la famille  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .

La matrice de  $u$  dans cette base a la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & & (0) & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec  $a_k$  les scalaires donnés par la relation

$$u^n(x) = a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$$

c) En composant la relation précédente avec  $u$ , on obtient

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, u^n(u^k(x)) = a_0u^k(x) + a_1u(u^k(x)) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(u^k(x))$$

Puisque la famille  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ , on en déduit

$$\forall y \in E, u^n(y) = a_0y + a_1u(y) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(y)$$

On en déduit que pour  $y \neq 0_E$ , la matrice de  $u$  dans la base  $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$  est la même que la précédente.

**Exercice 10 :** [énoncé]

a) Le cas  $n = 1$  est immédiat car  $v$  est alors nécessairement nul.

Le cas  $v = 0$  est tout aussi immédiat.

b)  $F = \text{Im}v$  est stable par  $u$  et  $v$  et puisque  $v$  n'est pas bijectif,  $1 \leq \dim F < n$  : on pourra donc appliquer l'hypothèse de récurrence sur  $F$ . Dans une base adaptée à  $F$ , les matrices de  $u$  et  $v$  sont de la forme

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right) \text{ et } \left( \begin{array}{c|c} D & E \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

On a alors  $\det(u + v) = \det(A + D) \times \det C$ .

c)  $A$  et  $D$  sont associées aux endomorphismes induits par  $u$  et  $v$  sur  $F$ . Ces endomorphismes induits vérifient les hypothèses initiales et donc  $\det(A + D) = \det A$  puis  $\det(u + v) = \det A \times \det C = \det u$ .

**Exercice 11 :** [énoncé]

Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$

$$E = S + \text{Im}u^k$$

La propriété est vraie par hypothèse pour  $k = 1$ .

Supposons la propriété vraie au rang  $k \geq 1$ .

On a évidemment

$$S + \text{Im}u^{k+1} \subset E$$

Inversement, soit  $x \in E$ . Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$x = a + u^k(b) \text{ avec } a \in S \text{ et } b \in E$$

Or, on peut aussi écrire

$$b = a' + u(c) \text{ avec } a' \in S \text{ et } c \in E$$

On en déduit

$$x = a + u^k(a') + u^{k+1}(c) \in S + \text{Im}u^{k+1}$$

car  $a + u^k(a') \in S$  puisque  $S$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$ . Ainsi  $E \subset S + \text{Im}u^{k+1}$  puis l'égalité.

Récurrence établie.

En appliquant cette propriété à l'indice de nilpotence de  $u$ , on obtient

$$E = S$$

**Exercice 12 :** [énoncé]

a)  $\text{Im}u$  est stable pour  $u$  donc  $u_{E_2}$  est bien défini. Par le théorème du rang la restriction de  $u$  à tout supplémentaire de  $\ker u$  définit un isomorphisme avec  $\text{Im}u$ . Ici cela donne  $u_{E_2}$  automorphisme.

b) Soient  $u, v \in \Gamma$ . Si  $x \in \ker(v \circ u)$  alors  $u(x) \in \text{Im}u \cap \ker v$  donc  $u(x) \in E_1 \cap E_2$  et  $u(x) = 0$  puis  $x \in E_1$ . Ainsi  $\ker(v \circ u) \subset E_1$  et l'inclusion réciproque est immédiate.

$\text{Im}(v \circ u) = v(u(E)) = v(E_2) = E_2$  car  $v_{E_2}$  est un automorphisme de  $E_2$ . Ainsi  $v \circ u \in \Gamma$ .

c) Si  $\phi(u) = \phi(v)$  alors  $u_{E_2} = v_{E_2}$ . Or  $u_{E_1} = 0 = v_{E_1}$  donc les applications linéaires  $u$  et  $v$  coïncident sur des sous-espaces vectoriels supplémentaires et donc  $u = v$ .

d) Une application linéaire peut être définie de manière unique par ses restrictions linéaires sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Pour  $w \in \text{GL}(E_2)$  considérons  $u \in \mathcal{L}(E)$  déterminé par  $u_{E_1} = 0$  et  $u_{E_2} = w$ . On vérifie aisément  $E_1 \subset \ker u$  et  $E_2 \subset \text{Im}u$ . Pour  $x \in \ker u$ ,  $x = a + b$  avec  $a \in E_1$  et  $b \in E_2$ . La relation  $u(x) = 0$  donne alors  $u(a) + u(b) = 0$  c'est-à-dire  $w(b) = 0$ . Or  $w \in \text{GL}(E_2)$  donc  $b = 0$  puis  $x \in E_1$ . Ainsi  $\ker u \subset E_1$  et finalement  $\ker u = E_1$ . Pour  $y \in \text{Im}(u)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ . Or on peut écrire  $x = a + b$  avec  $a \in E_1$  et  $b \in E_2$ . La relation  $y = u(x)$  donne alors  $y = u(a) + u(b) = w(b) \in E_2$ .

Ainsi  $\text{Im}u \subset E_1$  et finalement  $\text{Im}u = E_1$ . On peut conclure que  $u \in \Gamma$  et  $\tilde{u} = w : \phi$  est surjectif.

e)  $\varphi$  est un morphisme bijectif : il transporte la structure de groupe existant sur  $\text{GL}(E_2)$  en une structure de groupe sur  $(\Gamma, \circ)$ . Le neutre est l'antécédent de  $\text{Id}_{E_2}$  c'est-à-dire la projection sur  $E_2$  parallèlement à  $E_1$ .

### Exercice 13 : [énoncé]

a) L'application  $T$  est évidemment linéaire et est à valeurs dans  $E$ .

Soit  $g \in E$ . Montrons que l'équation  $Tf = g$  admet une solution unique.

Unicité : Si  $Tf = g$  alors  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle linéaire  $y' + y = g$  vérifiant  $y(0) = 0$ . Par le théorème de Cauchy ceci détermine  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  de façon unique et donc  $f$  aussi.

Existence : La dérivée de la fonction solution  $y' + y = g$  vérifiant  $y(0) = 0$  est solution.

b) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par  $T$ . Notons  $I$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $I(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Puisque  $F$  est stable par  $T$ ,  $F$  est aussi stable par  $I$ . L'endomorphisme induit par  $I$  sur le sous-espace vectoriel de dimension finie  $F$  admet un polynôme minimal

$\pi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ . On a alors pour tout  $f \in F$  l'égalité

$y + a_{n-1}y' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$  en notant  $y = I^n(f)$ . De plus, on a les conditions initiales  $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$  ce qui donne  $y = 0$  puis  $f = 0$ . Ainsi  $F = \{0\}$ .

Finalement, l'espace nul est le seul espace de dimension finie stable par  $T$ . Quel intérêt au « impair » ?

### Exercice 14 : [énoncé]

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base  $\mathcal{B}$  et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  représenté par la matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$ . On a  $u^2 = 0$  et  $u \neq 0$ . Notons que cela entraîne  $\dim \text{Im}u = 1$  et  $\dim \ker u = 2$ .

Cherchons une base  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = B$ . Après analyse du problème : Considérons  $\varepsilon_1 \notin \ker(u)$  et  $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$ .  $\varepsilon_2$  est un vecteur non nul de  $\ker u$  qui peut être complétée en une base  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $\ker u$ . Formons

$\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Si  $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0$  alors en appliquant  $u$ ,  $\lambda_1 u(\varepsilon_1) = 0$  donc  $\lambda_1 = 0$  puis  $\lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0$  entraîne  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  puisque  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est libre.

Finalement la famille  $\mathcal{B}'$  est libre et c'est donc bien une base de  $E$ . La matrice de  $u$  dans cette base est bien la matrice  $B$ . On peut conclure.

### Exercice 15 : [énoncé]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$ .

On vérifie  $f^{n-1} \neq 0$  et  $f^n = 0$ .

Soit  $x \notin \ker f^{n-1}$ . Un tel  $x$  existe puisque  $f^{n-1} \neq 0$ .

Considérons  $\mathcal{B}' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$ .

Supposons

$$\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) + \dots + \lambda_1 f(x) + x = 0$$

En y appliquant successivement  $f^{n-1}, \dots, f, \text{Id}$  on obtient  $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_{n-2} = 0$  puis  $\lambda_{n-1} = 0$  car  $f^{n-1}(x) \neq 0$ .

$\mathcal{B}'$  est une famille libre formée de  $n = \dim E$  vecteurs, c'est donc une base de  $E$ .

La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est égale à  $B$ .

Les matrices  $A$  et  $B$  sont donc semblables.

### Exercice 16 : [énoncé]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$ .

On observe que  $\text{Im}f$  et  $\ker f$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à cette supplémentarité, la matrice de  $f$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $A'$  matrice de taille  $r$ . De plus  $r = \text{rg}A = \text{rg}B = \text{rg}A'$  donc  $A'$  est inversible.

### Exercice 17 : [énoncé]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$ .

On observe  $r = \text{rg}f$ ,  $f \neq 0$  et  $f^2 = 0$  de sorte que  $\text{Im}f \subset \ker f$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Im}f$  complétée en  $(e_1, \dots, e_{n-r})$  base de  $\ker f$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , il existe  $e_{n-r+i}$  vecteur de  $E$  tel que  $f(e_{n-r+i}) = e_i$ .

Montrons que  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre.

Supposons

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} + \lambda_{n-r+1} e_{n-r+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0 \quad (1).$$

En appliquant  $f$  à la relation (1), on obtient  $\lambda_{n-r+1} e_1 + \dots + \lambda_n e_r = 0$  et donc

$\lambda_{n-r+1} = \dots = \lambda_n = 0$  car  $(e_1, \dots, e_r)$  libre.

La relation (1) devient  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$  et donc

$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$  car  $(e_1, \dots, e_{n-r})$  libre.

La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre et formée de  $n = \dim E$  vecteurs de  $E$  c'est donc une base de  $E$  et la matrice de  $f$  dans celle-ci est égale à  $B$ . On peut conclure que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**Exercice 18 :** [énoncé]

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ .

Analyse : Cherchons une base  $(e_1, e_2, e_3)$  telle que la matrice de  $f$  dans cette base soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors  $f(e_1) = 0$ ,  $f(e_2) = e_3$  et  $f(e_3) = -e_2$ . On en déduit  $e_1 \in \ker f$ ,  $e_2 \in \ker(f^2 + \text{Id})$  et  $e_3 = f(e_2)$ .

Synthèse : L'endomorphisme  $f$  vérifie  $f \circ (f^2 + \text{Id}) = 0$ . Par l'absurde, si  $f$  est inversible alors  $f^2 + \text{Id} = 0$  et donc  $\det(f^2) = \det(-\text{Id}) = -1$ . Or

$\det(f^2) = (\det f)^2 \geq 0$ . C'est absurde. On en déduit  $\ker f \neq \{0\}$ . Soit  $e_1$  un vecteur non nul de  $\ker f$ .

Puisque  $(f^2 + \text{Id}) \circ f = 0$ , on a  $\text{Im} f \subset \ker(f^2 + \text{Id})$ . Or  $f \neq 0$  donc  $\text{Im} f \neq \{0\}$  puis  $\ker(f^2 + \text{Id}) \neq \{0\}$ .

Soit  $e_2$  un vecteur non nul de  $\ker(f^2 + \text{Id})$  et  $e_3 = f(e_2)$ . On vérifie  $f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$ .

Il reste à observer que la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Supposons  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$  (1) avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ .

En appliquant deux fois  $f$  à cette relation, on obtient  $\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2 = 0$  (2) et  $-\lambda_2 e_2 - \lambda_3 e_3 = 0$  (3).

La combinaison d'équations  $\lambda_3(2) + \lambda_2(3)$  donne  $(\lambda_3^2 + \lambda_2^2)e_2 = 0$ .

Puisque le vecteur  $e_2$  a été choisi non nul, on en déduit  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  puis la relation (1) donne  $\lambda_1 = 0$  puisque le vecteur  $e_1$  a été choisi non nul.

Finalement,  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et la matrice de  $f$  dans celle-ci est celle voulue.

On peut conclure que  $A$  est semblable à la matrice proposée.

**Exercice 19 :** [énoncé]

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $M$ .

Analyse : Cherchons une base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  telle que :

$f(e_1) = e_2, f(e_2) = -e_1, f(e_3) = e_4$  et  $f(e_4) = -e_3$ .

La connaissance de  $e_1$  et  $e_3$  suffit pour former  $e_2$  et  $e_4$  avec les quatre relations voulues.

Synthèse :

Prenons  $e_1 \neq 0$ ,  $e_2 = f(e_1)$ ,  $e_3 \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$  et  $e_4 = f(e_3)$ .

Supposons  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$  i.e.  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 f(e_3) = 0$  (1).

En appliquant l'endomorphisme  $f$  :  $\lambda_1 f(e_1) - \lambda_2 e_1 + \lambda_3 f(e_3) - \lambda_4 e_3 = 0$  (2).

$\lambda_3(1) - \lambda_4(2)$  donne  $(\lambda_3 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_4)e_1 + (\lambda_3 \lambda_2 - \lambda_4 \lambda_1)f(e_1) + (\lambda_3^2 + \lambda_4^2)e_3 = 0$ .

Puisque  $e_3 \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$ , on a  $\lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0$  d'où  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ .

(1) et (2) donne alors  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) = 0$  et  $\lambda_1 f(e_1) - \lambda_2 e_1 = 0$ .

Comme ci-dessus on parvient à  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$  d'où  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Finalement  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une base convenable. On peut conclure que  $M$  est semblable à la matrice proposée.

**Exercice 20 :** [énoncé]

Raisonnons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n = 1$  : ok

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 1$ .

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  de trace nulle et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$  l'endomorphisme canoniquement associé.

Si  $f$  est une homothétie vectorielle (i.e. de la forme  $\lambda \text{Id}_E$ ) alors  $f = \tilde{0}$  car  $\text{tr} f = 0$  et on peut alors conclure.

Sinon, il existe un vecteur  $x$  tel que  $f(x)$  ne soit pas colinéaire à  $x$ . En représentant  $f$  dans une base dont  $x$  et  $f(x)$  sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice  $A$  est semblable à la matrice

$$M = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & A' \end{array} \right)$$

avec  $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de trace nulle.

Par hypothèse de récurrence, il existe  $P$  inversible tel que  $P^{-1}A'P$  soit de diagonale nulle. En considérant la matrice inversible

$$Q = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right) \text{ avec } Q^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right)$$

on obtient que la matrice  $M$  est semblable à

$$Q^{-1} \left( \begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & A' \end{array} \right) Q = \left( \begin{array}{cc} 0 & \star \\ & \ddots \\ \star & 0 \end{array} \right)$$

Finalement, la matrice  $A$  est semblable à une matrice à coefficients diagonaux tous nuls.

Récurrence établie.

**Exercice 21 :** [énoncé]

a) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$ . On a

$$\text{rg} f = \text{rg} A = 1$$

et donc par la formule du rang

$$\dim \ker f = n - 1$$

Si  $\mathcal{B}$  est une base adaptée à  $\ker f$ , la matrice de  $f$  dans cette base a ses  $n - 1$  premières colonnes nulles.

b) On peut écrire  $A = PBP^{-1}$  avec  $P$  matrice inversible et  $B$  une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\lambda = \text{tr}B = \text{tr}A$$

Puisque  $B^2 = \lambda B$ , on a

$$P^{-1}A^2P = \text{tr}(A).P^{-1}AP$$

puis

$$A^2 = \text{tr}(A).A$$

Puisque  $\det(I_n + B) = 1 + \lambda$ , on a

$$\det(P^{-1}) \det(I_n + A) \det P = 1 + \text{tr}A$$

puis

$$\det(I_n + A) = 1 + \text{tr}A$$

**Exercice 22 :** [énoncé]

Posons  $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ . L'étude, coefficient par coefficient, de la relation  $MD = DM$  donne que les matrices commutant avec  $D$  sont les matrices diagonales. Parmi les matrices diagonales, celles qui sont semblables à  $D$  sont celles qui ont les mêmes coefficients diagonaux

**Exercice 23 :** [énoncé]

Il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $PA = BP$ . En posant  $Q = \text{Re}(P)$  et  $R = \text{Im}(P)$  on obtient  $QA + iRA = BQ + iBR$  donc  $QA = BQ$  et  $RA = BR$  car  $A, B, Q, R$  réelles. Cependant on ne sait pas si  $Q$  ou  $R$  sont inversibles. Or pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$  et  $\lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$  est une fonction polynomiale non nulle car  $\det(Q + iR) \neq 0$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $Q + \lambda R$  est inversible et on peut conclure.

**Exercice 24 :** [énoncé]

Commençons par déterminer  $f(I_n)$  et  $f(O_n)$ .

On a  $f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)^2$  donc  $f(I_n) = 0$  ou  $1$ .

Si  $f(I_n) = 0$  alors pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $f(A) = f(A \times I_n) = f(A) \times f(I_n) = 0$  et donc  $f$  est constante ce qui est exclu. Ainsi  $f(I_n) = 1$ .

Aussi  $f(O_n) = f(O_n^2) = f(O_n) \times f(O_n)$  donc  $f(O_n) = 0$  ou  $1$ .

Si  $f(O_n) = 1$  alors pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$f(A) = f(O_n) \times f(A) = f(O_n \times A) = f(O_n) = 1$  et donc  $f$  est constante ce qui est exclu. Ainsi  $f(O_n) = 0$ .

Si  $A$  est inversible alors  $f(I_n) = f(A \times A^{-1})$  donne  $f(A) \times f(A^{-1}) = 1$  et donc  $f(A) \neq 0$ .

La réciproque est plus délicate.

Supposons  $A$  non inversible et posons  $r = \text{rg}A$ .

La matrice  $A$  est équivalente à la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire  $A = QJ_rP$  avec  $P, Q$  inversibles. On a alors

$f(A) = f(Q)f(J_r)f(P)$  et il suffit de montrer  $f(J_r) = 0$  pour conclure.

Par permutation des vecteurs de bases, la matrice  $J_r$  est semblable à toute matrice diagonale où figure  $r$  coefficients 1 et  $n - r$  coefficients 0. En positionnant, pertinemment les coefficients 0, on peut former des matrices  $A_1, \dots, A_p$  toutes semblables à  $J_r$  vérifiant

$$A_1 \dots A_p = O_n$$

On a alors

$$f(A_1) \dots f(A_p) = 0$$

Or il est facile d'établir que si deux matrices sont semblables, la fonction  $f$  prend les mêmes valeurs sur celles-ci. Par suite  $f(J_r) = f(A_1) = \dots = f(A_p)$  et ainsi  $f(J_r)^p = 0$  puis enfin  $f(J_r) = 0$ .

**Exercice 25 :** [énoncé]

On vérifie aisément que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  car c'est le noyau de l'endomorphisme  $M \mapsto AM - MA$ .

Puisque  $A^2 = O_3$ , on a  $\text{Im}A \subset \ker A$ .

Puisque  $A \neq O_3$ , la formule du rang et l'inclusion précédente montre

$$\text{rg}A = 1 \text{ et } \dim \ker A = 2$$

Soient  $X_1 \in \text{Im}A$  non nul,  $X_2$  tel que  $(X_1, X_2)$  soit base de  $\ker A$  et  $X_3$  un antécédent de  $X_1$ . En considérant la matrice de passage  $P$  formée des colonnes

$X_1, X_2, X_3$ , on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

En raisonnant par coefficients inconnus, on obtient que les matrices  $N$  vérifiant  $BN = NB$  sont de la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Par suite les matrices  $M$  vérifiant  $AM = MB$  sont celles de la forme

$$M = P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

L'espace  $\mathcal{C}$  est donc de dimension 5 et l'on en forme une base à l'aide des matrices

$$M_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, M_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$M_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } M_5 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

**Exercice 26 :** [énoncé]

$\text{tr}A \neq \text{tr}B$  dont  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

**Exercice 27 :** [énoncé]

Notons  $E$  la matrice correspondant à l'élément neutre de  $(G, \times)$ . Celle-ci est nécessairement non nulle car sinon la partie  $G$  serait réduite à la matrice nulle. Puisque la matrice  $E$  est neutre, on a  $E^2 = E$  et donc  $E$  est la matrice d'une projection. En posant  $r = \text{rg}E \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$E = PJ_rP^{-1} \text{ avec } J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut écrire par blocs

$$M = P \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}$$

L'identité  $EM = M = ME$  donne la nullité des blocs  $B, C$  et  $D$ .

On peut alors introduire l'application  $\varphi : G \rightarrow \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$  qui associe à  $M \in G$  le bloc  $A$  de la description ci-dessus. On vérifie aisément que l'application  $\varphi$  est injective et que

$$\forall M, N \in G, \varphi(MN) = \varphi(M) \times \varphi(N)$$

Enfin, on a aussi  $\varphi(E) = I_r$  de sorte qu'on peut affirmer que l'image de  $\varphi$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}_r(\mathbb{R}), \times)$ . Le groupe  $(G, \times)$  est alors isomorphe à ce sous-groupe.

**Exercice 28 :** [énoncé]

En vertu du théorème d'isomorphisme

$$0 \in \text{sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ non injectif} \Leftrightarrow f \text{ non surjectif}$$

**Exercice 29 :** [énoncé]

$$0 \in \text{sp}(f^n) \Rightarrow f^n \text{ non injective} \Rightarrow f \text{ non injective} \Rightarrow 0 \in \text{sp}(f).$$

**Exercice 30 :** [énoncé]

Si  $\lambda \in \text{Spu}$  alors il existe  $x \neq 0$  vérifiant  $u(x) = \lambda x$ . En appliquant  $u^{-1}$ , on obtient  $x = \lambda u^{-1}(x)$ .

Puisque  $x \neq 0, \lambda \neq 0$  et on peut écrire  $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$  donc  $\frac{1}{\lambda} \in \text{Spu}^{-1}$ . Ainsi

$$\{1/\lambda/\lambda \in \text{Spu}\} \subset \text{Spu}^{-1}$$

L'autre inclusion s'obtient par symétrie.

**Exercice 31 :** [énoncé]

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x \in E$ ,

$$x \in E_\lambda(v) \Leftrightarrow u(a^{-1}(x)) = \lambda a^{-1}(x) \Leftrightarrow a^{-1}(x) \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow x \in a(E_\lambda(u))$$

Ainsi  $E_\lambda(v) = a(E_\lambda(u))$ .

Puisque  $a$  est un automorphisme, on peut affirmer  $E_\lambda(v) \neq \{0\}$  si, et seulement si,  $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ . Ainsi

$$\text{Sp}(u) = \text{Sp}(v)$$

**Exercice 32 : [énoncé]**

On a la propriété

$$\forall x \neq 0_E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda_x x$$

Montrer que  $x \mapsto \lambda_x$  est une fonction constante sur  $E \setminus \{0\}$ . Soient  $x, y \neq 0_E$ .

Si  $(x, y)$  est libre  $u(x+y) = u(x) + u(y)$  donne  $\lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$  donc par liberté de  $(x, y)$  on obtient  $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$ .

Si  $(x, y)$  est liée,  $y = \mu x$  et donc  $u(y) = \mu u(x) = \lambda_x \mu x = \lambda_x y$  puis  $\lambda_y = \lambda_x$ .

Ainsi  $x \mapsto \lambda_x$  est une fonction constante. En posant  $\lambda$  la valeur de cette constante, on a  $\forall x \in E, u(x) = \lambda x$  que  $x$  soit nul ou non.

**Exercice 33 : [énoncé]**

a) Il existe  $x \neq 0_Z$ , vérifiant

$$u(v(x)) = \lambda x$$

On a alors

$$(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$$

Or  $v(x) \neq 0_E$  car  $u(v(x)) \neq 0_E$  et  $u(0_E) = 0_E$ .

On en déduit que  $\lambda$  est valeur propre de  $v \circ u$ .

b) On observe

$$u \circ v(P) = P \text{ et } v \circ u(P) = P - P(0)$$

On en déduit

$$\ker(u \circ v) = \{0\} \text{ et } \ker(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$$

En substance, la propriété précédente ne vaut pas pour  $\lambda = 0$  en dimension quelconque.

c) Cependant, en dimension finie, si 0 est valeur propre de  $u \circ v$  alors  $\det(u \circ v) = 0$  et donc  $\det(v \circ u) = 0$  d'où 0 valeur propre de  $v \circ u$ .

**Exercice 34 : [énoncé]**

Cas  $\lambda = 0$

$\det(u \circ v) = 0$  entraîne  $\det(v \circ u) = 0$  ce qui donne la propriété.

Cas  $\lambda \neq 0$

Si  $x$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $u(v(x)) = \lambda x$  donne  $v(u(v(x))) = \lambda v(x)$ .

De plus  $\lambda x \neq 0$  entraîne  $v(x) \neq 0$  et donc  $\lambda$  est valeur propre de  $v \circ u$ .

**Exercice 35 : [énoncé]**

a) Une récurrence facile donne  $A^k B - B A^k = k A^k$ .

b)  $A^k$  est vecteur propre de l'endomorphisme considéré si, et seulement si,  $A^k \neq 0$ .

c) L'endomorphisme  $M \mapsto MB - BM$  opère en dimension finie, il ne peut donc avoir qu'un nombre fini de valeurs propres et donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  vérifiant  $A^k = 0$ .

**Exercice 36 : [énoncé]**

a) On vérifie  $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$ .

Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^k \neq 0$  alors l'endomorphisme  $h \mapsto h \circ g - g \circ h$  admet une infinité de valeurs propres.

Ceci étant impossible en dimension finie, on peut affirmer que  $f$  est nilpotent.

b)  $f^n = 0$  (car  $\dim E = n$ ) et  $f^{n-1} \neq 0$ . Pour  $x \notin \ker f^{n-1}$  et

$e' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$ , on montre classiquement que  $e'$  est une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est telle que voulue.

$f(g(f^{n-1}(x))) = 0$  donc  $g(f^{n-1}(x)) = \lambda f^{n-1}(x)$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$

Aussi  $f^k(g(f^{n-1-k}(x))) = (\lambda + k)f^{n-1}(x)$  et donc la matrice de  $g$  dans  $e'$  et triangulaire supérieure avec sur la diagonale  $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1$ . Ainsi

$$\text{Sp}(g) = \{\lambda, \dots, \lambda + n - 1\}$$

Soit  $y$  vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda + n - 1$ .

Si  $y \in \ker f^{n-1}$  alors puisque  $\ker f^{n-1}$  est stable par  $g$ ,  $\lambda + n - 1$  est valeur propre de l'endomorphisme induit par  $g$  sur  $\ker f^{n-1}$ . Cela n'étant par le cas  $y \notin \ker f^{n-1}$ . On vérifie alors facilement que la famille  $e = (f^{n-1}(y), \dots, f(y), y)$  résout notre problème.

**Exercice 37 : [énoncé]**

a) Puisque  $u \circ v = v \circ u$  les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ . Puisque  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $u$  admet une valeur propre et le sous-espace propre associé est stable par  $v$ . L'endomorphisme induit par  $v$  sur celui-ci admet une valeur propre et ceci assure l'existence d'un vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

b)  $u \circ v - v \circ u = au$ .

Si  $u$  est inversible alors  $u \circ v \circ u^{-1} - v = a \text{Id}_E$  et donc

$$\text{tr}(u \circ v \circ u^{-1}) - \text{tr} v = a \dim E.$$

Or  $\text{tr}(u \circ v \circ u^{-1}) = \text{tr} v$  ce qui entraîne une absurdité.

On en déduit que  $u$  est non inversible.

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nau^n$$

L'endomorphisme  $\varphi : w \mapsto w \circ v - v \circ w$  n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres car opère en dimension finie. Si  $u$  n'est pas nilpotent alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $na$  est valeur propre de  $\varphi$ . C'est absurde et donc  $u$  est nilpotent. Enfin, soit  $x \in \ker u$ . On a  $u(v(x)) = v(u(x)) + au(x) = 0$  donc  $v(x) \in \ker u$ . Par suite  $\ker u \neq \{0\}$  est stable par  $v$  et un vecteur propre de l'endomorphisme induit est vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

c)  $u \circ v - v \circ u = au + bv$ .

Si  $a = 0$  il suffit de transposer l'étude précédente.

Si  $a \neq 0$ , considérons  $w = au + bv$ .

On a

$$(au + bv) \circ v - v \circ (au + bv) = a(u \circ v - v \circ u) = a(au + bv)$$

Par l'étude qui précède,  $au + bv$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun puis  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

### Exercice 38 : [énoncé]

Cas  $a = b = 0$

Les endomorphismes  $f$  et  $g$  commutent donc les sous-espaces propres de l'un sont stables pour l'autre. Puisque le corps de base est  $\mathbb{C}$ , l'endomorphisme  $f$  admet au moins une valeur propre  $\lambda$ . L'espace  $E_\lambda(f) \neq \{0\}$  est stable par  $g$  donc on peut introduire l'endomorphisme induit par  $g$  sur  $E_\lambda(f)$  et ce dernier admet aussi au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à cette valeur propre de  $g$  est aussi un vecteur propre de  $f$  car élément non nul de  $E_\lambda(f)$ . Ainsi  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.

Cas  $a = 0$  et  $b \neq 0$

Par récurrence, on obtient  $f \circ g^n - g^n \circ f = nb g^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

L'application  $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ u - u \circ f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  or  $\dim \mathcal{L}(E) < +\infty$  donc cet endomorphisme n'admet qu'un nombre fini de valeur propre. Cependant, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $g^n \neq \tilde{0}$ , le scalaire  $nb$  est valeur propre de cet endomorphisme, on en déduit qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $g^n = \tilde{0}$  et en particulier  $\ker g \neq \{0\}$ .

On vérifie aisément que  $\ker g$  est stable par  $f$  et un vecteur propre de l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $\ker g$  est alors vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

Cas  $b = 0$  et  $a \neq 0$

Semblable

Cas  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$

On a

$$f \circ (af + bg) - (af + bg) \circ f = b(f \circ g - g \circ f) = b(af + bg)$$

Par l'étude qui précède,  $f$  et  $af + bg$  admettent un vecteur propre commun et celui-ci est alors vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

### Exercice 39 : [énoncé]

a)  $u$  admet une valeur propre  $\lambda$  et le sous-espace propre associé est stable par  $v$ . Cela assure que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun  $e_1$ . On complète celui-ci en une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Les matrices de  $u$  et  $v$  dans cette base sont de la forme  $A = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} \mu & \star \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ . Considérons les endomorphismes  $u'$  et  $v'$  de  $E' = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$  représentés par  $A'$  et  $B'$  dans  $(e_2, \dots, e_n)$ .  $AB = BA$  donne  $A'B' = B'A'$  et donc  $[u', v'] = 0$ . Cela permet d'itérer la méthode jusqu'à obtention d'une base de cotrigonalisation.

b) Par récurrence, on vérifie  $[u^k, v] = k\lambda u^k$ . L'endomorphisme  $w \mapsto [w, v]$  de  $\mathcal{L}(E)$  ne peut avoir une infinité de valeurs propres donc il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0$ . L'endomorphisme  $u$  est nilpotent donc  $\ker u \neq \{0\}$  ce qui permet d'affirmer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre commun. On peut alors reprendre la démarche de la question a) sachant qu'ici  $A'B' - B'A' = \lambda A'$ .

c) Si  $\alpha = 0$ , l'étude qui précède peut se reprendre pour conclure. Si  $\alpha \neq 0$ , on introduit  $w = \alpha u + \beta v$  et on vérifie  $[w, v] = \alpha w$ . Ainsi  $w$  et  $v$  sont cotrigonalisables puis  $u$  et  $v$  aussi cas  $u = \frac{1}{\alpha}(w - \beta v)$ .

### Exercice 40 : [énoncé]

a) Il suffit de procéder par récurrence en exploitant  $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = f \circ (n f^n + g \circ f^n) + (I - f \circ g) \circ f^n$ .

b) Par linéarité  $P(f) \circ g - g \circ P(f) = P'(f)$ .

Ainsi si  $P$  annule  $f$  alors  $P'$  aussi. Ceci est impossible en dimension finie car le polynôme minimal d'un endomorphisme annule celui-ci et est de degré minimal.

Notons qu'un argument de calcul de trace est de loin plus rapide et plus simple !

c)  $f \circ g(P) = (XP)' = XP' + P$  et  $g \circ f(P) = XP'$  donc  $(f \circ g - g \circ f)(P) = P$ .

### Exercice 41 : [énoncé]

a) Par récurrence

$$f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n$$

b) Par linéarité

$$P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$$

Par suite, si  $P(f) = 0$ , alors  $f \circ P'(f) = 0$ .

c) Soit  $\pi$  le polynôme minimal de l'endomorphisme  $f$ .

$\pi$  annule  $f$  donc  $X\pi'$  aussi. Par minimalité de  $\pi$ ,  $\pi \mid X\pi'$ . Pour des raisons de degré et de coefficients dominants,  $\alpha\pi = X\pi'$  avec  $\alpha = \deg \pi$ . On en déduit  $\pi = X^\alpha$  et donc  $f$  est nilpotent.

**Exercice 42 :** [énoncé]

a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de l'endomorphisme  $T$ .

Il existe une matrice  $M$  non nulle vérifiant  $T(M) = \lambda M$ .

On a alors  $MA = (A + \lambda I_n)M$ .

Par une récurrence facile,  $MA^p = (A + \lambda I_n)^p M$ .

Or pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^p = O_n$  donc  $(A + \lambda I_n)^p M = O_n$ .

Cependant la matrice  $M$  n'est pas nulle donc la matrice  $(A + \lambda I_n)^p$  n'est pas inversible puis la matrice  $A + \lambda I_n$  ne l'est pas non plus. Ainsi  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  et donc  $\lambda = 0$  car 0 est la seule valeur propre d'une matrice nilpotente.

On en déduit  $\text{Sp}T \subset \{0\}$  puis  $\text{Sp}T = \{0\}$  car le corps de base  $\mathbb{C}$  assure l'existence d'au moins une valeur propre.

Le polynôme caractéristique de  $T$  étant scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  et de degré  $n^2$ , on a  $\chi_T = (-1)^{n^2} X^{n^2}$  puis  $T^{n^2} = \tilde{0}$  car le polynôme caractéristique est annulateur en vertu du théorème de Cayley Hamilton.

Finalement, l'endomorphisme  $T$  est nilpotent.

b) Pour  $g = \text{Id}_E$  on a  $T = \tilde{0}$ .

Ainsi l'endomorphisme  $T$  est nilpotent alors que  $g$  ne l'est pas.

La réciproque est fausse.

**Exercice 43 :** [énoncé]

a) Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n B - B A^n = n A^{n-1} C$$

On en déduit

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(A)B - B P(A) = P'(A)C$$

Si la matrice  $A$  est diagonalisable, elle annule un polynôme scindé à racine simple  $P$  et donc

$$P'(A)C = 0$$

Puisque les racines de  $P$  sont simples, les valeurs propres de  $A$  ne sont pas racine de  $P'$  et une diagonalisation de  $A$  permet d'affirmer

$$\det P'(A) \neq 0$$

Puisque la matrice  $P'(A)$  est inversible, l'identité  $P'(A)C = 0$  donne  $C = 0$ .

b) Supposons  $C$  diagonalisable.

Notons  $a, b, c$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés aux matrices  $A, B, C$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $C$ . Le sous-espace propre  $E_\lambda(c)$  est stable par les endomorphismes  $a$  et  $b$  car la matrice  $C$  commute avec  $A$  et  $B$ . Notons  $a_\lambda$  et  $b_\lambda$  les endomorphismes induits associés. On a

$$a_\lambda \circ b_\lambda - b_\lambda \circ a_\lambda = \lambda \text{Id}_{E_\lambda(c)}$$

En considérant la trace, on obtient

$$\lambda \dim E_\lambda(c) = 0$$

On en déduit que seule 0 est valeur propre de  $C$  et donc la matrice diagonalisable  $C$  est nulle.

**Exercice 44 :** [énoncé]

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in E$ . On a

$$D(f) = \lambda f \Leftrightarrow f \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = \lambda y$$

Les solutions de l'équation  $y' = \lambda y$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto C e^{\lambda t}$ .

Ainsi

$$\text{Sp}(D) = \mathbb{R} \text{ et } E_\lambda(D) = \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t})$$

**Exercice 45 :** [énoncé]

Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $u \in E$ . Etudions l'équation  $f(u) = \lambda u$ . On a

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_n = u_{n-1} \end{cases}$$

Cas  $\lambda = 1$

$$f(u) = u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1}$$

On en déduit que 1 est valeur propre de  $f$  et que le sous-espace propre associé est formé des suites constantes.

Cas  $\lambda \neq 1$

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_n = u_{n-1} \end{cases}$$

Que  $\lambda = 1/2$  ou non, on obtient

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

et donc  $\lambda$  n'est pas valeur propre.

Finalement

$$\text{Sp}f = \{1\}$$

**Exercice 46 :** [énoncé]

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u \in E$ .

$$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n+1) = (1+\lambda)u(n)$$

Ainsi

$$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$$

Pour  $\lambda \in ]-2, 0[$ , la suite  $u(n) = (1+\lambda)^n$  est élément non nul de  $E$  et vérifie  $\Delta(u) = \lambda u$ .

Pour  $\lambda \notin ]-2, 0[$ , seule la suite nulle est convergente vers 0 et satisfait

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$$

On peut donc conclure

$$\text{Sp}(\Delta) = ]-2, 0[$$

**Exercice 47 :** [énoncé]

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in E$ . Si  $I(f) = \lambda f$  alors  $I(f)$  est solution de l'équation différentielle

$$y = \lambda y'$$

Si  $\lambda = 0$  alors  $I(f) = 0$ .

Si  $\lambda \neq 0$  alors  $I(f)$  est de la forme  $x \mapsto C e^{x/\lambda}$  et puisque  $I(f)$  s'annule en 0 donc  $I(f) = 0$ .

Dans les deux cas  $f = I(f)' = 0$ . Ainsi

$$\text{Sp}(I) = \emptyset$$

**Exercice 48 :** [énoncé]

Soit  $\lambda$  un réel et  $f$  une fonction élément de  $E$ .

Si  $T(f) = \lambda f$  alors

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x+1) = \lambda f(x)$$

En passant cette relation à la limite quand  $x \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\ell = \lambda \ell$$

en notant  $\ell$  la limite de  $f$ .

Cas  $\ell \neq 0$  :

Nécessairement  $\lambda = 1$  et

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x+1) = f(x)$$

Puisque la fonction  $f$  est périodique et converge en  $+\infty$ , elle est constante. Inversement, toute fonction constante non nulle est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Cas  $\ell = 0$  :

Si  $\lambda$  est valeur propre alors en introduisant  $f$  vecteur propre associé, il existe  $x_0 \in [0, +\infty[$  tel que  $f(x_0) \neq 0$  et la relation  $T(f) = \lambda f$  donne par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_0 + n) = \lambda^n f(x_0)$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $|\lambda| < 1$ .

Inversement, supposons  $|\lambda| < 1$ .

Si  $T(f) = \lambda f$  alors

$$f(1) = \lambda f(0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f(x+n) = \lambda^n f(x)$$

La fonction  $f$  est donc entièrement déterminée par sa restriction continue sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f(1) = \lambda f(0)$ .

Inversement, si  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  vérifiant  $\varphi(1) = \lambda \varphi(0)$  alors la fonction  $f$  donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f(x+n) = \lambda^n \varphi(x)$$

et continue (on vérifie la continuité en  $k \in \mathbb{N}^*$  par continuité à droite et à gauche), converge vers 0 en  $+\infty$  et vérifie  $T(f) = \lambda f$ .

Puisqu'il est possible de construire une fonction non nulle de la sorte, le scalaire  $\lambda \in ]-1, 1[$  est valeur propre et les vecteurs propres associés sont les fonctions non nulles de la forme précédente.

**Exercice 49 :** [énoncé]

a)  $\varphi(f)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$  donc continue sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .

Puisque  $f$  est continue,  $f$  admet une primitive  $F$  et alors quand  $x \rightarrow 0^+$

$$\varphi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \rightarrow F'(0) = f(0) = 0$$

On en déduit que  $\varphi(f)$  est continue en 0.

La linéarité de  $\varphi$  est immédiate et donc  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $E$  non nulle vérifiant  $\varphi(f) = \lambda f$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$$

donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie

$$(1-\lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$$

Le cas  $\lambda = 0$  implique  $f = 0$  et est donc exclu.

Pour  $\lambda \neq 0$  et  $x > 0$  on a

$$xf'(x) = \alpha f(x)$$

avec  $\alpha = (1 - \lambda)/\lambda$  dont la résolution conduit à

$$f(x) = Cx^\alpha, x \in ]0, +\infty[$$

Pour  $\alpha = 0$  ou  $\alpha < 0$  la condition  $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$  entraîne  $f = 0$  et est donc exclue.

Par contre le cas  $\alpha > 0$  (correspondant à  $\lambda \in ]0, 1[$ ) conduit au vecteur propre

$$f(x) = Cx^\alpha, x \in [0, +\infty[$$

élément de  $E$ .

### Exercice 50 : [énoncé]

a)  $T(f)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$  donc continue sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ .

Puisque  $f$  est continue,  $f$  admet une primitive  $F$  et alors quand  $x \rightarrow 0^+$

$$T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \rightarrow F'(0) = f(0)$$

On en déduit que  $T(f)$  se prolonge en une fonction continue en 0.

La linéarité de  $T$  est immédiate et donc  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $E$  non nulle vérifiant  $T(f) = \lambda f$ .

Pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$$

donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie

$$(1 - \lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$$

Le cas  $\lambda = 0$  implique  $f = 0$  et est donc exclu.

Pour  $\lambda \neq 0$  et  $x > 0$  on a

$$xf'(x) = \alpha f(x)$$

avec  $\alpha = (1 - \lambda)/\lambda$  dont la résolution conduit à

$$f(x) = Cx^\alpha, x \in ]0, +\infty[$$

Pour  $\alpha < 0$  la condition  $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$  entraîne  $f = 0$  et est donc exclue.

Par contre le cas  $\alpha \geq 0$  (correspondant à  $\lambda \in ]0, 1[$ ) conduit aux vecteurs propres

$$f(x) = Cx^\alpha, x \in [0, +\infty[, C \neq 0$$

éléments de  $E$ .

### Exercice 51 : [énoncé]

Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $f(0) = 0$ , on peut écrire

$$f(t) = f'(0)t + o(t) \text{ quand } t \rightarrow 0$$

Ainsi la fonction  $\varphi : t \mapsto f(t)/t$  peut être prolongée par continuité en 0 et donc l'intégrale définissant  $T(f)(x)$  a un sens en tant qu'intégrale d'une fonction continue. De plus, la fonction  $T(f)$  apparaît alors comme la primitive s'annulant en 0 de cette fonction continue  $\varphi$ , c'est donc une fonction élément de  $E$ . Enfin, la linéarité de l'application  $T$  étant immédiate, on peut affirmer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Si  $T(f) = \lambda f$  alors pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,

$$T(f)(x) = \lambda f(x)$$

En dérivant cette relation, on obtient pour tout  $x \in [0, +\infty[$

$$f(x) = \lambda x f'(x)$$

Si  $\lambda = 0$  alors  $f$  est la fonction nulle et  $\lambda$  n'est pas valeur propre.

Si  $\lambda \neq 0$ ,  $f$  est solution de l'équation différentielle  $\lambda xy' = y$ .

Cette dernière est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont la solution générale sur  $]0, +\infty[$  est

$$y(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Ainsi, il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Or pour qu'une telle fonction puisse être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ , il faut  $C = 0$  ou  $1/\lambda \geq 1$ . Ainsi les valeurs propres de  $T$  sont les éléments de l'intervalle  $]0, 1]$ .

Inversement, soient  $\lambda \in ]0, 1]$  et la fonction  $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda}$  prolongée par continuité en 0.

La fonction  $f_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ , s'annule en 0 et vérifie  $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$  sans être la fonction nulle.

Finalement, les valeurs propres de  $T$  sont exactement les éléments de l'intervalle  $]0, 1]$ .

### Exercice 52 : [énoncé]

a) On peut écrire

$$T(f)(x) = \int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$$

L'application  $T(f)$  apparaît alors comme continue (et même dérivable).  
Ainsi, l'application  $T$  opère de  $E$  dans  $E$ , elle de surcroît évidemment linéaire.  
b) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in E$  vérifiant

$$T(f) = \lambda f$$

Cas  $\lambda = 0$

On a  $T(f) = 0$  donc

$$\int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt = 0$$

En dérivant, on obtient

$$xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt = 0$$

En dérivant à nouveau, on obtient  $f = 0$ . Ainsi 0 n'est pas valeur propre de  $T$ .

Cas  $\lambda \neq 0$

On a  $T(f) = \lambda f$

$$\int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt = \lambda f$$

En particulier, on peut affirmer que  $f(0) = 0$  car  $T(f)(0) = 0$ .

Le premier membre de l'équation  $T(f) = \lambda f$  est dérivable donc la fonction  $f$  est également dérivable et, en dérivant, on obtient la relation

$$\int_x^1 f(t) dt = \lambda f'(x)$$

En particulier  $f'(1) = 0$ .

Le premier membre de cette nouvelle équation étant dérivable, la fonction  $f$  est deux fois dérivable et on obtient en dérivant l'équation différentielle

$$\lambda f''(x) + f(x) = 0$$

Sous cas  $\lambda < 0$

Sachant  $f(0) = 0$ , la résolution de l'équation différentielle donne

$$f(x) = A \operatorname{sh} \left( \frac{x}{\sqrt{|\lambda|}} \right)$$

La condition  $f'(1) = 0$  entraîne toujours  $f = 0$  et donc un tel  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $T$ .

Sous cas  $\lambda > 0$

Sachant  $f(0) = 0$ , on obtient par résolution de l'équation différentielle

$$f(x) = A \sin \left( \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

La condition  $f'(1) = 0$  n'entraînera pas  $f = 0$  que si

$$\sin \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) = 0$$

c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\lambda = \frac{1}{(k\pi)^2} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*$$

Notons qu'alors il est possible de remonter les précédents calculs et d'affirmer que

$$f : x \mapsto \sin(k\pi x)$$

est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda = 1/(k\pi)^2$

### Exercice 53 : [énoncé]

a) L'application  $\Phi$  est évidemment linéaire, il reste à voir qu'elle est à valeurs dans  $\mathbb{R}_4[X]$ .

Pour un polynôme  $P$  de degré inférieur à 4, le polynôme  $(X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$  est de degré inférieur à 5 et, si  $a$  est le coefficient de  $X^4$  dans  $P$ , le coefficient de  $X^5$  dans  $\Phi(P)$  est  $4a - 4a = 0$ . Par suite  $\Phi$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_4[X]$  et c'est donc un endomorphisme de cet espace.

b) L'équation

$$y' = \left( \frac{5 - \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 + \lambda}{2(x + 1)} \right) y$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale

$$y(x) = C |x - 1|^{(5-\lambda)/2} |x + 1|^{(3+\lambda)/2}$$

sur  $I = ]-\infty, -1[, ]-1, 1[$  ou  $]1, +\infty[$ .

c) Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(P) = \lambda P$  si, et seulement si,  $P'(X) = \frac{4X + (1 + \lambda)}{X^2 - 1} P(X)$  i.e. si, et seulement si, la fonction polynomiale  $P$  est solution, par exemple sur  $]1, +\infty[$ , de l'équation différentielle

$$y' = \frac{4x + (1 + \lambda)}{x^2 - 1} y$$

Or moyennant une décomposition en éléments simples et passage à l'opposé de  $\lambda$ , cette équation est celle précédemment résolue et le problème est alors de

déterminer pour quel paramètre  $-\lambda$ , la solution précédemment présentée est une fonction polynomiale de degré inférieur à 4. Les valeurs 3, 1, -1, -3, -5 conviennent et ce sont donc des valeurs propres de  $\Phi$ , de plus il ne peut y en avoir d'autres car  $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$ . Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres  $\lambda$  sont les polynômes

$$C(X - 1)^{\frac{5+\lambda}{2}}(X + 1)^{\frac{3-\lambda}{2}} \text{ avec } C \neq 0$$

**Exercice 54 :** [énoncé]

L'application  $\varphi$  est évidemment linéaire et on vérifie en observant une simplification que  $\varphi$  transforme un polynôme de degré inférieur à  $n$  en un autre. L'application  $\varphi$  est donc bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Pour résoudre l'équation  $\varphi(P) = \lambda P$ , on recherche les solutions polynomiales de degrés inférieurs à  $n$  à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y' - (nx + \lambda)y = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$y(x) = C(x - 1)^{\frac{n+\lambda}{2}}(x + 1)^{\frac{n-\lambda}{2}}$$

Pour  $\lambda = -n + 2k$  avec  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on obtient une fonction polynomiale non nulle

$$P_\lambda(X) = C(X - 1)^k(X + 1)^{n-k} \text{ avec } C \neq 0$$

et donc  $\lambda$  est valeur propre de  $\varphi$  et les  $P_\lambda$  sont les vecteurs propres associés. Puisque  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ , il ne peut y avoir d'autres valeurs propres (et l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable).

**Exercice 55 :** [énoncé]

a) La linéarité est immédiate et sans peine  $\deg(\phi(P)) \leq n$  pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

b) On a

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!} (X - a)^{k-1}$$

puis

$$\phi(P)(X) = \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!} (X - a)^k - 2 \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

donc

$$\phi(P)(X) = \sum_{k=3}^n (k-2) \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k - 2P'(a)(X - a)$$

Ainsi

$$P \in \ker \phi \Leftrightarrow P'(a) = 0 \text{ et } \forall 3 \leq k \leq n, P^{(k)}(a) = 0$$

et donc

$$\ker \phi = \text{Vect}(1, (X - a)^2)$$

Aussi

$$P \in \text{Im} \phi \Leftrightarrow P(a) = P''(a) = 0$$

et donc

$$\text{Im} \phi = (X - a)^3 \mathbb{R}_{n-3}[X] + \text{Vect}(X - a)$$

c) On a

$$\phi(P) = \lambda P \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda P(a) \\ -2P'(a) = \lambda P'(a) \\ (k-2)P^{(k)}(a) = \lambda P^{(k)}(a) \text{ pour } k \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

Cette équation possède une solution non nulle si, et seulement si,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -2$  et  $\lambda = k - 2$  avec  $k \in \{2, \dots, n\}$ .

Ainsi

$$\text{Sp}(\phi) = \{-2, 0, 1, \dots, n - 2\}$$

On a  $E_{-2}(\phi) = \text{Vect}(X - a)$ ,  $E_0(\phi) = \ker \phi$ ,  $E_{k-2}(\phi) = \text{Vect}(X - a)^k$  pour  $k \in \{3, \dots, n\}$ .

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut  $\dim \mathbb{R}_n[X]$  : l'endomorphisme est diagonalisable.

En fait, la base des  $(X - a)^k$  est base de diagonalisation de l'endomorphisme  $\phi$ .

**Exercice 56 :** [énoncé]

a) Il suffit de calculer le polynôme caractéristique de  $f$  à partir d'une représentation matricielle triangulaire par blocs relative à une base adaptée à l'espace non nul  $E(f, a)$ .

b) La matrice  $A$  est de rang 1 donc 0 est valeur propre de  $A$  et par la formule du rang  $\dim E(A, 0) = 3$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  étant de degré 4 et factorisable par  $X^3$ , c'est un polynôme scindé. La somme des valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité vaut alors  $\text{tr} A = 10$ .

Par suite 10 est valeur propre de  $A$  de multiplicité nécessairement 1.

Finalement  $A$  est diagonalisable semblable à  $\text{diag}(0, 0, 0, 10)$ .

**Exercice 57 :** [énoncé]

a) Si  $B = P^{-1}AP$  alors

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \chi_A(\lambda)$$

b) Inversement  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ne sont pas semblables mais ont même polynôme caractéristique.

**Exercice 58 :** [énoncé]

Soit  $G$  un supplémentaire de  $F$ . Dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure par blocs et en calculant le polynôme caractéristique de  $u$  par cette matrice on obtient immédiatement la propriété demandée.

**Exercice 59 :** [énoncé]

a) Pour  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$\det(xI_n - AB) = \det A \det(xA^{-1} - B) = \det(xA^{-1} - B) \det A = \det(xI_n - BA)$$

donc

$$\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

b) La matrice  $A + \frac{1}{p}I_n$  n'est pas inversible seulement si  $-1/p$  est valeur propre de  $A$ . Puisque la matrice  $A$  ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, pour  $p$  assez grand on est sûr que  $A + \frac{1}{p}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Comme vu ci-dessus, pour  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$\chi_{(A+\frac{1}{p}I_n)B}(x) = \chi_{B(A+\frac{1}{p}I_n)}(x)$$

En passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ . Ceci valant pour tout  $x \in \mathbb{C}$ , les polynômes  $\chi_{AB}$  et  $\chi_{BA}$  sont égaux.

**Exercice 60 :** [énoncé]

D'une part

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ -B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ -B & \lambda I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ O_{p,n} & \lambda I_p - AB \end{pmatrix}$$

En passant au déterminant, on obtient

$$\det M = \chi_{AB}(\lambda) \text{ et } \lambda^p \det M = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$$

et on en déduit

$$\lambda^p \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$$

**Exercice 61 :** [énoncé]

Dans le cas où

$$A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la propriété est immédiate en écrivant

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$$

avec  $C$  bloc carré de taille  $r$ .

Dans le cas général, on peut écrire  $A = QJ_rP$  avec  $r = \text{rg}A$  et  $P, Q$  inversibles.

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^q \chi_{Q^{-1}ABQ}(X) = X^q \chi_{J_rPBQ}(X)$$

donc

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{PBQJ_r}(X) = X^p \chi_{BQJ_rP}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

**Exercice 62 :** [énoncé]

Il est bien connu que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_{MN} = \chi_{NM}$$

On en déduit

$$\chi_{(AB)^p} = \chi_{[A(BA)^{p-1}]B} = \chi_{B[A(BA)^{p-1}]} = \chi_{(BA)^p}$$

**Exercice 63 :** [énoncé]

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(xI_n - A^{-1}) = \det A^{-1} \det(xA - I_n) = \frac{(-x)^n}{\det A} \det \left( \frac{1}{x}I - A \right)$$

Or  $\det(A) = (-1)^n \chi_A(0)$  donc

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{x^n}{\chi_A(0)} \chi_A(1/x)$$

**Exercice 64 :** [énoncé]

On a

$$\chi_{A\bar{A}}(X) = \det(XI_n - A\bar{A})$$

donc en conjuguant

$$\overline{\chi_{A\bar{A}}}(X) = \det(XI_n - \bar{A}A) = \chi_{\bar{A}A}(X)$$

Or il est bien connu que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

On obtient donc

$$\overline{\chi_{A\bar{A}}} = \chi_{A\bar{A}}$$

et par conséquent

$$\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$$

**Exercice 65 :** [énoncé]

a) Oui, un tel polynôme existe, il suffit de se référer aux matrices compagnons !

Pour  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ , la matrice compagnon associée est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} -X & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & -X & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}$$

Il peut se calculer par la succession d'opérations élémentaires

$$L_i \leftarrow L_i + XL_{i+1} \text{ avec } i \text{ allant de } n-1 \text{ à } 1 \text{ dans cet ordre}$$

On obtient alors

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 0 & (0) & \alpha \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -(a_{n-2} + a_{n-1}X + X^2) \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha = -(a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n)$$

En développant selon la première ligne, on obtient

$$\chi_M(X) = (-1)^n (a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n)$$

Ainsi, pour  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire de degré  $n$ , on peut construire une matrice à coefficients entiers dont le polynôme caractéristique est  $(-1)^n P(X)$ .

b) Il existe une matrice  $A$  dont le polynôme caractéristique est  $P$ . Puisque toute matrice complexe est trigonalisable, la matrice  $A$  est en particulier semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice  $A^q$  est alors semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & \star' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de  $A^q$  est alors  $P_q$ . Or  $A^q$  est une matrice à coefficients entiers et donc son polynôme caractéristique  $P_q$  est aussi à coefficients entiers.

c) Compte tenu des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on peut majorer les coefficients de  $P$  et affirmer que, pour un degré fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes  $P$  possibles car les coefficients de  $P$  sont entiers et bornés. Considérons un tel polynôme. L'application  $q \in \mathbb{N}^* \mapsto P_q$  n'est pas injective compte tenu à cause de l'argument de cardinalité précédent. Il existe donc  $q < r$  tel que  $P_q = P_r$ . Ainsi, il existe une permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}_n$  vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda_i^q = \lambda_{\sigma(i)}^r$$

A l'aide d'une décomposition en cycles de  $\sigma$ , on peut affirmer qu'il existe une puissance de  $\sigma$  égale à l'identité et donc conclure que pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$  il existe  $q' > q$  tel que  $\lambda_i^q = \lambda_i^{q'}$ . On peut alors affirmer que  $\lambda_i$  est nul ou bien racine de l'unité.

**Exercice 66 :** [\[énoncé\]](#)

Dans une base adaptée au noyau  $f$ , la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & \vdots & & \vdots \\ \star & \star & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \star & \star & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_f(X) = X^{n-2} (X^2 - (a+d)X + ad - bc)$$

Or

$$\text{tr} f = a + d \text{ et } \text{tr} f^2 = a^2 + 2bc + d^2$$

donc

$$\chi_f(X) = X^{n-2} \left( X^2 - \text{tr}(f)X + \frac{(\text{tr} f)^2 - \text{tr}(f^2)}{2} \right)$$

**Exercice 67 :** [\[énoncé\]](#)

- a)  $\text{Sp} B = \text{Sp}^t B$  car  $\chi_B = \chi^t B$ .
- b) Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $A(CX) = \lambda(CX)$  donc  $CX \in \ker(A - \lambda I_n)$ .
- c) Soit  $X$  et  $Y$  des vecteurs propres de  $A$  et  ${}^t B$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . La matrice  $C = X^t Y$  est solution.
- d) On peut écrire  $C = QJ_r P$  avec  $P, Q$  inversibles. La relation  $AC = CB$  donne  $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$ .  
En écrivant les matrices  $Q^{-1} A Q$  et  $P B P^{-1}$  par blocs, l'égalité  $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$  impose une décomposition en blocs triangulaire puis permet d'observer que  $\chi_A = \chi_{Q^{-1} A Q}$  et  $\chi_B = \chi_{P B P^{-1}}$  ont un facteur commun de degré  $\geq r$ , à savoir le polynôme caractéristique du bloc commun en position (1,1).
- e) La réciproque est assurément fautive en toute généralité. Pour  $r = n$ , deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.

**Exercice 68 :** [\[énoncé\]](#)

On peut écrire  $M = QJ_r P$  avec  $P, Q$  inversibles. La relation  $AM = MB$  donne

$$Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$$

En écrivant les matrices  $Q^{-1} A Q$  et  $P B P^{-1}$  par blocs, l'égalité

$$Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$$

impose une décomposition en blocs triangulaire puis permet d'observer que les polynômes  $\chi_A = \chi_{Q^{-1} A Q}$  et  $\chi_B = \chi_{P B P^{-1}}$  ont un facteur commun de degré  $\geq r$ , à savoir le polynôme caractéristique du bloc commun en position (1,1).

**Exercice 69 :** [\[énoncé\]](#)

En développant selon la première colonne

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} = -a_0 + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

puis en reprenant le processus on parvient à

$$\lambda^n - (a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0)$$

On peut aussi résoudre le problème via l'opération élémentaire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 + \cdots + \lambda^{n-1} C_n.$$

**Exercice 70 :** [\[énoncé\]](#)

a)  $P_n(x)$  est un déterminant tri-diagonal. On développe selon la première colonne en un déterminant triangulaire et en un second déterminant qu'on développe selon la première ligne.

$$P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2 - 1$$

b) La suite  $(P_n(2 \cos \alpha))_{n \geq 1}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On introduit l'équation caractéristique associée dont les racines permettent d'exprimer le terme général de  $(P_n(x))$  à l'aide de coefficients inconnus déterminés par les valeurs  $n = 1$  et  $n = 2$ . On peut aussi simplement vérifier la relation proposée en raisonnant par récurrence double.

c) Les  $x_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$  avec  $k \in \{1, \dots, n\}$  sont racines distinctes de  $P_n(x)$ .  $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  possède  $n$  valeurs propres distinctes donc  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 71 :** [\[énoncé\]](#)

a) On obtient

$$P(a_i) = a_i \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$$

$P$  est de degré  $n$  et unitaire donc

$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - a_i}$$

b) On en déduit

$$\det A = P(0) = (-1)^{n-1} (n-1) \prod_{i=1}^n a_i$$

Notons que l'on peut proposer une démarche plus simple en commençant par factoriser les  $a_i$  par colonnes.

**Exercice 72 :** [\[énoncé\]](#)

a) En factorisant sur la  $i$ ème colonne

$$P(a_i) = a_i \begin{vmatrix} a_i & 1 & a_n \\ a_1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_n \\ a_1 & 1 & a_i \end{vmatrix}$$

En retranchant la  $i$ ème ligne à chacune des autres

$$P(a_i) = a_i \begin{vmatrix} a_i - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & a_i - a_n \end{vmatrix}$$

et donc

$$P(a_i) = a_i \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$$

b) En utilisant la formule des déterminants

$$P(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + x \delta_{\sigma(i),i})$$

Si  $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{N}_n}$  alors  $\prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + x \delta_{\sigma(i),i}) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} + x)$  est une expression polynomiale unitaire de degré  $n$ .

Si  $\sigma \neq \text{Id}_{\mathbb{N}_n}$  alors  $\prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + x \delta_{\sigma(i),i}) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} + x)$  est une expression polynomiale de degré strictement inférieure à  $n$ .

On peut donc affirmer que  $P$  est une fonction polynomiale unitaire de degré exactement  $n$ .

c) Puisque les  $a_i$  sont deux à deux distincts

$$\frac{P(X)}{\prod_{i=1}^n (X - a_i)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

avec

$$\lambda_i = \frac{P(a_i)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} = a_i$$

d) On a  $\det(A + I_n) = P(1)$ .

Si l'un des  $a_i$  vaut 1, il suffit de reprendre la valeur de  $P(a_i)$ .

Sinon, par la décomposition précédente

$$\frac{P(1)}{\prod_{i=1}^n (1 - a_i)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_i}$$

et donc

$$\det(A + I_n) = \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_i} \right) \prod_{i=1}^n (1 - a_i)$$

**Exercice 73 :** [\[énoncé\]](#)

Il est classique d'établir  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$  en commençant par établir le résultat pour  $A$  inversible et le prolongeant par un argument de continuité et de densité.

**Exercice 74 :** [\[énoncé\]](#)

Par contraposition, montrons

$$\det A < 0 \Rightarrow \text{Sp}A \cap ]-\infty, 0[ \neq \emptyset$$

On a

$$\chi_A(X) = X^n + \dots + (-1)^n \det A$$

Si  $\det A < 0$  alors  $(-1)^n \chi_A(0) < 0$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (-1)^n \chi_A(t) = +\infty$ . Sachant la fonction  $t \mapsto \chi_A(t)$  continue, il existe  $\lambda \in ]-\infty, 0[$  racine de  $\chi_A$  et donc valeur propre de  $A$ . On peut aussi établir le résultat en observant que le déterminant de  $A$  est le produit des valeurs propres complexes de  $A$  comptées avec multiplicité. Parmi celles-ci, celles qui sont réelles sont positives et celles qui sont complexes non réelles, sont deux à deux conjuguées. Le produit est donc positif.

**Exercice 75 :** [\[énoncé\]](#)

On peut écrire

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité. On a alors

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n, B - \lambda_k I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

ce qui donne

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k \notin \text{Sp}B$$

et on peut ainsi affirmer

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset$$

**Exercice 76 :** [\[énoncé\]](#)

a) On peut écrire  $B = P^{-1}CP$  avec  $P$  inversible et alors

$$xI_n - B = P^{-1}(xI_n - C)P$$

ainsi que

$$(xI_n - B)^{-1} = P(xI_n - C)^{-1}P^{-1}$$

sous réserve d'inversibilité.

b) La matrice  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Quitte à considérer une matrice semblable, on peut supposer  $A$  triangulaire supérieure (ce qui n'affecte ni le calcul de la trace, ni celui du polynôme caractéristique  $P_A$ ). En écrivant

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on obtient

$$(xI_n - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{x-\lambda_n} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\text{tr}(xI_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}$$

car

$$P_A(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)$$

**Exercice 77 :** [\[énoncé\]](#)

a) Pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $f$  admet un polynôme minimal qui admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$  qui est alors valeur propre de  $f$ .

b) Si  $\lambda$  est valeurs propre de l'endomorphisme considéré alors il existe un polynôme  $P$  non nul tel que  $XP(X) = (1 + \lambda)P(X)$  ce qui est impossible pour des raisons de degré.

**Exercice 78 :** [\[énoncé\]](#)

a) Tout endomorphisme sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.

b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ .  $E_\lambda(u)$  est un sous-espace vectoriel stable par  $v$  (car  $u \circ v = v \circ u$ ) et l'endomorphisme induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$  admet au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à celle-ci est vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

**Exercice 79 :** [\[énoncé\]](#)

On traduit le problème en terme d'endomorphismes. Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie vérifiant  $u \circ v = v \circ u$ . Tout endomorphisme sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel admet au moins une valeur propre. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ .  $E_\lambda(u)$  est un sous-espace vectoriel stable par  $v$  (car  $u \circ v = v \circ u$ ) et l'endomorphisme induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$  admet au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à celle-ci est vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

**Exercice 80 :** [énoncé]

Si  $A$  et  $B$  ont  $\lambda$  pour valeur propre commune alors puisque  $A$  et  ${}^tA$  ont les mêmes valeurs propres, il existe des colonnes  $X, Y \neq 0$  vérifiant  ${}^tAX = \lambda X$  et  $BY = \lambda Y$ . Posons alors  $U = Y{}^tX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ .

On a  $BU = \lambda Y{}^tX$  et  $UA = Y{}^t({}^tAX) = \lambda Y{}^tX$  donc  $UA = BU$ .

Inversement, supposons qu'il existe  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non nulle vérifiant  $UA = BU$ . On peut écrire  $U = QJ_rP$  avec  $P, Q$  inversibles et  $r = \text{rg}U > 0$ . L'égalité  $UA = BU$  entraîne alors  $J_rA' = B'J_r$  avec  $A' = PAP^{-1}$  et  $B' = Q^{-1}BQ$ . Puisque semblables,  $\text{Sp}A' = \text{Sp}A$  et  $\text{Sp}B' = \text{Sp}B$ . En raisonnant par blocs, l'égalité  $J_rA' = B'J_r$  entraîne

$$A' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} M & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \text{ avec } M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

Ces formes matricielles  $\text{Sp}M \subset \text{Sp}A'$  et  $\text{Sp}M \subset \text{Sp}B'$ . Or  $\text{Sp}M \neq \emptyset$  (cadre complexe) donc  $\text{Sp}A \cap \text{Sp}B \neq \emptyset$ .

**Exercice 81 :** [énoncé]

a) Le polynôme caractéristique d'une matrice complexe possède au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

b)  $\det(I_n + \lambda T) = 1 \neq 0$  et donc  $T$  vérifie  $(P)$ .

c)  $\text{rg}T_r = r$ .

d) Les matrices  $A$  et  $B$  étant de même rang, elles sont équivalentes et donc il existe  $P, Q$  inversibles vérifiant  $A = PBQ$ . Puisqu'il existe une matrice  $M$  telle que  $\det(M + \lambda A) \neq 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a

$$\det(PMQ + \lambda B) = \det P \det(M + \lambda A) \det Q \neq 0$$

et donc  $B$  vérifie la propriété  $(P)$ .

e) Si une matrice est non inversible, elle est de même rang qu'une matrice  $T_r$  avec  $r < n$  et comme cette dernière vérifie  $(P)$ , on peut conclure qu'une matrice non inversible vérifie  $(P)$ .

Inversement, si  $A$  est une matrice inversible alors pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\det(M + \lambda A) = \det(A) \det(MA^{-1} + \lambda I_n)$$

et puisque la matrice  $MA^{-1}$  admet une valeur propre, il est impossible que  $\det(M + \lambda A)$  soit non nul pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

f) Si  $n$  est impair alors toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  admet une valeur propre (car le polynôme caractéristique réel est de degré impair). On peut alors conclure comme au dessus.

Si  $n$  est pair, la propriété précédente n'est plus vraie. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et vérifie la propriété  $(P)$  avec  $M = I_n$ .

**Exercice 82 :** [énoncé]

Tout endomorphisme sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ .  $E_\lambda(u)$  est un sous-espace vectoriel stable par  $v$  (car  $u \circ v = v \circ u$ ) et l'endomorphisme induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$  admet au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à celle-ci est vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

**Exercice 83 :** [énoncé]

On traduit le problème en termes d'endomorphismes.

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie vérifiant  $\text{rg}(u) = 1$ .

Le noyau de  $u$  est un hyperplan et si l'on fixe  $x \notin \ker u$ , on obtient

$$\text{Vect}(x) \oplus \ker u = E$$

Puisque  $u(x) \in E$ , on peut écrire  $u(x) = \lambda x + y$  avec  $y \in \ker u$  de sorte que

$$u^2(x) = \lambda u(x)$$

Les applications linéaires  $u^2$  et  $\lambda u$  sont alors égales sur  $\text{Vect}(x)$  mais aussi bien sûr sur  $\ker u$ , ces applications linéaires sont donc égales sur  $E$ .

De plus, pour  $y \in \text{Im}(u) \setminus \{0\}$ , on peut écrire  $y = u(a)$  et alors

$$u(y) = u^2(a) = \lambda u(a) = \lambda y$$

Ainsi  $\lambda$  est bien valeur propre de  $u$ .

**Exercice 84 :** [énoncé]

Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $X \neq 0$  tels que  $AX = \lambda X$ .

Posons  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ . On a  $x_i \neq 0$  et

$$|\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \|A\| |x_i|$$

d'où  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

**Exercice 85 : [énoncé]**

- a) Le vecteur  $X = {}^t(1 \dots 1)$  est évidemment vecteur propre associé à la valeur propre 1.  
 b) Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$  un vecteur propre associé. Soit  $i_0$  l'indice vérifiant

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On a  $|x_{i_0}| \neq 0$  et la relation  $AX = \lambda X$  donne  $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$  donc

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

puis  $|\lambda| \leq 1$ .

- c) Si de plus  $|\lambda| = 1$  alors il y a égalité dans l'inégalité précédente. L'égalité dans la deuxième inégalité entraîne  $|x_j| = |x_{i_0}|$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  car les coefficients de la matrice  $A$  sont tous nuls. L'égalité dans la première inégalité entraîne que les complexes engagés sont positivement liés et donc qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$x_j = |x_j| e^{i\theta}$$

On en déduit  $x_1 = \dots = x_n$  puis  $\lambda = 1$ .

**Exercice 86 : [énoncé]**

- a) Le vecteur  $X = {}^t(1 \dots 1)$  est évidemment vecteur propre associé à la valeur propre 1.  
 b) Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$  un vecteur propre associé. Soit  $i_0$  l'indice vérifiant

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On a  $|x_{i_0}| \neq 0$  et la relation  $AX = \lambda X$  donne  $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$  donc

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

puis  $|\lambda| \leq 1$ .

- c) Si de plus  $|\lambda| = 1$  alors il y a égalité dans l'inégalité précédente.

L'égalité dans la deuxième inégalité entraîne  $|x_j| = |x_{i_0}|$  pour tout  $j$  tel que  $a_{i_0,j} \neq 0$ .

L'égalité dans la première inégalité entraîne que les complexes engagés sont positivement liés et donc qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$a_{i_0,j} x_j = a_{i_0,j} |x_j| e^{i\theta}$$

Ces deux propriétés donnent pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{i_0,j} x_j = a_{i_0,j} |x_{i_0}| e^{i\theta}$  que  $a_{i_0,j} \neq 0$  ou non.

En injectant ceci dans la relation  $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$ , on obtient  $\lambda x_{i_0} = |x_{i_0}| e^{i\theta}$ .

Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $a_{i_0,j} \neq 0$ ,  $x_j = \lambda x_{i_0}$ .

Posons  $i_1 = j$  et reprenons la même démarche, ce qui est possible puisque  $|x_{i_1}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

On définit ainsi une suite  $(i_p) \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$  vérifiant  $\lambda x_{i_p} = x_{i_{p+1}}$ .

Cette suite étant non injective, il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $i_p = i_{p+q}$  ce qui donne  $\lambda^q = 1$ .

**Exercice 87 : [énoncé]**

- a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = {}^t L$$

b)  $U = I + N + \dots + N^{n-1}$ ,  $(I - N)U = I$  donc  $U^{-1} = I - N$ ,  $L^{-1} = {}^t(U^{-1}) = I - {}^t N$  donc  $A^{-1} = U^{-1} L^{-1} = I - N - {}^t N + N {}^t N$ .

- c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons  $\chi_n$  le polynôme caractéristique de  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ .

On a  $\chi_{n+2}(\lambda) = (2 - \lambda)\chi_{n+1}(\lambda) - \chi_n(\lambda)$  avec  $\chi_0(\lambda) = 1$  et  $\chi_1(\lambda) = 1 - \lambda$ .

En écrivant  $\lambda = 2 + 2 \cos \theta$  avec  $\theta \in [0, \pi]$  et en posant  $f_n(\theta) = \chi_n(2 + 2 \cos \theta)$  on a la relation :

$$f_{n+2}(\theta) + 2 \cos \theta f_{n+1}(\theta) + f_n(\theta) = 0, f_0(\theta) = 1 \text{ et } f_1(\theta) = 2 \cos \theta - 1.$$

La résolution de cette récurrence linéaire d'ordre 2 donne

$$f_n(\theta) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Ainsi,  $\chi_n$  admet  $n$  racines dans  $[0, 4]$  et puisque ce polynôme est de degré  $n$  il n'y en a pas ailleurs :  $\text{Sp}A^{-1} \subset [0, 4]$ .

**Exercice 88 :** [énoncé]

1ère méthode :

Notons  $\chi_n(\lambda)$  le polynôme caractéristique de cette matrice de taille  $n$ . Par développement du déterminant selon la dernière colonne on obtient

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)\chi_{n-1}(\lambda) - (\lambda - 1)^{n-2}$$

En étudiant les premiers termes de cette suite, on conjecture

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - (n - 1)(\lambda - 1)^{n-2}$$

ce que l'on vérifie aisément par récurrence.

Les valeurs propres de la matrice sont donc 1 (pour  $n \geq 3$ ) et les deux racines  $\lambda = 1 \pm \sqrt{n - 1}$ .

2ème méthode :

Notons  $A$  la matrice étudiée. L'équation  $AX = \lambda X$  donne le système

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = (\lambda - 1)x_2 \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda - 1)x_n \end{cases}$$

Pour  $\lambda = 1$ , on peut obtenir une solution non nulle avec les conditions

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 + \dots + x_n = 0$$

Pour  $\lambda \neq 1$ , le système devient

$$\begin{cases} (n - 1)x_1 = (\lambda - 1)^2 x_1 \\ x_2 = x_1/(\lambda - 1) \\ \vdots \\ x_n = x_1/(\lambda - 1) \end{cases}$$

Pour  $x_1 = 0$ , la solution du système est nulle.

Pour  $x_1 \neq 0$ , on peut former une solution non nulle à condition que  $(\lambda - 1)^2 = n - 1$  ce qui fournit les valeurs déjà remarquées au dessus.

**Exercice 89 :** [énoncé]

Notons  $M$  la matrice étudiée et supposons  $n \geq 3$ , les cas  $n = 1$  et  $2$  étant immédiats.

Puisque  $\text{rg}M = 2$ , 0 est valeur propre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\dim E_0(M) = n - 2$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$  un vecteur propre associé.

L'équation  $MX = \lambda X$  fournit le système

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \dots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

On en déduit

$$\lambda(\lambda - 1)x_n = \lambda x_1 + \dots + \lambda x_{n-1} = (n - 1)x_n$$

avec  $x_n \neq 0$  car  $x_n = 0$  et  $\lambda \neq 0$  entraînent  $X = 0$ .

Par suite  $\lambda$  est racine de l'équation  $\lambda^2 - \lambda - (n - 1) = 0$  et donc

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{4n - 3}}{2}$$

Inversement, on justifie que ses valeurs sont valeurs propres, soit en remontant le raisonnement, soit en exploitant la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle  $M$  pour affirmer l'existence de  $n$  valeurs propres comptées avec multiplicité.

**Exercice 90 :** [énoncé]

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

Si la matrice  $A$  est inversible alors

$${}^t(\text{com}A) = \det(A)A^{-1}$$

Les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont alors

$$\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$$

Les valeurs propres de  $\text{com}A$ , qui sont aussi celles de  ${}^t(\text{com}A)$ , sont alors les

$$\frac{\det A}{\lambda_1}, \dots, \frac{\det A}{\lambda_n}$$

Si  $\text{rg}A \leq n - 2$  alors tous les mineurs de  $A$  sont nuls et donc  $\text{com}A = O_n$  et l'on peut immédiatement conclure.

Si  $\text{rg}A = n - 1$  alors la comatrice de  $A$  est de rang inférieur à 1. En effet on a

$${}^t(\text{com}A)A = O_n$$

donc

$$\text{Im}A \subset \ker({}^t\text{com}A)$$

puis

$$\dim \ker(\text{com}A) = \dim \ker({}^t\text{com}A) \geq n - 1$$

et par la formule du rang

$$\text{rg}(\text{com}A) \leq 1$$

Sachant que la comatrice de  $A$  est de rang 0 ou 1, 0 est valeur propre de  $\text{com}A$  de multiplicité au moins égale à  $n - 1$ . Puisque la trace de  $\text{com}A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité, la dernière valeur propre de  $\text{com}A$  n'est autre

$$\text{tr}(\text{com}A)$$

Pour calculer cette dernière, considérons  $A_t = A + tI_n$  avec  $t > 0$ . Puisque  $A$  n'est pas inversible, 0 est valeur propre de  $A$  et on peut indexer les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $A$  de sorte que  $\lambda_n = 0$ .

Pour  $t$  assez petit, la matrice  $A_t$  est inversible de valeurs propres

$$\lambda_1 + t, \dots, \lambda_{n-1} + t, t$$

Les valeurs propres de la comatrice de  $A_t$  sont alors

$$\frac{\det A_t}{\lambda_1 + t}, \dots, \frac{\det A_t}{\lambda_{n-1} + t}, \frac{\det A_t}{t}$$

avec

$$\det A_t = (\lambda_1 + t) \dots (\lambda_{n-1} + t)t$$

On en déduit

$$\text{tr}(\text{com}A_t) = ((\lambda_2 + t) \dots (\lambda_{n-1} + t)t) + \dots + ((\lambda_1 + t) \dots (\lambda_{n-2} + t)t) + (\lambda_1 + t) \dots (\lambda_{n-1} + t)$$

et enfin

$$\text{tr}(\text{com}A) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \text{tr}(\text{com}A_t) = \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$$

Si  $\text{rg}A = n - 1$  alors 0 est valeur propre de multiplicité  $n - 1$  de  $\text{com}A$  et l'autre valeur propre de  $\text{com}A$  est le produit des valeurs propres non nulles de  $A$ .  
Si  $\text{rg}A \leq n - 2$  alors 0 est valeur propre au moins double de  $A$  et donc  $\text{tr}(\text{com}A) = 0$ . Dans ce cas, 0 est valeur propre de multiplicité  $n$  de  $\text{com}A$ . En fait, on peut montrer que la comatrice de  $A$  est nulle puisque tous les mineurs de  $A$  sont nuls quand  $\text{rg}A \leq n - 2$ .

**Exercice 91 :** [énoncé]

a) Par le calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 0 \\ \vdots & & 1 \\ 1 & & \vdots \\ 0 & (0) & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Puisque  $A$  et  $A^2$  ne possèdent que deux colonnes non nulles et que celles-ci sont visiblement indépendantes, on a  $\text{rg}A = \text{rg}A^2 = 2$ .

b) On a  $\text{rg}f = \text{rg}f^2$  donc  $\dim \ker f = \dim \ker f^2$ . Or  $\ker f \subset \ker f^2$  donc  $\ker f = \ker f^2$ .

Pour  $x \in \ker f \cap \text{Im}f$ , on peut écrire  $x = f(a)$  et on a  $f(x) = 0$  donc  $a \in \ker f^2 = \ker f$  puis  $x = 0$ .

On en déduit  $\ker f \cap \text{Im}f = \{0_E\}$  et un argument de dimension permet d'affirmer  $\ker f \oplus \text{Im}f = \mathbb{R}^n$ .

c) Une base adaptée à la décomposition  $\ker f \oplus \text{Im}f = \mathbb{R}^n$  permet de justifier que la matrice  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Puisqu'on a alors  $\text{rg}A = \text{rg}B = 2$ , on peut affirmer que la matrice  $B$  est inversible.

d)  $\text{tr}B = \text{tr}A = 0$  et  $\text{tr}B^2 = \text{tr}A^2 = 2$ .

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  les deux valeurs propres complexes de la matrice  $B$ . On a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2 \end{cases}$$

On en déduit

$$\{\lambda, \mu\} = \{1, -1\}$$

Ainsi

$$\text{Sp}B = \{1, -1\} \text{ et } \text{Sp}A = \{1, 0, -1\}$$

e) Par calcul de rang

$$\dim E_0(A) = \dim \ker A = n - 2$$

On a aussi

$$\dim E_1(A) = \dim E_1(B) = 1 \text{ et } \dim E_{-1}(A) = 1$$

donc la matrice  $A$  est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à  $n$ .

**Exercice 92 : [énoncé]**

Introduisons la colonne  $X_n = {}^t (u_n \quad u_{n+1} \quad \cdots \quad u_{n+p-1})$ . On vérifie  $X_{n+1} = AX_n$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la limite de  $(u_n)$ , on va chercher une constance le long de la dynamique. Il paraît naturel de la considérer linéaire et fonction  $p$  termes consécutifs de la suite. Nous cherchons donc une ligne  $L \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$  telle que  $LX_{n+1} = LX_n$ . Il suffit pour cela de déterminer  $L$  vérifiant  $L = LA$  et donc de trouver  ${}^tL$  vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre 1. Après calcul, on obtient

$$L = (a_0 \quad a_0 + a_1 \quad \cdots \quad a_0 + \cdots + a_{p-1})$$

sachant  $P(1) = 1 - (a_0 + \cdots + a_{p-1}) = 0$ .

En posant  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la relation  $LX_n = LX_0$  donne à la limite

$$\left( \sum_{k=0}^{p-1} (p-k)a_k \right) \ell = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \sum_{j=0}^k u_j$$

Puisque 1 est racine simple de  $P$ ,

$$P'(1) = p - \sum_{k=0}^{p-1} ka_k = \sum_{k=0}^{p-1} (p-k)a_k \neq 0$$

et donc

$$\ell = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} a_k \sum_{j=0}^k u_j}{P'(1)}$$

**Exercice 93 : [énoncé]**

Les coefficients de  ${}^t\text{com}(A) \cdot A$  s'interprètent comme des développements de déterminants selon une colonne. . .

Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes,  $\det A$  est le produit de ces valeurs propres.

Si  $X \neq 0$  vérifie  $AX = \lambda X$  alors  $\lambda {}^t\text{com}(A)X = (\det A)X$ .

Ainsi quand  $\lambda \neq 0$ ,  $X$  est vecteur propre de  ${}^t\text{com}(A)$  associé à la valeur propre  $\frac{\det A}{\lambda}$ .

Si  $A$  n'est pas inversible alors  $\det A = 0$  donc  ${}^t\text{com}(A)A = 0$  puis

$\text{Im}A \subset \ker {}^t\text{com}A$ .

Ainsi  $\dim \ker {}^t\text{com}(A) \geq n - 1$ . De plus  $\text{com}A \neq 0$  car  $\text{rg}A = n - 1$  (car les valeurs propres de  $A$  sont simples, en particulier 0). Par suite  $\dim \ker {}^t\text{com}(A) = n - 1$

Sous réserve que  $n \geq 2$ , 0 est valeur propre de  ${}^t\text{com}A$  et puisque  $\dim \ker {}^t\text{com}(A) = n - 1$ , il ne reste de place que pour une seule autre valeur propre.

Soit  $X \in \ker A \setminus \{0\}$ ,. On a  ${}^t\text{com}(A + tI_n)(A + tI_n)X = \det(A + tI_n)X$

Pour  $t \neq 0$ , on a  ${}^t\text{com}(A + tI_n)X = \frac{\det(A+tI_n)}{t}X$ .

Quand  $t \rightarrow 0^+$ , par continuité  ${}^t\text{com}(A + tI_n)X \rightarrow {}^t\text{com}(A)X$ .

En calculant le déterminant par diagonalisation,  $\frac{\det(A+tI_n)}{t} \rightarrow \mu$  avec  $\mu$  le produit des valeurs propres non nulles de  $A$ .

Par unicité de la limite, on obtient  ${}^t\text{com}(A)X = \mu X$ .

Au final,  ${}^t\text{com}A$  admet 2 valeurs propres : 0 et  $\mu$ .

**Exercice 94 : [énoncé]**

a)  $u_n = \chi_n(2 \cos \alpha)$  est un déterminant tridiagonal.

On développe selon la première colonne en un déterminant triangulaire et en un second déterminant qu'on développe selon la première ligne.

On obtient

$$u_n = 2 \cos(\alpha)u_{n-1} - u_{n-2}$$

La suite  $(u_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos(\alpha)r + 1 = 0$$

de racines  $e^{\pm i\alpha}$ .

Les conditions initiales donnent alors

$$u_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}$$

b) Les  $\lambda_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$  avec  $k \in \{1, \dots, n\}$  sont racines distinctes de  $P_n(x)$ .

$A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  possède  $n$  valeurs propres distinctes donc  $A$  est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

c) Posons

$$\lambda = 2 \cos(k\pi/(n+1))$$

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  vérifiant  $AX = \lambda X$ . On a

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, x_{j-1} - \lambda x_j + x_{j+1} = 0$$

La suite  $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$  est alors une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) r + 1 = 0$$

On en déduit

$$x_j = \lambda \cos\left[\frac{k\pi}{n+1}j\right] + \mu \sin\left[\frac{k\pi}{n+1}j\right]$$

Les conditions  $x_0 = x_{n+1} = 0$  donnent  $\lambda = 0$  et finalement

$$x_j = \mu \sin\left[\frac{k\pi}{n+1}j\right]$$

### Exercice 95 : [énoncé]

Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors il existe une colonne non nulle telle que  $AX = \lambda X$ . Pour  $M$  matrice dont toutes les colonnes sont égales à  $X$  on a  $u(M) = \lambda M$ . Ainsi  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ . Inversement si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ , une colonne non nulle d'un vecteur propre associé à  $\lambda$  définit un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  pour  $A$ . Ainsi  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $A$ . Finalement  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$ .

Une matrice  $M$  appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $u$  si, et seulement si, chaque colonne de  $M$  appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $A$ .

### Exercice 96 : [énoncé]

a) Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  de colonne propre  $X \neq 0$  alors pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont toutes les colonnes sont égales à  $X$ , on a  $AM = \lambda M$  avec  $M \neq 0$ . Ainsi  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $\Phi_A$ .

Inversement, si  $\lambda$  est valeur propre de  $\Phi_A$  d'élément propre  $M \neq 0$  alors pour  $X$  colonne non nul de  $M$ , on a  $AX = \lambda X$  donc  $\lambda$  valeur propre de  $A$ .

b) On remarque  $MA = {}^t({}^tA^tM)$ . Un raisonnement semblable au précédent permet d'établir que les valeurs propres de  $\Psi_A$  sont les valeurs propres de  ${}^tA$  i.e. celles de  $A$ .

### Exercice 97 : [énoncé]

a)

$$AM - MA = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

b) 0 est valeur propre avec  $E_0 = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2})$ , 1 est valeur propre avec  $E_1 = \text{Vect}(E_{2,1})$  et  $-1$  est valeur propre avec  $E_{-1} = \text{Vect}(E_{1,2})$ .

### Exercice 98 : [énoncé]

Si  $A$  est diagonalisable alors il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP = D$  diagonale. En transposant,  ${}^tP^tA^t(P^{-1}) = D$  c'est-à-dire  $Q^tAQ^{-1} = D$  avec  $Q = {}^tP$  inversible d'inverse  $Q^{-1} = {}^t(P^{-1})$ .

### Exercice 99 : [énoncé]

Il existe des matrices  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in D_n(\mathbb{K})$  telles que

$$AB = PDP^{-1}$$

On a alors

$$A(BA)A^{-1} = PDP^{-1}$$

puis

$$BA = (A^{-1}P)D(P^{-1}A) = (A^{-1}P)D(A^{-1}P)^{-1}$$

### Exercice 100 : [énoncé]

a)  $\chi_A(X) = (X - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$  de racines  $e^{i\alpha}$  et  $e^{-i\alpha}$ .

Si  $\alpha \neq 0 \quad [\pi]$  alors  $A$  possède deux valeurs propres distinctes donc  $A$  est diagonalisable.

Si  $\alpha = 0 \quad [\pi]$  alors  $A$  est diagonale.

b) Si  $\alpha \neq 0 \quad [\pi]$  alors  $A$  ne possède pas de valeurs propres (réelles) donc n'est pas diagonalisable.

Si  $\alpha = 0 \quad [\pi]$  alors  $A$  est diagonale.

c)  $\chi_B(X) = (X - \cos \alpha)(X + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha$  de racines  $\pm 1$  donc  $B$  est diagonalisable.

### Exercice 101 : [énoncé]

On obtient

$$\chi_M = X(X^2 + (ab + bc + ca))$$

Posons  $\delta = ab + bc + ca$ .

Si  $\delta < 0$  alors  $M$  est diagonalisable car  $\chi_M$  admet trois racines distinctes et donc  $M$  admet trois valeurs propres distinctes.

Si  $\delta = 0$  alors  $M$  est diagonalisable si, et seulement si  $M$  est semblable à la matrice nulle ce qui n'est le cas que si  $a = b = c = 0$ .

Si  $\delta > 0$  alors  $M$  n'est pas diagonalisable car  $\chi_M$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 102 :** [énoncé]

a)  $A$  ne possède que deux colonnes différentes donc  $\text{rg}A \leq 2$ .

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0$$

donc  $\text{rg}(A) = 2$ . Par le théorème du rang  $\dim \ker A = 2n - 2$  donc 0 est valeur propre de  $A$  et la dimension du sous-espace propre associé est  $2n - 2$ .

b) Les vecteurs  ${}^t(1 \dots 1)$  et  ${}^t(1 \ -1 \dots 1 \ -1)$  sont vecteurs propres associées aux valeurs propres non nulles  $n(a + b)$  et  $n(a - b)$ . La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut  $2n$  donc  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 103 :** [énoncé]

La matrice  $A$  est la matrice dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de l'endomorphisme

$$u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto nXP + (1 - X^2)P'$$

Considérons alors la base de polynômes étagés  $(1, (X + 1), \dots, (X + 1)^n)$ . On a

$$u((X + 1)^k) = nX(X + 1)^k + k(1 - X)(X + 1)^k$$

qui se réécrit

$$u((X + 1)^k) = (n - k)(X + 1)^{k+1} + (2k - n)(X + 1)^k$$

La matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $(1, (X + 1), \dots, (X + 1)^n)$  est triangulaire inférieure de coefficients diagonaux distincts

$$2k - n \text{ avec } k \in \{0, \dots, n\}$$

On en déduit  $\chi_A$  et on observe que  $A$  possède  $n + 1$  valeurs propres distinctes. La matrice  $A$  est donc diagonalisable.

**Exercice 104 :** [énoncé]

a) En développant selon la première colonne

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -a_0 & \dots & -a_{n-2} & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} = -a_0 + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -a_1 & \dots & -a_{n-2} & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

puis en reprenant le processus on parvient à

$$\lambda^n - (a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

On peut aussi retrouver ce résultat via l'opération élémentaire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 + \dots + \lambda^{n-1} C_n.$$

On en déduit

$$\chi_M(X) = P(X)$$

b) Si  $\lambda$  est racine du polynôme  $P$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $M$ . Après résolution, le sous-espace propre associé est engendré par la colonne

$${}^t(1 \ \lambda \ \dots \ \lambda^{n-1})$$

c) Puisque les sous-espaces propres sont de dimension 1, la matrice  $M$  est diagonalisable si, et seulement si, elle possède exactement  $n$  valeurs propres ce qui revient à dire que le polynôme  $P$  est scindé à racines simples.

**Exercice 105 :** [énoncé]

1. La matrice  $A$  est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable.

2.a)  $\text{rg}A = 2$ .

2.b) Le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé et unitaire.

Puisque  $\dim \ker A = 2$ , 0 est valeur propre au moins double de  $A$  et donc

$$\chi_A = X^2(X - u_1)(X - u_2)$$

avec  $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ .

La matrice  $A$  est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire où figurent sur la diagonale les valeurs  $0, 0, u_1$  et  $u_2$ . Par similitude, on a

$$\text{tr}A = u_1 + u_2 \text{ et } \text{tr}A^2 = u_1^2 + u_2^2$$

et donc

$$u_1 + u_2 = k \text{ et } u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6$$

Enfin  $u_1 \neq 0$  car sinon  $u_2 = k$  et  $u_2^2 = k^2 \neq k^2 + 6$ . De même  $u_2 \neq 0$ .  
 2.c) Si  $u_1 = u_2$  alors  $u_1 = u_2 = k/2$  et  $k^2/2 = k^2 + 6$  donc  $k = \pm i2\sqrt{3}$ .  
 La résolution du système

$$AX = \frac{k}{2}X$$

conduit à un espace de solution de dimension 1

$$\text{Vect}^t(1, k/2, 1, 1)$$

2.d) Finalement, la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  si, et seulement si,  $k \neq \pm i2\sqrt{3}$ .

**Exercice 106 : [énoncé]**

En ajoutant la troisième colonne à la première puis en retranchant la première ligne à la troisième

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda - 2 & 5 + x & x \\ 0 & -2 - x - \lambda & -x \\ 0 & -x & 3 - x - \lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + (2x - 1)\lambda - x - 6)$$

Le facteur  $a$  pour discriminant

$$\Delta = (2x - 1)^2 + 4x + 24 = 4x^2 + 25 > 0$$

et possède donc deux racines réelles distinctes. Si celles-ci diffèrent de  $-2$ , alors la matrice  $A$  possède trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. Il est donc nécessaire que  $-2$  soit racine de  $\lambda^2 + (2x - 1)\lambda - x - 6$  pour que la matrice  $A$  ne soit pas diagonalisable. C'est le cas si, et seulement si,  $x = 0$  et alors

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\text{rg}(A + 2I_3) = 2$$

et donc  $\dim E_{-2}(A) = 1 < m_{-2}(A)$  ce qui entraîne que la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

Finalement  $A$  n'est pas diagonalisable si, et seulement si,  $x = 0$ .

**Exercice 107 : [énoncé]**

a) On obtient

$$A^t A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$$

et donc  $(\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$ .

D'autre part, pour  $b, c, d$  fixés,  $a \mapsto \det A$  est une fonction polynomiale unitaire de degré 4 donc

$$\det A = a^4 + \alpha(b, c, d)a^3 + \beta(b, c, d)a^2 + \gamma(b, c, d)a + \delta(b, c, d)$$

La valeur connue de  $(\det A)^2$  permet alors de déterminer  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et d'affirmer

$$\det(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$  alors  $\text{rg}(A) = 4$ .

Si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$  alors  $\text{rg}(A) \leq 3$ . Or  $a^2 + b^2 \neq 0$  donc la sous matrice

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  est de rang 2 et donc  $\text{rg}(A) \geq 2$ .

On observe de plus que

$$C_3 = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}C_1 + \frac{bc - ad}{a^2 + b^2}C_2$$

et

$$C_4 = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}C_1 + \frac{bd + ac}{a^2 + b^2}C_2$$

donc  $\text{rg}(A) = 2$ .

b) Par la formule obtenue ci-dessus,  $\chi_A = ((a - X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)$  et donc  $\chi_A = ((a - X)^2 + \alpha^2)^2$ .

Les valeurs propres de  $A$  sont  $a + \alpha$  et  $a - \alpha$ .

Par l'étude qui précède  $\text{rg}(A - (a + \alpha)\text{Id}) = 2$  et  $\text{rg}(A - (a - \alpha)\text{Id}) = 2$  donc

$$\dim E_{a+\alpha}(A) = \dim E_{a-\alpha}(A) = 2$$

et par suite  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 108 : [énoncé]**

a)  $\text{rg}(A) = 0$  si  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$  et  $\text{rg}(A) = 2$  sinon.

b) La somme des valeurs propres est nulle.

c) En développant le déterminant selon la dernière colonne puis en développant les mineurs obtenus selon leur  $k$ -ième colonne, on obtient

$$\chi_A = X^{n-2}(X^2 - (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2))$$

Si  $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \neq 0$  alors  $A$  admet deux valeurs propres opposées non nulles et 0 pour valeur propre d'espace propre de dimension  $n - 2$  donc  $A$  est diagonalisable.  
 Si  $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 0$  alors 0 est la seule valeur propre de  $A$  et  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A = 0$  i.e.  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ .

**Exercice 109 :** [énoncé]

a) On écrit  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  et alors

$$BX = \lambda X \Leftrightarrow X_2 = \lambda X_1 \text{ et } AX_1 = \lambda X_2 \Leftrightarrow X_2 = \lambda X_1 \text{ et } AX_1 = \lambda^2 X_1$$

Par conséquent  $\lambda$  est valeur propre de  $B$  si, et seulement si,  $\lambda^2$  est valeur propre de  $A$ .

b) Si  $A = O_n$  alors  $A$  est diagonalisable mais pas  $B$ .

En effet, 0 est la seule valeur propre de  $B$  alors que  $B \neq O_n$ .

**Exercice 110 :** [énoncé]

Soient  $F_1$  et  $F_2$  des sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimension  $p$  et  $q$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Soit  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  une base adaptée à la complémentarité de  $F_1$  et  $F_2$  et  $f_1, f_2$  et  $f$  les endomorphismes de  $F_1, F_2$  et  $E$  déterminés par  $\text{Mat}(f_1, \mathcal{B}_1) = A_1, \text{Mat}(f_2, \mathcal{B}_2) = A_2$  et  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = A$ . Il est clair que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $E_\lambda(f) = E_\lambda(f_1) \oplus E_\lambda(f_2)$ . En caractérisant la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on conclut à l'équivalence voulue.

**Exercice 111 :** [énoncé]

Via un changement de bases réalisé de sorte que les premiers vecteurs soient dans le noyau de  $A$ , on peut écrire

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O_{n-1} & \star \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda = \text{tr}A$ .

Si  $\lambda \neq 0$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  ce qui permet de diagonaliser  $A$ .

Si  $A$  est diagonalisable, sachant que  $A$  n'est pas nulle,  $\lambda \neq 0$ .

**Exercice 112 :** [énoncé]

Posons  $M = X^t Y$ . On a  $M^2 = X(^t Y X)^t Y$ . Or  $\alpha = ^t Y X$  est un scalaire donc  $M^2 = \alpha X^t Y = \alpha M$ .

Si  $\alpha \neq 0$  alors  $M$  annule le polynôme scindé simple  $X(X - \alpha)$  et donc  $M$  est diagonalisable.

Si  $\alpha = 0$  alors  $M$  annule le polynôme  $X^2$  et donc 0 est la seule valeur propre possible. Si  $M$  est diagonalisable alors  $M$  est semblable à la matrice nulle et donc  $M = O_n$ . Ceci est exclu car on suppose les colonnes  $X$  et  $Y$  non nulles.

Au final  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\alpha \neq 0$ .

Notons que  $\alpha = \text{tr}(^t Y X) = \text{tr}(X^t Y) = \text{tr}M$  et que  $M$  est une matrice de rang 1. On peut montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

**Exercice 113 :** [énoncé]

Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $J$ .

Posons  $\varepsilon_1 = e_1 + \dots + e_n$ , de sorte que  $f(\varepsilon_1) = n\varepsilon_1$ .

Puisque  $\text{rg}f = \text{rg}J = 1$ , on peut introduire  $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  base du noyau de  $f$ .

Il est alors clair que  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  et que la matrice de  $f$  dans celle-ci est diagonale.

On peut aussi observer  $J^2 = nJ$  et exploiter que  $X(X - n)$  est un polynôme annulateur scindé simple de  $J$ .

**Exercice 114 :** [énoncé]

En posant  $M = (a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ , on vérifie  $M^2 = \lambda M$  avec  $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$ .

Si  $\lambda \neq 0$  alors  $M$  annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable.

Si  $\lambda = 0$  alors  $M^2 = 0$  et donc  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $M = 0$  ce qui revient à  $(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

Notons que la matrice  $M$  est symétrique mais pas nécessairement réelle : le théorème spectral ne s'applique pas.

**Exercice 115 :** [énoncé]

$E_{i,i}$  est diagonale donc diagonalisable.

Pour  $i \neq j$ ,  $\chi_{E_{i,j}}(X) = (-1)^n X^n$  donc seul 0 est valeur propre. Par suite si  $E_{i,j}$  est diagonalisable alors  $E_{i,j} = 0$  ce qui est incorrect. Conclusion  $E_{i,j}$  diagonalisable si, et seulement si,  $i = j$ .

**Exercice 116 :** [énoncé]

On obtient  $N^2 = sN$  avec  $s = a_1 + \dots + a_n$ .

Puisque  $s > 0$ ,  $N$  annule un polynôme scindé simple et donc est diagonalisable.  $-1/2$  n'est pas valeur propre de  $N$  car n'est pas racine du polynôme annulateur  $X^2 - sX$  donc  $M$  est inversible. En recherchant  $M^{-1}$  de la forme  $xM + yI_n$ , on obtient

$$M^{-1} = I_n - (2 + s)N$$

**Exercice 117 :** [énoncé]

a)  $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$  avec  $D(a, b) = \text{diag}((a + b)^2, (a - b)^2, a^2 - b^2, a^2 - b^2)$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)  $M(a, b)^n \rightarrow 0$  si, et seulement si,  $|a + b| < 1$ ,  $|a - b| < 1$  et  $|a^2 - b^2| < 1$ .  
Or  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.  
L'étude graphique est alors simple.

**Exercice 118 :** [énoncé]

$A = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(a + (n - 1)b, a - b, \dots, a - b)$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

$B = Q\Delta Q^{-1}$  avec

Si  $n$  est impair :  $\Delta = \text{diag}(a + (n - 1)b, b - a, \dots, b - a, a - b, \dots, a - b)$  et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -2 & \dots & -2 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Si  $n$  pair :  $\Delta = \text{diag}(a + (n - 1)b, b - a, \dots, b - a, a - b, \dots, a - b)$  et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 1 \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & -1 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & -1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & (0) \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & \end{pmatrix}$$

**Exercice 119 :** [énoncé]

Etudions la première matrice que nous noterons  $A$ . Celle-ci est de rang 2 et on peut facilement déterminer une base de son noyau. En posant le système  $AX = \lambda X$  avec  $\lambda \neq 0$ , on obtient une solution non nulle sous réserve que

$$\lambda^2 - \lambda - (n - 1) = 0$$

En notant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux racines de cette équation, on obtient  $A = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 1 & 1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

En reprenant la même démarche avec la seconde matrice que nous noterons  $B$ , on obtient  $B = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & & (0) & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les deux racines de

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n - 2) = 0$$

**Exercice 120 : [énoncé]**

Cas  $a = b = 0$  la résolution est immédiate.

Cas  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , la matrice  $M_n$  est triangulaire supérieure stricte non nulle, elle n'est pas diagonalisable.

Cas  $a \neq 0$  et  $b = 0$ , idem.

Cas  $a = b$

$$\chi_{M_n}(X) = (X - (n-1)a)(X+a)^{n-1}$$

avec

$$E_{(n-1)a} = \text{Vect}(1, \dots, 1)$$

et

$$E_{-a} : x_1 + \dots + x_n = 0$$

La matrice  $M_n$  est donc diagonalisable et il est aisé de former une base de vecteurs propres.

Cas  $a \neq b$  et  $ab \neq 0$

Après calculs (non triviaux)

$$\chi_{M_n}(X) = (-1)^n \frac{b(X+a)^n - a(X+b)^n}{b-a}$$

Les racines de ce polynôme sont les solutions de l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$

$$\left(\frac{z+a}{z+b}\right)^n = \frac{a}{b}$$

Il y en a exactement  $n$  s'exprimant en fonction des racines  $n$ -ième de l'unité.

On en déduit que  $M_n$  est diagonalisable.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M_n$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ .

L'équation  $M_n x = \lambda x$  équivaut au système

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + bx_2 + \dots + bx_n = 0 \\ ax_1 - \lambda x_2 + \dots + bx_n = 0 \\ \vdots \\ ax_1 + \dots + ax_{n-1} - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

En retranchant à chaque équation la précédente, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + bx_2 + \dots + bx_n = 0 \\ (a+\lambda)x_1 + (b+\lambda)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (a+\lambda)x_{n-1} - (b+\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Puisque ce système est de rang  $n-1$  (car  $\lambda$  est valeur propre simple) et puisque les  $n-1$  dernières équations sont visiblement indépendantes, ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} (a+\lambda)x_1 + (b+\lambda)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (a+\lambda)x_{n-1} - (b+\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce dernier est immédiate. On obtient pour vecteur propre  $x = (x_1, \dots, x_n)$  avec

$$x_k = \left(\frac{a+\lambda}{b+\lambda}\right)^k$$

**Exercice 121 : [énoncé]**

$A$  est diagonalisable avec  $\text{Sp}A = \{1, 4\}$ .

Pour  $P_n$  un polynôme vérifiant  $P_n(1) = 1^n$  et  $P_n(4) = 4^n$ , on a  $A^n = P(A)$ .

$$P_n = 1^n + \frac{4^n - 1^n}{3}(X-1)$$

convient et donc

$$A^n = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I_3$$

**Exercice 122 : [énoncé]**

a)  $\alpha = \text{tr}A = 2 \cos \theta$  et  $\beta = -\det A = -\cos 2\theta$  conviennent.

b) Les racines de  $X^2 - 2 \cos \theta X + \cos 2\theta$  sont  $\cos \theta + \sin \theta$  et  $\cos \theta - \sin \theta$ .

Réalisons la division euclidienne  $X^n$  par  $X^2 - 2 \cos \theta X + \cos 2\theta$ .

$$X^n = (X^2 - 2 \cos \theta X + \cos 2\theta) Q(X) + R(X)$$

avec  $\deg R < 2$ ,

$$R(\cos \theta + \sin \theta) = (\cos \theta + \sin \theta)^n$$

et

$$R(\cos \theta - \sin \theta) = (\cos \theta - \sin \theta)^n$$

On obtient

$$R = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^n - (\cos \theta - \sin \theta)^n}{2 \sin \theta} (X - \cos \theta - \sin \theta) + (\cos \theta + \sin \theta)^n$$

et donc

$$A^n = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^n - (\cos \theta - \sin \theta)^n}{2 \sin \theta} (A - (\cos \theta + \sin \theta)I_2) + (\cos \theta + \sin \theta)^n I_n$$

**Exercice 123 :** [\[énoncé\]](#)

a) 1ère méthode :

$$\det(\lambda I_n - M) = \begin{vmatrix} \lambda & & -1 & & \\ & \ddots & & & \\ -1 & & & & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - (n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ \lambda - (n-1) & \lambda & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda - (n-1) & -1 & & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - (n-1)) \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \lambda & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda & \end{vmatrix}$$

puis  $\det(\lambda I_n - M) = (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$  et donc  $\text{sp}(M) = \{-1, (n-1)\}$ .  
Soit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $M$ .

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0$$

Donc  $E_{-1}$  est l'hyperplan d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ .

Puisque  $E_{n-1}$  est au moins une droite vectorielle, la matrice  $M$  est diagonalisable.

2ème méthode :

Par le calcul, on observe que  $M^2 = (n-1)I_n + (n-2)M$ .

Par suite,  $M$  annule le polynôme scindé simple  $(X+1)(X-(n-1))$  et donc  $M$  est diagonalisable.

b) Le polynôme minimal de  $M$  est  $(X+1)(X-(n-1))$  car en vertu de la première méthode, la connaissance des valeurs propres de  $M$  détermine son polynôme minimal sachant  $M$  diagonalisable et, pour la deuxième méthode, ce polynôme est annulateur alors que les polynômes  $X+1$  et  $X-(n-1)$  ne le sont pas.

Par division euclidienne  $X^p = (X+1)(X-(n-1))Q + \alpha X + \beta$

En évaluant la relation en  $-1$  et en  $n-1$ , on obtient avec

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = (-1)^p \\ \alpha(n-1) + \beta = (n-1)^p \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} \\ \beta = \frac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n} \end{cases}$$

d'où

$$M^p = \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} M + \frac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n} I_n$$

**Exercice 124 :** [\[énoncé\]](#)

a)  $\text{sp}(A) = \{1, 3, -4\}$ .

b) Il existe une matrice  $P$  inversible tel que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(1, 3, -4)$ .  
Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est solution de l'équation  $M^2 = A$  alors  $(P^{-1}MP)^2 = D$  et donc  $P^{-1}MP$  commute avec la matrice  $D$ . Or celle-ci est diagonale à coefficient diagonaux distincts donc  $P^{-1}MP$  est diagonale de coefficients diagonaux  $a, b, c$  vérifiant  $a^2 = 1, b^2 = 3$  et  $c^2 = -4$ . La réciproque est immédiate. Il y a 8 solutions possibles pour  $(a, b, c)$  et donc autant de solutions pour  $M$ . Les solutions réelles sont a fortiori des solutions complexes or toutes les solutions complexes vérifient  $\text{tr} M = a + b + c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Il n'existe donc pas de solutions réelles.

**Exercice 125 :** [\[énoncé\]](#)

a)  $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 6)$ .

$\begin{cases} 5x + 3y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé à la valeur propre 2.

$\begin{cases} 5x + 3y = 6x \\ x + 3y = 6y \end{cases} \Leftrightarrow -x + 3y = 0$  et  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé à la valeur propre 6.

On a  $A = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Si  $M$  est solution alors  $P^{-1}MP$  est solution de l'équation  $X^2 + X = D$  donc  $P^{-1}MP$  et  $D$  commutent or  $D$  est diagonale à coefficients diagonaux distincts donc  $P^{-1}MP$  est diagonale

c) Les coefficients diagonaux  $a, b$  vérifient  $a^2 + a = 2$  et  $b^2 + b = 6$  donc  $a = 1$  ou  $a = -2$  et  $b = 2$  ou  $b = -3$ . Au termes des calculs on obtient les solutions

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$$

**Exercice 126 :** [\[énoncé\]](#)

a) En développant selon la dernière ligne

$$\det(\lambda I_n - J) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n - 1$$

$J$  possède exactement  $n$  valeurs propres qui sont les racines  $n$ -ième de l'unité  $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$  avec  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ .

b) Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  la matrice de passage telle que  $J = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} = a_0I + a_1J + a_2J^2 + \cdots + a_{n-1}J^{n-1}$$

donc

$$P^{-1}AP = a_0I + a_1D + a_2D^2 + \cdots + a_{n-1}D^{n-1} = \text{diag}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_i^k\right)_{0 \leq i \leq n-1}\right)$$

puis

$$\det A = \det(P^{-1}AP) = \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_i^k$$

**Exercice 127 :** [\[énoncé\]](#)

La colonne  ${}^t(1 \ 1 \ 1)$  est vecteur propre associé à la valeur propre 6.

Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines

$$6, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

Ces deux matrices sont semblables à

$$\text{diag}\left(6, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et donc a fortiori semblables entre elles dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , mais aussi, et c'est assez classique, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 128 :** [\[énoncé\]](#)

a) Pour tout élément  $A \in G$ , on a  $A^{-1} = A$ . On en déduit que pour tout  $A, B \in G$ ,

$$AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$$

b) Montrons le résultat par récurrence forte sur  $n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$ , la propriété est immédiate.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang  $n - 1 \geq 1$ .

Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  vérifiant la propriété de l'énoncé.

S'il n'existe pas d'autre élément dans  $G$  que  $I_n$  et  $-I_n$ , la propriété est acquise.

Sinon, il existe un élément  $A \in G$  autre que  $I_n$  et  $-I_n$ . Puisque  $A^2 = I_n$ , on a

$$\ker(A - I_n) \oplus \ker(A + I_n) = \mathbb{R}^n$$

Il existe donc une matrice inversible  $P$  vérifiant

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Soit  $M$  un autre élément de  $G$ . Puisque  $A$  et  $M$  commutent, les sous-espaces propres de  $A$  sont stables par  $M$  et on peut donc écrire

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M' & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & M'' \end{pmatrix}$$

Sachant  $M^2 = I_n$ , on a  $M'^2 = I_r$  et  $M''^2 = I_{n-r}$  de sorte que les ensembles  $G'$  et  $G''$  formés des matrices  $M'$  et  $M''$  ainsi obtenues sont des sous-groupes de respectivement  $(\text{GL}_r(\mathbb{R}), \times)$  et  $(\text{GL}_{n-r}(\mathbb{R}), \times)$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $P'$  et  $P''$  inversibles telles que

$$\forall M' \in G', P'^{-1}M'P' \in D_r(\mathbb{K}) \text{ et } \forall M'' \in G'', P''^{-1}M''P'' \in D_{n-r}(\mathbb{K})$$

et en posant alors

$$Q = \begin{pmatrix} P' & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & P'' \end{pmatrix} P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

on a

$$\forall M \in G, Q^{-1}MQ \in D_n(\mathbb{K})$$

Récurrence établie.

c) Les matrices appartenant à  $G$  sont semblables, via une même matrice de passage, à des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux ne peuvent qu'être 1 et  $-1$ . Il n'existe que  $2^n$  matrices de ce type dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on en déduit

$$\text{Card}G \leq 2^n$$

d) Soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  vers  $(\text{GL}_m(\mathbb{R}), \times)$ .

Considérons l'ensemble  $G$  formé des matrices diagonales  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^2 = I_n$ .  $G$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  de cardinal exactement  $2^n$ .

Puisque pour tout  $M \in G$ ,

$$\varphi(M)^2 = \varphi(M^2) = \varphi(I_n) = I_m$$

l'ensemble  $\varphi(G)$  est un sous-groupe de  $(GL_m(\mathbb{R}), \times)$  vérifiant

$$\forall M' \in \varphi(G), M'^2 = I_m$$

Par l'étude qui précède, on peut affirmer

$$\text{Card}\varphi(G) \leq 2^m$$

et puisque

$$\text{Card}\varphi(G) = \text{Card}G = 2^n$$

on en déduit  $n \leq m$ .

Un raisonnement symétrique donne  $m \geq n$  et permet de conclure.

**Exercice 129 :** [énoncé]

Il existe des matrices  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $D \in D_n(\mathbb{R})$  telles que

$$B = PDP^{-1}$$

Si  $AB^3 = B^3A$  alors

$$APD^3P^{-1} = PD^3P^{-1}A$$

puis on obtient

$$MD^3 = D^3M$$

avec  $M = P^{-1}AP$ .

Notons  $m_{i,j}$  le coefficient général de  $M$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de  $D$ .

La relation  $MD^3 = D^3M$  donne

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j}\lambda_j^3 = m_{i,j}\lambda_i^3$$

et donc

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j} = 0 \text{ ou } \lambda_i^3 = \lambda_j^3$$

Comme la fonction  $x \mapsto x^3$  est injective sur  $\mathbb{R}$ , on obtient

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j} = 0 \text{ ou } \lambda_i = \lambda_j$$

et donc

$$MD = DM$$

puis

$$AB = BA$$

**Exercice 130 :** [énoncé]

On peut écrire

$$A = PDP^{-1} \text{ et } B = Q\Delta Q^{-1}$$

avec  $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $D, \Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonales.

Si  $A^pMQ^q = O_n$  alors

$$D^pN\Delta^q = O_n$$

avec  $N = P^{-1}MQ = (n_{i,j})$ .

En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les coefficients diagonaux de  $D$  et  $\Delta$ , on obtient

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda_i^q n_{i,j} \mu_j^q = 0$$

et donc

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda_i n_{i,j} \mu_j = 0$$

puis

$$DN\Delta = O_n$$

ce qui permet de conclure.

**Exercice 131 :** [énoncé]

$\varphi(I_2) = 1$  donc si  $P$  est inversible alors  $\varphi(P^{-1}) = \varphi(P)^{-1}$ . Par suite, si  $A$  et  $B$  sont semblables alors  $\varphi(A) = \varphi(B)$ .

Puisque  $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  sont semblables,  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \mu$  puis

$\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \lambda\mu$ . Ainsi pour  $A$  diagonale,  $\varphi(A) = \det A$  et plus généralement

cela vaut encore pour  $A$  diagonalisable. Si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , non diagonalisable, celle-ci est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

Si  $\lambda = 0$  alors  $A^2 = 0$  et donc  $\varphi(A) = 0 = \det A$ .

Si  $\lambda \neq 0$  alors puisque  $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$  et que  $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$  est diagonalisable, on obtient  $2\varphi(A) = 2\lambda^2 = 2\det A$  et on peut conclure.

**Exercice 132 :** [énoncé]

Introduisons la colonne  $X_n = {}^t (u_n \quad v_n \quad w_n)$  et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte qu'on ait  $X_{n+1} = AX_n$  et donc  $X_n = A^n X_0$ .

Après réduction, on a  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors  $A^n = PD^n P^{-1}$  puis

$$X_n = PD^n P^{-1} X_0$$

La suite  $(X_n)$  converge si, et seulement si, la suite  $(P^{-1}X_n)$  converge. Or

$$P^{-1}X_n = D^n P^{-1}X_0$$

converge si, et seulement si, les deux derniers coefficients de la colonne  $P^{-1}X_0$  sont nuls ce qui donne  $X_0$  de la forme

$$X_0 = P \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Finalement, les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  convergent si, et seulement si,  $u_0 = v_0 = w_0$  (et ces suites sont alors en fait constantes...)

**Exercice 133 :** [énoncé]

Posons  $T = M^2$ . Il est clair que  $T$  et  $M$  commutent et l'étude de cette commutation peut, par le calcul, permettre de conclure que  $M$  est triangulaire supérieure. On peut aussi proposer une démonstration plus abstraite que voici : Les coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $T$  déterminent ses valeurs propres et la matrice  $T$  est donc diagonalisable. On peut donc écrire  $T = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Puisque  $M$  est  $T$  commutant, les matrices  $N = P^{-1}MP$  et  $D$  commutent. Or les matrices commutant avec une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts sont elles-mêmes diagonales. La matrice  $N$  est donc diagonale

$$N = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

En considérant un polynôme d'interpolation  $Q \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant

$$\forall 1 \leq k \leq n, Q(\lambda_k) = \mu_k$$

on obtient  $N = Q(D)$  puis  $M = Q(T)$ . En particulier, la matrice  $M$  est triangulaire supérieure.

**Exercice 134 :** [énoncé]

a) On vérifie

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

b) On observe

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ O_n & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E \\ O_n & B \end{pmatrix}$$

avec  $E = AD + C - DB$ .

Pour conclure, montrons qu'il existe  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $DB - AD = C$ . Considérons pour cela l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  défini par

$$\varphi(M) = MB - AM$$

Pour  $M \in \ker \varphi$ , on a  $MB = AM$ .

Pour tout  $X$  vecteur propre de  $B$  associé à une valeur propre  $\lambda$ , on a

$$AMX = MBX = \lambda MX$$

Puisque  $\lambda$  est valeur propre de  $B$ ,  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $A$  et donc  $MX = O_{n,1}$ .

Puisqu'il existe une base de vecteurs propres de  $B$  et puisque chacun annule  $M$ , on a  $M = O_n$ .

Ainsi l'endomorphisme  $\varphi$  est injectif, or  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie donc  $\varphi$  est bijectif. Ainsi il existe une matrice  $D$  telle  $\varphi(D) = C$  et, par celle-ci, on obtient la similitude demandée.

**Exercice 135 :** [énoncé]

Supposons que l'équation étudiée admet une solution  $\theta$ .

En passant aux parties réelle et imaginaire on obtient

$$\begin{cases} \cos \theta + \cos k\theta = 1 \\ \sin \theta + \sin k\theta = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$\theta = -k\theta \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta = \pi - k\theta \quad [2\pi]$$

Si  $\theta = \pi - k\theta \quad [2\pi]$  alors  $\cos \theta + \cos k\theta = 0$  et le système initial n'est pas vérifié.

Si  $\theta = -k\theta \quad [2\pi]$  alors

$$\cos \theta + \cos k\theta = 1 \Leftrightarrow \cos \theta = 1/2$$

ce qui donne  $\theta = \pi/3 \quad [2\pi]$  ou  $\theta = -\pi/3 \quad [2\pi]$ .

Cas  $\theta = \pi/3 \quad [2\pi]$

On obtient

$$\begin{cases} \theta = \pi/3 + 2p\pi \\ (k+1)\theta = 2q\pi \end{cases}$$

avec  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

On a alors

$$(6p+1)(k+1) = 6\ell$$

Puisque  $6\ell \wedge (6p+1) = 1$ , le théorème de Gauss donne  $6 \mid (k+1)$ .

Inversement, si  $6 \mid (k+1)$  alors on peut écrire  $k+1 = 6\ell$  et pour  $\theta = \pi/3$

$$e^{i\pi/3} + e^{i(6\ell-1)\pi/3} = e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 1$$

donc l'équation étudiée admet au moins une solution.

Cas  $\theta = -\pi/3 \quad [2\pi]$

Une étude semblable conduit à la même condition.

Finalement, l'équation étudiée possède une solution réelle si, et seulement si,

$$6 \mid (k+1)$$

b) Supposons que 6 divise  $k+1$ . Pour  $\theta = \pi/3$  on a

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

donc en multipliant par  $e^{-ik\theta}$

$$e^{-ik\theta} = 1 + e^{-i(k-1)\theta}$$

La suite  $v$  de terme général  $v_n = e^{-in\theta}$  vérifie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+k} = v_n + v_{n+k-1}$$

et donc la suite  $u = \text{Re}v$  est un élément non nul de  $S_k$ . Puisque

$$u_n = \cos \frac{n\pi}{3}$$

la suite  $u$  est périodique et non nulle.

Inversement, montrons qu'il est nécessaire que 6 divise  $k+1$  pour qu'il existe une suite périodique non nulle dans  $S_k$ . On vérifie aisément que  $S_k$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $k$  dont une base est formée par les suites  $e_0, e_1, \dots, e_{k-1}$  déterminées par

$$\forall 0 \leq n \leq k-1, e_j(n) = \delta_{n,j} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, e_j(n+k) = e_j(n) + e_j(n+k-1)$$

Considérons l'endomorphisme  $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$  opérant sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

On vérifie aisément que  $T$  laisse stable  $S_k$  ce qui permet d'introduire l'endomorphisme induit par  $T$  sur  $S_k$  que nous noterons encore  $T$ . Affirmer l'existence d'une suite périodique non nulle dans  $S_k$  signifie que 1 est valeur propre d'une puissance  $T^q$  de  $T$ .

La matrice de  $T$  dans la base  $(e_0, \dots, e_{k-1})$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

car  $T(e_{k-1}) = e_{k-1} + e_0$ . Le polynôme caractéristique de  $T$  est

$$\chi_T(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -X & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

Par l'opération  $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \dots + X^{k-1}L_k$ , on obtient

$$\chi_T(X) = (-1)^k (X^k - X^{k-1} - 1)$$

Les valeurs propres complexes de  $T$  sont alors les racines du polynôme

$$X^k - X^{k-1} - 1$$

On vérifie que ce polynôme et son polynôme dérivé n'ont pas de racines en commun; on en déduit que  $T$  admet exactement  $k$  valeurs propres complexes distinctes. L'endomorphisme  $T$  est diagonalisable dans le cadre complexe, il en est de même de  $T^q$  dont les valeurs propres sont alors les puissances  $q$ ème des valeurs propres de  $T$ . Ainsi 1 est valeur propre de  $T^q$  si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} - 1 = 0 \text{ et } \lambda^q = 1$$

Un tel nombre complexe peut s'écrire  $\lambda = e^{-i\theta}$  et l'on parvient alors à l'existence d'une solution à l'équation

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

et donc à la condition  $6 \mid (k+1)$ .

**Exercice 136 :** [énoncé]

Puisque  $\text{Im}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u + \text{Id}_E) = \{0_E\}$ , on a

$$\text{rg}(u - \text{Id}_E) + \text{rg}(u + \text{Id}_E) \leq \dim E$$

puis par la formule du rang

$$\dim \ker(u - \text{Id}_E) + \dim \ker(u + \text{Id}_E) \geq \dim E$$

On en déduit que  $u$  est diagonalisable de valeurs propres possibles 1 et  $-1$ .

**Exercice 137 :** [énoncé]

a) clair, notamment il n'y a pas de problème sur le degré de  $\varphi(P)$ .

b)  $\varphi(X^k) = X^k - k(X+1)X^{k-1} = (1-k)X^k - kX^{k-1}$ . La matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $E$  est triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux sont alors les racines du polynôme caractéristique et ce sont donc les valeurs propres de  $\varphi$  à savoir  $1, 0, -1, \dots, (1-n)$ . Ces  $n+1 = \dim E$  valeurs sont distinctes donc  $\varphi$  est diagonalisable.

**Exercice 138 :** [énoncé]

L'application  $f$  est clairement linéaire de  $\mathbb{R}[X]$  vers lui-même. De plus, si  $\deg P \leq n$ , il est aisé d'observer que  $\deg f(P) \leq n$ . On peut donc conclure que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

ce qui permet de former la représentation matricielle souhaitée. On constate alors que la matrice de  $f$  est triangulaire de coefficients diagonaux  $0, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)$  distincts. Il est alors aisé de calculer le polynôme caractéristique de  $f$  est de conclure que  $f$  est diagonalisable, de valeurs propres  $0, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)$  et de sous-espaces propres de dimension 1.

**Exercice 139 :** [énoncé]

a) Si  $\deg P \leq n-1$ , il est clair que  $\varphi(P) \in E$ .

Si  $\deg P = n$  après simplification des termes en  $X^{n+1}$ , on obtient que  $\varphi(P) \in E$ .

La linéarité de  $\varphi$  est claire et donc on peut conclure que  $\varphi$  est un endomorphisme.

b) La matrice de  $\varphi$  dans la base canonique est tridiagonale et peu pratique.

Formons plutôt la matrice de  $\varphi$  dans la base des  $(X-a)^k$

$$\varphi((X-a)^k) = k(X-a)^k(X-b) - nX(X-a)^k$$

donc

$$\varphi((X-a)^k) = (k-n)(X-a)^{k+1} + (k(a-b) - na)(X-a)^k$$

et cette fois-ci la matrice de  $\varphi$  est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux distincts :

$$-nb, -(a+(n-1)b), -(2a+(n-2)b), \dots, -((n-1)a+b), -na$$

qui sont les valeurs propres de  $\varphi$ . Puisque  $\varphi$  admet  $n+1$  valeurs propres distinctes et que  $\dim E = n+1$ , on peut conclure que  $\varphi$  est diagonalisable

**Exercice 140 :** [énoncé]

Si  $M$  appartient à l'hyperplan des matrices de trace nulle alors  $\phi(M) = M$  et donc  $M \in E_1(\phi)$ .

Ainsi l'espace propre  $E_1(\phi)$  est de dimension au moins égale à  $n^2 - 1$ .

De plus,  $\phi(I_n) = (n+1)I_n$  donc l'espace propre  $E_{n+1}(\phi)$  est de dimension au moins égale à 1.

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est au moins égale à  $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'endomorphisme  $\phi$  est diagonalisable (et les inégalités précédentes étaient des égalités).

**Exercice 141 :** [énoncé]

a) Soit  $P$  un polynôme.  $P(F)(u) = P(f) \circ u$  donc  $P(f) = 0 \Leftrightarrow P(F) = 0$ . La diagonalisabilité étant équivalente à l'existence d'un polynôme scindé à racines simples, on peut conclure.

b)  $f$  et  $F$  ont le même polynôme minimal donc les mêmes valeurs propres.

c) Tout  $u \in \mathcal{L}(E, E_\lambda(f)) \subset \mathcal{L}(E)$  est élément de  $E_\lambda(F)$  donc

$$\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f). \text{ Mais par diagonalisabilité } \dim \mathcal{L}(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(F)} \dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E^2 = \dim \mathcal{L}(E) \text{ et donc on a les égalités } \dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f) \text{ pour tout } \lambda \in \text{Sp}(f).$$

**Exercice 142 :** [énoncé]

a) oui

b) Pour  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $\text{Im} f \subset \text{Imp}$  et  $\ker p \subset \ker f$  alors  $\mathcal{F}(f) = f$ .

Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\text{Imp}$  vers  $\text{Imp}$ .

On en déduit

$$\dim E_1(\mathcal{F}) \geq (\dim \text{Imp})^2$$

Si  $\text{Im} f \subset \ker p$  et  $\text{Imp} \subset \ker f$  alors  $\mathcal{F}(f) = 0$ .

Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\ker p$  vers  $\ker p$ .

On en déduit

$$\dim E_0(\mathcal{F}) \geq (\dim \ker p)^2$$

Si  $\text{Im} f \subset \text{Imp}$  et  $\text{Imp} \subset \ker f$  alors  $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2}f$ .

Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\ker p$  vers  $\text{Imp}$ .

Si  $\text{Im} f \subset \ker p$  et  $\ker p \subset \ker f$  alors  $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2}f$ .

Un tel endomorphisme  $f$  est entièrement déterminé par sa restriction de  $\text{Imp}$  vers  $\ker p$ .

De plus un endomorphisme appartenant à ces deux dernières catégories est nécessairement nul.

On en déduit

$$\dim E_{1/2}(\mathcal{F}) \geq 2 \dim \ker p \times \dim \text{Imp}$$

Or

$$(\dim \text{Imp})^2 + 2 \dim \ker p \dim \text{Imp} + (\dim \ker p)^2 = (\dim \text{Imp} + \dim \ker p)^2 = \dim E^2 = \dim \mathcal{L}(E)$$

donc  $\mathcal{F}$  est diagonalisable avec

$$c) \dim E_1(\mathcal{F}) = (\dim \text{Imp})^2, \dim E_0(\mathcal{F}) = (\dim \ker p)^2 \text{ et}$$

$$\dim E_{1/2}(\mathcal{F}) = 2 \dim \ker p \times \dim \text{Imp}.$$

**Exercice 143 :** [énoncé]

On écrit

$$B = \alpha(X - x_0) \dots (X - x_n)$$

Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  est vecteur propre de  $\Phi$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors

$B \mid (A - \lambda)P$ . Pour des raisons de degré,  $B$  et  $A - \lambda$  ne peuvent être premiers

entre eux, ces polynômes ont donc une racine commune. Ainsi il existe

$i \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $\lambda = A(x_i)$ . Inversement pour  $\lambda = A(x_i)$ ,

$$P = \prod_{j=0, j \neq i}^n (X - x_j), \Phi(P) = \lambda P \text{ avec } P \neq 0. \text{ Ainsi } \text{Sp} \Phi = \{A(x_i) / i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Précisons le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = A(x_i)$ .

Quitte à réindexer, on peut supposer que  $\lambda = A(x_0)$ .

S'il existe d'autres  $x_i$  tels que  $\lambda = A(x_i)$  on réindexe encore les  $x_1, \dots, x_n$  de sorte

que  $\lambda = A(x_0) = \dots = A(x_p)$  et  $\lambda \neq A(x_{p+1}), \dots, A(x_n)$ . Ainsi  $x_0, \dots, x_p$  sont

racines de  $A - \lambda$  alors que  $x_{p+1}, \dots, x_n$  ne le sont pas.

Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\Phi(P) = \lambda P$  si, et seulement si,  $B \mid (A - \lambda)P$ . Or

$A - \lambda = (X - x_0) \dots (X - x_p) \tilde{A}$  avec  $x_{p+1}, \dots, x_n$  non racines de  $\tilde{A}$ . Puisque

$$(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \wedge \tilde{A} = 1, B \mid (A - \lambda)P \text{ équivaut à } (X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \mid P.$$

Ainsi

$$E_\lambda(\Phi) = \{(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n)Q / Q \in \mathbb{R}_{n-p}[X]\}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à la dimension de l'espace,  $\Phi$  est diagonalisable.

**Exercice 144 :** [énoncé]

L'application  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$  car le reste  $R$  d'une division euclidienne par  $B$  vérifie

$$\deg R < \deg B \leq n$$

Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  et  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ .

On a

$$AP_1 = BQ_1 + f(P_1) \text{ et } AP_2 = BQ_2 + f(P_2)$$

donc

$$A(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = B(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

avec

$$\deg(\lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)) \leq \max\{\deg f(P_1), \deg f(P_2)\} < \deg B$$

Par unicité d'une division euclidienne, on peut affirmer

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

Puisque les valeurs prises par  $f$  sont  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , l'endomorphisme  $f$  ne peut être surjectif, ce n'est donc pas un isomorphisme.

b) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $f(P) = \lambda P$  alors c'est qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$AP = BQ + \lambda P$$

Cas  $\lambda = 0$ .

On a  $f(P) = 0$  si, et seulement si, le polynôme  $B$  divise le polynôme  $AP$ . Or  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, donc  $f(P) = 0$  si, et seulement si,  $B$  divise  $P$ .

On en déduit que 0 est valeur propre de  $f$  et le sous-espace propre associé est

$$E_0(f) = B.\text{Vect}(1, X, \dots, X^{n-\deg B})$$

c'est-à-dire l'espace des multiples de  $B$  inclus dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Cas  $\lambda \neq 0$ . On obtient

$$(A - \lambda)P = BQ$$

et donc  $B$  divise le polynôme  $(A - \lambda)P$ . Or  $\deg P < \deg B$  donc au moins une des racines de  $B$  n'est pas racine de  $P$  et est donc racine de  $A - \lambda$ . Ainsi  $\lambda = A(x_k)$  avec  $x_k$  une des racines de  $B$ .

Inversement, soit  $x_k$  une racine de  $B, \lambda = A(x_k)$  et

$$P_k = \prod_{j \neq k} (X - x_j) \neq 0$$

On a  $\deg P_k < \deg B$  et  $B \mid (A - A(x_k))P_k$ . On en déduit  $f(P_k) = A(x_k)P_k$  et donc  $A(x_k)$  est valeur propre de  $f$  et  $P_k$  en est un vecteur propre associé.

c) La famille de  $P_k$  se comprend comme la famille d'interpolation de Lagrange en les  $x_k$ , elle constitue donc une base de  $\mathbb{R}_{\deg B-1}[X]$ . Puisque  $\ker f = E_0(f)$  est un supplémentaire de cet espace, l'endomorphisme est diagonalisable.

**Exercice 145 : [énoncé]**

Posons  $\phi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  étudié. On observe que  $\phi^3 = \phi$ . Par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que  $\phi$  est diagonalisable de seules valeurs propres possibles 0, 1 et  $-1$ .

En introduisant une base adaptée à la projection  $f$ , la matrice de cet endomorphisme est  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En notant  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  la matrice de  $u$  dans cette base, on obtient :

$$\phi(u) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \text{ et } C = 0.$$

$$\phi(u) = u \Leftrightarrow A = 0, C = 0 \text{ et } D = 0.$$

$$\phi(u) = -u \Leftrightarrow A = 0, B = 0 \text{ et } D = 0.$$

**Exercice 146 : [énoncé]**

Supposons  $f$  diagonalisable et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres de  $f$ .

Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , on pose  $g_{i,j}$  l'endomorphisme de  $E$  déterminé par

$$g_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}e_i$$

La famille  $(g_{i,j})$  est une base de  $\mathcal{L}(E)$  et on observe

$$T(g_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)g_{i,j}$$

donc  $T$  est diagonalisable.

Supposons  $f$  nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  pour lequel  $f^n = 0$ .

Puisque  $T^p(g)$  est combinaison linéaire de termes de la forme  $f^k \circ g \circ f^{p-k}$ , il est assuré que  $T^{2n} = 0$  et donc que  $T$  est nilpotente.

**Exercice 147 : [énoncé]**

a) On obtient

$$\text{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}$$

b) D'une part

$$f(e_1 + \dots + e_n) = (n+1)(e_1 + \dots + e_n)$$

et d'autre part, pour  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$  avec  $x_1 + \dots + x_n = 0$  on a

$$f(x) = x$$

On en déduit que 1 et  $n+1$  sont valeurs propres de  $f$  et puisque la valeur propre 1 est associée à un hyperplan, il ne peut y avoir d'autres valeurs propres.

En résumé  $\text{Sp}f = \{1, n+1\}$  et

$$E_1(f) = \{x/x_1 + \dots + x_n = 0\} \text{ et } E_{n+1}(f) = \text{Vect}(e_1 + \dots + e_n)$$

c) L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable car

$$\dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = n$$

d) Par les valeurs propres

$$\det f = (n+1) \neq 0$$

et l'endomorphisme  $f$  est inversible...

**Exercice 148 : [énoncé]**

a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$ .

Il existe  $v \in \mathcal{L}(E) \setminus \{\tilde{0}\}$  tel que  $u \circ v = \lambda v$ .

Soit alors  $x \in E$  tel que  $v(x) \neq 0$  (ce qui est possible puisque  $v \neq \tilde{0}$ )

Puisque  $u(v(x)) = \lambda v(x)$ , on peut affirmer que  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ .

Inversement soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé.

Considérons  $v$  l'endomorphisme de  $E$  déterminé par

$$\forall 1 \leq i \leq n, v(e_i) = x$$

L'endomorphisme  $v$  est bien déterminé puisqu'on a ici fixé l'image d'une base.

Puisque  $u \circ v = \lambda v$  (car cette égalité vaut pour les vecteurs d'une base), on obtient  $\varphi(v) = \lambda v$  avec  $v \neq \tilde{0}$ . Ainsi  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $\varphi$ .

b et c) Sachant  $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$ ,

$$UE_{i,j} = \sum_{k,\ell=1}^n u_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i}E_{k,j}$$

Dans la base  $((E_{1,1}, \dots, E_{n,1}), (E_{1,2}, \dots, E_{n,2}), \dots, (E_{1,n}, \dots, E_{n,n}))$ , la matrice de  $\varphi$  est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux chacun égaux à  $U$ .

**Exercice 149 :** [énoncé]

- a)  $\varphi(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ . La matrice de  $\varphi$  relative à la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonale.
- b) Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  dans laquelle l'endomorphisme  $f$  est représenté par une matrice diagonale  $D$ . En introduisant l'image réciproque de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par l'isomorphisme de représentation matricielle dans  $\mathcal{B}$ , on obtient une base de  $\mathcal{L}(E)$  dans laquelle  $\phi$  est représenté par une matrice diagonale.

**Exercice 150 :** [énoncé]

On vérifie aisément que  $\Phi$  est endomorphisme de  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ .

- a) En choisissant la base de  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  formée des matrices  $E_{1,1}, E_{2,2}$  et  $E_{1,2} + E_{2,1}$ , on obtient la matrice de  $\Phi$  suivante

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b \\ 0 & 2d & 2c \\ c & b & a+d \end{pmatrix}$$

- b) Par la règle de Sarrus, on calcule  $\chi_\Phi(\lambda)$  et on obtient

$$\chi_\Phi(2\lambda) = -4(2\lambda - (a+d))\chi_A(\lambda)$$

- c) Posons  $\Delta$  égal au discriminant de  $\chi_A$ .  
Si  $\Delta > 0$  alors  $\chi_\Phi$  possède trois racines réelles distinctes

$$a+d, a+d+\sqrt{\Delta} \text{ et } a+d-\sqrt{\Delta}$$

Si  $\Delta = 0$  alors  $\chi_\Phi$  possède une racine réelle triple

$$a+d$$

Si  $\Delta < 0$  alors  $\chi_\Phi$  possède une racine réelle et deux racines complexes non réelles. Supposons  $\Phi$  diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de  $\Phi$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  donc  $\Delta \geq 0$ .

Si  $\Delta > 0$  alors  $\chi_A$  possède deux racines réelles distinctes et donc la matrice  $A$  est diagonalisable.

Si  $\Delta = 0$  alors  $\Phi$  est diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre  $\lambda = a+d$  donc l'endomorphisme  $\Phi$  est une homothétie vectorielle de rapport égal à cette valeur propre. On obtient matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b \\ 0 & 2d & 2c \\ c & b & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 & 0 \\ 0 & a+d & 0 \\ 0 & 0 & a+d \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et donc la matrice  $A$  est diagonalisable.

d) Supposons  $A$  diagonalisable

Le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  donc  $\Delta \geq 0$ .

Si  $\Delta > 0$  alors  $\Phi$  est diagonalisable car possède 3 valeurs propres réelles distinctes.

Si  $\Delta = 0$  alors  $A$  possède une seule valeur propre et étant diagonalisable, c'est une matrice scalaire

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et alors la matrice de  $\Phi$  est diagonale

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

**Exercice 151 :** [énoncé]

- a) Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  valeurs propres distinctes de  $f$  et  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs propres associés. La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est base de  $E$ .

Posons  $a = x_1 + \dots + x_n$ . Pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,

$$f^k(a) = \lambda_1^k x_1 + \dots + \lambda_n^k x_n$$

Supposons  $\alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ . En exprimant cette relation en fonction des vecteurs de la famille libre  $(x_1, \dots, x_n)$ , on parvient à  $P(\lambda_1) = \dots = P(\lambda_n) = 0$  avec

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$$

Le polynôme  $P$  admet plus de racines que son degré donc  $P = 0$  puis  $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ .

Ainsi la famille  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  est libre et finalement base de  $E$ .

En fait, n'importe quel vecteur dont les coordonnées sont toutes non nulles dans la base de vecteur propre est solution.

b) La matrice de  $f$  dans la base considérée est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$f^n(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$$

**Exercice 152 :** [\[énoncé\]](#)

a) ok

b) Supposons  $g \in \mathcal{C}_f$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$  et tout  $x \in E_\lambda(f)$ ,  $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$  donc  $g(x) \in E_\lambda(f)$ . Ainsi les sous-espaces propres sont stables par  $g$ .

Inversement, supposons que chaque sous-espace propre soit stable par  $g$ . Pour tout  $x \in E$ , on peut écrire  $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$  et on a

$$g(f(x)) = g\left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda x_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda g(x_\lambda)$$

et

$$f(g(x)) = f\left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} g(x_\lambda)\right) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda g(x_\lambda)$$

donc  $f$  et  $g$  commutent.

c) Considérons  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \mathcal{L}(E_\lambda(f))$  l'endomorphisme défini par  $\varphi(g)$  est

le produit des restrictions aux  $E_\lambda(f)$  de  $g$ . Cette application est bien définie en vertu des stabilités évoquées en b). Cette application est clairement bijective car, par diagonalisabilité de  $f$ ,  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$  et qu'on sait une application  $g$  est

alors entièrement déterminée par ses restrictions aux  $E_\lambda(f)$ . Par isomorphisme

$$\dim \mathcal{C}_f = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \alpha_\lambda^2.$$

d) Ici  $\dim \mathcal{C}_f = n$  et les  $\text{Id}, f, \dots, f^{n-1}$  sont clairement éléments de  $\mathcal{C}_f$ .

Supposons  $\lambda_0 \text{Id} + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$ . Posons

$P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ . Ce polynôme est annulateur de  $f$  donc les valeurs propres de  $f$  en sont racines. Ce polynôme possède au moins  $n$  racines, or il est de degré strictement inférieur à  $n$ , donc il est nul et ainsi

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Finalement  $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$  est une famille libre formé de  $n = \dim \mathcal{C}_f$  éléments de  $\mathcal{C}_f$ , c'en est donc une base.

**Exercice 153 :** [\[énoncé\]](#)

a) Un endomorphisme non nul vérifiant  $f^2 = 0$  avec  $f \neq 0$  convient. C'est le cas

d'un endomorphisme représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres de  $f$ . La matrice de  $f$  dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et alors les espaces

$$\ker f = \text{Vect} \{e_i / \lambda_i = 0\} \text{ et } \text{Im} f = \text{Vect} \{e_i / \lambda_i \neq 0\}$$

sont évidemment supplémentaires (puisque associés à des regroupements de vecteurs d'une base).

c) On vérifie  $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ . La suite des dimensions des noyaux des  $f^k$  est croissante et majorée par  $n$ . Elle est donc stationnaire et il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall l \geq k, \dim \ker f^{\ell+1} = \dim \ker f^\ell$$

Par inclusion et égalité des dimensions

$$\forall l \geq k, \ker f^{\ell+1} = \ker f^\ell$$

En particulier  $\ker f^{2k} = \ker f^k$ . On peut alors établir  $\text{Im} f^k \cap \ker f^k = \{0_E\}$  et par la formule du rang on obtient la supplémentarité

$$\text{Im}(f^k) \oplus \ker(f^k) = E$$

L'endomorphisme  $f^k$  n'est pas nécessairement diagonalisable. Pour s'en convaincre il suffit de choisir pour  $f$  un automorphisme non diagonalisable.

d) Le résultat n'est plus vrai en dimension infinie comme le montre l'étude de l'endomorphisme de dérivation dans l'espace des polynômes.

**Exercice 154 :** [\[énoncé\]](#)

Pour  $\lambda = |\lambda| e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$  avec  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , on pose

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{|\lambda|} e^{i\alpha/2}$$

ce qui définit une notion de racine carrée sur les nombres complexes et nous permettra de nous exprimer avec plus d'aisance. . .

a) Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteur propre de  $v$ . La matrice de  $v$  dans cette base est de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Considérons l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}u = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = \Delta$$

On vérifie aisément que  $u^2 = v$ .

b) Par les polynômes interpolateurs de Lagrange, on peut introduire un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant

$$\forall \lambda \in \text{Sp}u, P(\lambda) = \sqrt{\lambda}$$

On observe alors

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \Delta$$

et donc  $P(v)$  se confond avec l'endomorphisme  $u$  précédemment introduit.

### Exercice 155 : [énoncé]

a) Puisque  $f$  possède  $n$  valeurs propres en dimension  $n$ , il est diagonalisable et ses valeurs propres sont simples. Les sous-espaces propres de  $f$  sont donc de dimension 1.

b)  $g \circ f = g^3 = f \circ g$ .

Puisque  $f$  et  $g$  commutent, les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$ .

Si  $x$  est vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $g(x)$  appartient au même sous-espace propre et puisque celui-ci est une droite et que  $x$  est non nul,  $g(x)$  est colinéaire à  $x$ . Ainsi  $x$  est vecteur propre de  $g$ .

c) Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $f$  et considérons une base de vecteurs propres de  $f$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Un endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant  $g^2 = f$  a une matrice diagonale dans la base de vecteurs propres de  $f$  précédente.

Résoudre l'équation  $g^2 = f$  revient alors à résoudre l'équation  $\Delta^2 = D$  avec  $\Delta$  la matrice diagonale

$$\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

L'équation  $\Delta^2 = D$  équivaut à

$$\forall 1 \leq i \leq n, \alpha_i^2 = \lambda_i$$

Si les  $\lambda_i$  ne sont pas tous positifs ou nuls, il n'y a pas de solutions.

Si les  $\lambda_i$  sont tous positifs ou nuls alors les solutions de l'équation  $g^2 = f$  sont les endomorphismes représentés dans la base de vecteurs propres de  $f$  par les matrices

$$\text{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n})$$

Si aucune des valeurs propres n'est nulle, il y a  $2^n$  solutions et si l'une d'elle est nulle, il y a  $2^{n-1}$  solutions.

### Exercice 156 : [énoncé]

Il est bien connu que les polynômes en  $f$  commutent avec  $f$ .

Inversement, soit  $g$  un endomorphisme commutant avec  $f$ .

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $f$  et  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs propres associés. La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  diagonalisant  $f$  et les sous-espaces propres de  $f$  sont de dimension 1. Puisque  $f$  et  $g$  commutent, ses sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$  et donc, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $\mu_k$  tel que  $g(e_k) = \mu_k e_k$ . Considérons alors un polynôme interpolateur  $P$  vérifiant

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(\lambda_k) = \mu_k$$

On a pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$P(f)(e_k) = P(\lambda_k)(e_k) = \mu_k e_k = g(e_k)$$

Puisque les applications linéaires  $P(f)$  et  $g$  sont égales sur une base, on peut conclure

$$P(f) = g$$

### Exercice 157 : [énoncé]

Soient  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $x \in E_\lambda(u)$  non nul. On a

$$v^3(x) = u^3(x) = \lambda^3 x$$

Or  $v$  est diagonalisable donc, en notant  $\mu_1, \dots, \mu_p$  les valeurs propres de  $v$ , on a la décomposition en somme directe

$$E = \bigoplus_{j=1}^p E_{\mu_j}(v)$$

On peut alors écrire  $x = \sum_{j=1}^p x_j$  avec  $x_j \in E_{\mu_j}(u)$ . L'égalité  $v^3(x) = \lambda^3 x$  donne

$$\sum_{j=1}^p \mu_j^3 x_j = \sum_{j=1}^p \lambda^3 x_j$$

Les espaces  $E_{\mu_j}(v)$  étant en somme directe, on peut identifier les termes de ces sommes

$$\mu_j^3 x_j = \lambda^3 x_j$$

Si  $x_j \neq 0_E$ , on obtient  $\mu_j = \lambda$  et donc  $\mu_j x_j = \lambda x_j$ .

Si  $x_j = 0_E$ , l'identité  $\mu_j x_j = \lambda x_j$  reste vraie.

On en déduit

$$v(x) = \lambda x = u(x)$$

Ainsi les endomorphismes  $v$  et  $u$  coïncident sur  $E_\lambda(u)$ . Or, l'endomorphisme  $u$  étant diagonalisable,  $E$  est la somme des sous-espaces propres de  $u$ . Les endomorphismes  $v$  et  $u$  coïncident donc sur  $E$ .

**Exercice 158 :** [énoncé]

Son polynôme caractéristique est scindé.

**Exercice 159 :** [énoncé]

a) Si  $B = O_n$  alors tout vecteur propre de  $A$  (et il en existe car le corps de base est  $\mathbb{C}$ ) est aussi vecteur propre de  $B$ .

Si  $B \neq O_n$  alors l'espace  $\text{Im} B$  est stable par  $B$  et il existe alors un vecteur propre de  $B$  dans  $\text{Im} B$ . Puisque  $\text{Im} B \subset \ker A$  car  $AB = O_n$ , ce vecteur propre de  $B$  est aussi vecteur propre de  $A$  (associé à la valeur propre 0).

b) Par récurrence sur la taille  $n$  des matrices.

Pour  $n = 1$ , c'est immédiat.

Supposons la propriété vérifiée au rang  $n - 1 \geq 1$ .

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $AB = O_n$ . Soit  $X_1$  un vecteur propre commun aux matrices  $A$  et  $B$  associé aux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement. Soit  $P$  une matrice inversible dont la première colonne est  $X_1$ . Par changement de base on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & \star \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

Puisque  $AB = O_n$  on a  $\lambda\mu = 0$  et  $A'B' = O_{n-1}$ .

Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice  $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$  telle que  $Q^{-1}A'Q$  et  $Q^{-1}B'Q$  sont triangulaires supérieures. Pour la matrice

$$R = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

on obtient  $R^{-1}AR$  et  $R^{-1}BR$  triangulaires supérieures.

Récurrence établie

**Exercice 160 :** [énoncé]

a)  $\chi_A(X) = (X + 1)(X - 1)^2$ .

b)  $E_{-1} = \text{Vect}^t(1 \ 1 \ 2)$ ,  $E_1 = \text{Vect}^t(1 \ 0 \ 1)$ .

La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable mais on peut la rendre semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend  $C_1 = {}^t(1 \ 1 \ 2)$ ,  $C_2 = {}^t(1 \ 0 \ 1)$ .

On détermine  $C_3$  tel que  $AC_3 = C_3 + C_2$ .  $C_3 = {}^t(0 \ -1 \ 0)$  convient.

Pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a  $P^{-1}AP = T$ .

**Exercice 161 :** [énoncé]

a)  $\chi_A(X) = (X - 1)^3$ .

b)  $E_1 = \text{Vect}^t(1 \ 0 \ 1)$ .

La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, mais on peut la rendre semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend  $C_1 = {}^t(1 \ 0 \ 1)$ .

On détermine  $C_2$  tel que  $AC_2 = C_2 + C_1$ .  $C_2 = {}^t(0 \ 1 \ 0)$  convient.

On détermine  $C_3$  tel que  $AC_3 = C_3 + C_2$ .  $C_3 = {}^t(0 \ -1 \ 1)$  convient.

Pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a  $P^{-1}AP = T$ .

**Exercice 162 :** [\[énoncé\]](#)

Le polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = (X - 1)^3$  est scindé donc  $A$  est trigonalisable.

On a

$$E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et puisque

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a  $A = PTP^{-1}$  avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 163 :** [\[énoncé\]](#)

Notons  $A$  la matrice étudiée.

Après calcul, son polynôme caractéristique est  $\chi_A = (X - 9)^3$ .

Celui-ci est scindé et par conséquent la matrice  $A$  est trigonalisable.

Après résolution

$$E_9(A) = \text{Vect}(1, 1, -1/2)$$

$\dim E_9(A) = 1$  et  $X_1 = {}^t(1 \ 1 \ -1/2)$  est vecteur propre. Complétons ce vecteur en une base et considérons la matrice de passage associée

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -2 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

Considérons alors la sous matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique  $(X - 9)^2$  car  $\chi_{A'}(X) = (X - 9)\chi_A(X)$ . Après résolution

$$E_9(A') = \text{Vect}(1, 1/2)$$

Considérons la matrice de passage

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$(P'^{-1})A'P' = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Enfin, pour

$$Q = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**Exercice 164 :** [\[énoncé\]](#)

a)  $\chi_A = X(X - 1)(X - a)$ .

Si  $a \neq 0, 1$  alors  $A$  est diagonalisable.

Si  $a = 0$  alors  $\text{rg} A = 2$  donc  $\dim \ker A = 1 < m_0(A)$  et la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

Si  $a = 1$  alors  $\text{rg}(A - I) = 2$  et par le même argument qu'au dessus,  $A$  n'est pas diagonalisable.

On conclut

$$\Omega = \{0, 1\}$$

b) Cas  $a = 0$

$$\ker A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \ker(A - I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la matrice suivante convient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas  $a = 1$

$$\ker A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \ker(A - I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la matrice suivante convient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 165 : [énoncé]

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $f$  et  $g$  commutent.

$$\forall x \in \ker(f - \lambda \text{Id}), (f - \lambda \text{Id})(g(x)) = g(f(x) - \lambda x) = 0$$

donc  $\ker(f - \lambda \text{Id})$  est stable par  $g$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons que chaque sous-espace propre soit stable par  $g$ .

Puisque  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ , pour tout  $x \in E$ , on peut écrire  $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$  avec

$x_\lambda \in E_\lambda$  et alors

$$(g \circ f)(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda g(x_\lambda) = (f \circ g)(x)$$

donc  $f \circ g = g \circ f$ .

### Exercice 166 : [énoncé]

Rappelons que tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel possède au moins un valeur propre.

1ère démarche : Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ .  $E_\lambda(f)$  est stable par  $f$  et donc possède un supplémentaire  $F$  stable par  $f$ .

Si  $F = \{0_E\}$  alors  $f$  est diagonalisé.

Sinon, la restriction de  $f$  à  $F$  possède au moins une valeur propre  $\mu$  qui est bien entendu valeur propre de  $f$ . L'espace  $E_\lambda(f) \oplus E_\mu(f)$  est stable par  $f$  et donc possède un supplémentaire  $G$  stable par  $f$ .

Si  $G = \{0_E\}$  alors  $f$  est diagonalisé.

Sinon, on itère le processus.

2ème démarche : Le sous-espace vectoriel  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}f} E_\lambda(f)$  est stable par  $f$ , il

admet donc un supplémentaire stable  $G$ , si  $G \neq \{0_E\}$  alors  $f_G$  admet un vecteur propre qui sera aussi vecteur propre de  $f$  donc élément de  $F$ . C'est contradictoire donc  $G = \{0_E\}$  puis

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}f} E_\lambda(f)$$

ce qui affirme  $f$  diagonalisable.

### Exercice 167 : [énoncé]

Les endomorphismes recherchés sont les endomorphismes diagonalisables.

En effet, si  $f$  est diagonalisable et si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $f$  alors puisque  $f_F$  est diagonalisable, il existe une base de  $F$  formée de vecteurs propres de  $f$ . En complétant cette base à l'aide de vecteur bien choisis dans une base diagonalisant  $f$ , les vecteurs complétant engendrent un supplémentaire de  $F$  stable par  $f$ .

Inversement, si  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifie la propriété proposée alors le sous-espace vectoriel  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}f} E_\lambda(f)$  étant stable par  $f$ , celui-ci admet un supplémentaire stable. Or  $f$  ne possède pas de vecteurs propres sur ce dernier et celui ne peut donc qu'être  $\{0\}$  car ici le corps de base est  $\mathbb{C}$ . Par suite  $F = E$  et donc  $f$  est diagonalisable.

### Exercice 168 : [énoncé]

a) Si  $e \notin H$  alors la valeur de  $u(e)$  détermine entièrement un élément  $u$  de  $\{u \in E^*/u(H) = \{0\}\}$ . Cela permet de mettre en place un isomorphisme entre  $\{u \in E^*/u(H) = \{0\}\}$  et  $\mathbb{K}$ . La dimension cherchée vaut 1.

b) Si  $H$  est stable par  $f$  alors pour tout  $x \in H$ ,  $u(f(x)) = 0$  donc  $u \circ f \in \{v \in E^*/v(H) = \{0\}\}$  or  $u$  est un élément non nul de cette droite vectorielle donc  $u \circ f$  est colinéaire à  $u$ . La réciproque est immédiate.

c)  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = L \neq 0$  (car  $u$  définit une équation d'hyperplan),  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ f) = LA$  donc

$$u \circ f = \lambda u \Leftrightarrow LA = \lambda L \Leftrightarrow {}^t A {}^t L = \lambda {}^t L$$

avec  ${}^t L$  colonne non nulle.

d)  $\text{Sp}({}^t A) = \{1, 2, -1\}$ . Une base de vecteurs propres est formée des vecteurs de composantes  $(-1, -1, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  et  $(-1, 0, 1)$ . Les plans stables par  $f$  sont ceux d'équations  $x + y - z = 0$ ,  $y + z = 0$  et  $x - z = 0$ .

**Exercice 169 :** [énoncé]

Si l'endomorphisme  $u$  possède une valeur propre alors la droite vectorielle engendrée par un vecteur propre associé est évidemment stable par  $u$ . Sinon, la matrice réelle  $A$  représentant  $u$  dans une base n'a que des valeurs propres complexes non réelles. Parmi celles-ci considérons en une que nous notons  $\lambda$ . Il existe alors une colonne complexe  $Z$  non nulle telle que  $AZ = \lambda Z$ . En écrivant  $\lambda = \alpha + i\beta$  et  $Z = X + iY$  avec  $\alpha, \beta, X, Y$  réels, l'équation précédente donne

$$AX = \alpha X - \beta Y \text{ et } AY = \beta X + \alpha Y$$

Considérons ensuite les vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  représentés par les colonnes réelles  $X$  et  $Y$ . Les relations précédentes donnent

$$u(x), u(y) \in \text{Vect}(x, y)$$

et donc le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(x, y)$  est stable par  $u$ .

Or celui-ci n'est pas nul car  $Z \neq 0$  et est donc de dimension 1 ou 2 (et en fait 2 car l'absence de valeurs propres réelles dans le cas présent signifie l'absence de droite vectorielle stable).

**Exercice 170 :** [énoncé]

a) Par l'absurde supposons  $X$  et  $Y$  colinéaires. Il existe alors une colonne  $X_0$  réelle telle que

$$X = \alpha X_0 \text{ et } Y = \beta X_0 \text{ avec } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

On a alors  $Z = (\alpha + i\beta)X_0$  et la relation  $AZ = \lambda Z$  donne

$$(\alpha + i\beta)AX_0 = \lambda(\alpha + i\beta)X_0$$

Puisque  $\alpha + i\beta \neq 0$ , on peut simplifier et affirmer  $AX_0 = \lambda X_0$ . Or  $X_0$  est une colonne réelle donc, en conjuguant,  $AX_0 = \bar{\lambda}X_0$  puis  $\lambda \in \mathbb{R}$  ce qui est exclu.

b) On écrit  $\lambda = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . La relation  $AZ = \lambda Z$  donne en identifiant parties réelles et imaginaires

$$AX = aX - bY \text{ et } AY = aY + bX$$

On en déduit que  $\text{Vect}(X, Y)$  est stable par  $A$ .

c) Le polynôme caractéristique de  $f$  est

$$(X + 1)(X - 2)(X^2 - 2X + 2)$$

Les valeurs propres de  $A$  sont  $-1, 2$  et  $1 \pm i$  avec

$$E_{-1}(A) = \text{Vect}^t(0, 0, 1, 0), E_2(A) = \text{Vect}^t(1, 1, 0, 1) \text{ et } E_{1+i}(A) = \text{Vect}^t(i, -1, 0, 1)$$

Soit  $P$  un plan stable par  $f$ . Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $u$  induit par  $f$  sur ce plan divise le polynôme caractéristique de  $f$  tout en étant réel et de degré 2. Ce polynôme caractéristique ne peut qu'être

$$(X + 1)(X - 2) \text{ ou } X^2 - 2X + 2$$

Dans le premier cas, 1 et 2 sont valeurs propres de  $u$  et les vecteurs propres associés sont ceux de  $f$ . Le plan  $P$  est alors

$$\text{Vect}\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$$

Dans le second cas, pour tout  $x \in P$ , on a par le théorème de Cayley Hamilton

$$u^2(x) - 2u(x) + 2x = 0_E$$

et donc la colonne  $X$  des coordonnées de  $x$  vérifie

$$X \in \ker(A^2 - 2A + 2I_4)$$

Après calculs, on obtient

$$X \in \text{Vect}({}^t(1, 0, 0, 0), {}^t(0, -1, 0, 1))$$

Ainsi le plan est inclus dans le plan

$$\text{Vect}\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1)\}$$

ce qui suffit à le déterminer.

**Exercice 171 :** [énoncé]

Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$u$  annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme  $u$  est donc diagonalisable. Tout sous-espace vectoriel possédant une base de vecteurs propres est stable et inversement.

Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id})$$

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable alors posons

$$F_1 = F \cap \ker(u - \text{Id})$$

et

$$F_2 = F \cap \ker(u^2 + u + \text{Id})$$

Montrons  $F = F_1 \oplus F_2$ .

Tout  $x \in F$  peut s'écrire  $x = a + b$  avec  $a \in \ker(u - \text{Id})$  et  $b \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$ .

Puisque  $u(x) = a + u(b) \in F$  et  $u^2(x) = a + u^2(b) \in F$ , on a

$$a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)) \in F \text{ puis } b = x - a \in F.$$

Ainsi  $a \in F_1$ ,  $b \in F_2$  et on a donc  $F \subset F_1 + F_2$ .

Il est alors immédiat qu'on peut alors conclure  $F = F_1 \oplus F_2$ .

Puisque  $F_2 \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$ , pour  $x \in F_2$  non nul  $(x, u(x))$  est libre et

$\text{Vect}(x, u(x))$  est stable par  $u$ . Cela permet d'établir que  $F_2$  est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme  $\text{Vect}(x, u(x))$  avec  $x \neq 0$ ,

$x \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$ . Quant à  $F_1$ , il n'y a pas de condition à souligner puisque tout sous-espace vectoriel de  $\ker(u - \text{Id})$  est stable par  $u$ .

### Exercice 172 : [énoncé]

Si  $F$  admet une base de vecteurs propres, il est immédiat d'établir qu'il est stable par  $u$ .

Inversement, si  $F$  est stable alors  $u_F$  est diagonalisable et donc il existe une base de  $F$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

### Exercice 173 : [énoncé]

$\text{Sp}f = \{2, 4, 6\}$ ,  $E_2(A) = \text{Vect}e_1$ ,  $E_4(A) = \text{Vect}e_2$  et  $E_6(A) = \text{Vect}e_3$  avec  $e_1 = (0, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 0, 1)$ ,  $e_3 = (1, 1, 0)$ .

Si  $V$  est un sous-espace vectoriel stable alors  $f_V$  est diagonalisable et donc possède une base de vecteurs propres de  $f$ . Ainsi  $V = \{0\}$ ,  $\text{Vect}(e_i)$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\text{Vect}(e_j, e_k)$  avec  $j \neq k \in \{1, 2, 3\}$  ou  $V = \mathbb{R}^3$ .

### Exercice 174 : [énoncé]

Sur  $\mathbb{C}$ ,  $A$  est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire supérieure ou sur la diagonale figurent les valeurs propres complexes de  $A$  comptées avec multiplicité.

### Exercice 175 : [énoncé]

a)  $A$  annule le polynôme  $\chi_A$  qui est scindé donc  $A$  est trigonalisable.

b) Soit  $T$  une matrice triangulaire semblable à  $A$ . Les coefficients diagonaux de  $T$  sont les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité. Cependant  $A^k$  est semblable à  $T^k$  donc les valeurs propres de  $A^k$  sont les coefficients diagonaux de  $T^k$  or ceux-ci sont les puissances d'ordre  $k$  des coefficients diagonaux de  $T$  c'est-à-dire des valeurs propres de  $A$ .

### Exercice 176 : [énoncé]

La matrice  $A$  est semblable à une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et donc  $A^q$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$$

Ainsi le polynôme caractéristique de  $A^q$  est celui voulu avec  $A^q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .

### Exercice 177 : [énoncé]

$A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\exp(A)$  est alors semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & \star' \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Cela suffit pour conclure.

### Exercice 178 : [énoncé]

Puisque le polynôme  $\chi_A$  est scindé, la matrice  $A$  est trigonalisable. Plus précisément, la matrice  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice  $P(A)$  est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\chi_{P(A)} = \prod_{k=1}^n (X - P(\lambda_k))$$

**Exercice 179 :** [énoncé]

a) Commençons par quelques cas particuliers.

Si  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  alors  $A \in \mathbb{K}[B]$  en s'appuyant sur un polynôme constant.

Si  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  alors les matrices qui commutent avec  $A$  sont

diagonales donc  $B$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ . En considérant  $P = aX + b$  tel que  $P(\lambda_1) = \alpha_1$  et  $P(\lambda_2) = \alpha_2$ , on a  $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$ .

Si  $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\mu \neq 0$ , une étude de commutativité par coefficients

inconnus donne  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ . Pour  $P = \frac{\beta}{\mu}X + \gamma$  avec  $\frac{\beta\lambda}{\mu} + \gamma = \alpha$ , on a

$B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$ .

Enfin, dans le cas général,  $A$  est semblable à l'un des trois cas précédent via une matrice  $P \in GL_2(\mathbb{K})$ . La matrice  $B' = P^{-1}BP$  commute alors avec  $A' = P^{-1}AP$  donc  $B'$  est polynôme en  $A'$  et par le même polynôme  $B$  est polynôme en  $A$ .

b) On imagine que non, reste à trouver un contre-exemple.

Par la recette dite des « tâtonnements successifs » ou saisi d'une inspiration venue d'en haut, on peut proposer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que  $A$  et  $B$  commutent et ne sont ni l'un ni l'autre polynôme en l'autre car tout polynôme en une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

**Exercice 180 :** [énoncé]

La matrice  $A$  est trigonalisable et si l'on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ses valeurs propres

distinctes alors  $\text{tr}(A^m) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m$  avec  $\alpha_j$  la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_j$ .

Pour conclure, il suffit d'établir résultat suivant :

« Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$  deux à deux distincts.

Si  $\sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  alors  $\forall 1 \leq j \leq p, |\lambda_j| < 1$  ».

Raisonnons pour cela par récurrence sur  $p \geq 1$ .

Pour  $p = 1$ , la propriété est immédiate.

Supposons la propriété vraie au rang  $p \geq 1$ .

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbb{C}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{C}$  deux à deux distincts tels que

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (1)$$

Par décalage d'indice, on a aussi

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (2)$$

$\lambda_{p+1} \times (1) - (2)$  donne

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j (\lambda_{p+1} - \lambda_j) \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

qui se comprend encore

$$\sum_{j=1}^p \beta_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

avec les  $\beta_1, \dots, \beta_p$  non nuls.

Par hypothèse de récurrence, on a alors  $\forall 1 \leq j \leq p, |\lambda_j| < 1$ .

On en déduit  $\sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  et la relation (1) donne alors

$\alpha_{p+1} \lambda_{p+1}^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  d'où l'on tire  $|\lambda_{p+1}| < 1$ .

Récurrence établie.

**Exercice 181 :** [énoncé]

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  et  $\mu_1, \dots, \mu_q$  les valeurs propres deux à deux distinctes des matrices  $A$  et  $B$  respectivement.

L'hypothèse de travail donne

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^p m_{\lambda_j}(A) \lambda_j^m = \sum_{k=1}^q m_{\mu_k}(B) \mu_k^m$$

Avec des notations étendues, ceci donne

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{\lambda \in \text{Sp}A \cup \text{Sp}B} a_\lambda \lambda^m = 0$$

avec  $a_\lambda = m_\lambda(A) - m_\lambda(B)$ .

Indexons alors les valeurs propres de  $A$  et  $B$  de sorte que

$$\text{Sp}A \cup \text{Sp}B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$$

avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  deux à deux distinctes. On obtient donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^r a_{\alpha_j} \alpha_j^m = 0$$

Considérons alors la matrice carrée de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \dots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

Celle-ci est inversible car les  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont deux à deux distincts. Or les égalités qui précèdent donnent

$$\sum_{j=1}^r a_{\alpha_j} C_j = 0$$

en notant  $C_j$  les colonnes de la matrice de Vandermonde précédente.

On en déduit

$$\forall 1 \leq j \leq r, a_{\alpha_j} = 0$$

ce qui donne

$$\forall \lambda \in \text{Sp}A \cup \text{Sp}B, m_\lambda(A) = m_\lambda(B)$$

**Exercice 182 :** [\[énoncé\]](#)

a) Poser le produit par blocs.

b) Si  $A$  et  $B$  sont inversibles alors  $(A \star B)(A^{-1} \star B^{-1}) = I_n \star I_n = I_{n^2}$  donc  $A \star B$  est inversible.

Si  $A$  n'est pas inversible alors il existe  $A' \neq 0$  tel que  $AA' = O_n$  et alors

$(A \star B)(A' \star I_n) = 0$  avec  $A' \star I_n \neq 0$  donc  $A \star B$  n'est pas inversible.

Un raisonnement semblable s'applique dans le cas où  $B$  n'est pas inversible.

c) Il existe  $P, Q$  matrices inversibles telles que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  les valeurs propres de  $A$  et  $B$ .

On observe alors que  $(P^{-1} \star Q^{-1})(A \star B)(P \star Q) = (P^{-1}AP) \star (Q^{-1}BQ)$  est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux  $\lambda_i \mu_j$ . Les valeurs propres de  $A \star B$  sont les produits des valeurs propres de  $A$  et  $B$ .

d) On note que  $P^{-1} \star Q^{-1} = (P \star Q)^{-1}$  de sorte que  $A \star B$  est semblable à la matrice triangulaire précédente et donc

$$\chi_{A \star B} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (X - \lambda_i \mu_j)$$

On en déduit

$$\det(A \star B) = (\det A \det B)^n$$

et la relation

$$\text{tr}(A \star B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$$

est immédiate par un calcul direct.

**Exercice 183 :** [\[énoncé\]](#)

La matrice  $A$  est trigonalisable semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

La matrice  $A^k$  est alors semblable à

$$T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres sont les  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$  comptées avec multiplicité.

**Exercice 184 :** [énoncé]

La famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  constitue une base de  $E$ .  
 oit  $v \in \mathcal{L}(E)$  commutant avec  $u$ . On peut écrire

$$v(x_0) = a_0x_0 + a_1u(x_0) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$$

Considérons alors

$$w = a_0\text{Id} + a_1u + \dots + a_{n-1}u^{n-1} \in \mathbb{K}[u]$$

On a

$$v(x_0) = w(x_0)$$

et puisque  $v$  et  $w$  commutent avec  $u$ , on a aussi

$$v(u^k(x_0)) = w(u^k(x_0))$$

Les endomorphismes  $v$  et  $w$  prennent même valeurs sur une base, ils sont donc égaux.

En conclusion  $v \in \mathbb{K}[u]$ .

**Exercice 185 :** [énoncé]

On peut écrire

$$AB = P(A) = \alpha_n A^n + \dots + \alpha_1 A + I_n$$

donc

$$A(B - (\alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha_1 I_n)) = I_n$$

Par le théorème d'inversibilité,  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = B - (\alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha_1 I_n).$$

Puisque  $A$  commute avec  $A^{-1}$  et ses puissances, on en déduit que  $A$  commute avec

$$B = A^{-1} + \alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha_1 I$$

**Exercice 186 :** [énoncé]

Le polynôme  $P$  s'écrit

$$P(X) = P(0) + a_1X + \dots + a_pX^p$$

L'égalité  $AB = P(A)$  donne alors

$$A(B - (a_1I_n + a_2A + \dots + a_pA^{p-1})) = P(0)I_n$$

On en déduit que  $A$  est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{P(0)} (B - (a_1I_n + a_2A + \dots + a_pA^{p-1}))$$

l'égalité  $A^{-1}A = I_n$  donne alors

$$BA = P(A)$$

et on peut conclure que  $A$  et  $B$  commutent.

**Exercice 187 :** [énoncé]

On sait qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = O_n$ .

En introduisant les coefficients de  $P$ , la relation  $B = AP(A)$  donne

$$B = A + a_2A^2 + \dots + a_{p-1}A^{p-1}$$

On en déduit

$$B^2 = A^2 + a_{3,2}A^3 + \dots + a_{p-1,2}A^{p-1}, \dots, B^{p-2} = A^{p-2} + a_{p-1,p-2}A^{p-1}, B^{p-1} = A^{p-1}$$

En inversant ces équations, on obtient

$$A^{p-1} = B^{p-1}, A^{p-2} = B^{p-2} + b_{p-1,p-2}A^{p-1}, \dots, A^2 = B^2 + b_{3,2}B^3 + \dots + b_{p-1,2}B^{p-1}$$

et enfin

$$A = B + b_{2,1}B^2 + \dots + b_{p-1,1}B^{p-1}$$

ce qui détermine un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $Q(0) = 1$  et  $A = BQ(B)$ .

**Exercice 188 :** [énoncé]

a) Posons  $N = -A^{-1}BA$ . On a

$$N^p = (-1)^p A^{-1}B^pA = O_n$$

donc

$$I_n = I_n - N^p = (I - N)(I + N + N^2 + \dots + N^{p-1})$$

On en déduit que  $I - N = I_n + A^{-1}BA$  est inversible et

$$(I_n + A^{-1}BA)^{-1} = I + N + N^2 + \dots + N^{p-1}$$

b) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(0) = 0$ . On a

$$P(X) = aX + bX^2 + \dots$$

Donc

$$P(B) = aB + bB^2 + \dots$$

puis

$$P(B)^p = a^p B^p + b^p B^{p+1} + \dots = O_n$$

On peut alors reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice  $I_n + P(B)$  est inversible et que son inverse est de la forme

$$I_n - P(B) + P(B)^2 + \dots + (-1)^p P(B)^p$$

On en déduit que  $H$  est inclus dans  $GL_n(\mathbb{C})$  et que l'inverse d'un élément de  $H$  est encore dans  $H$ .

Il est immédiat de vérifier que  $H$  est non vide et stable par produit. On en déduit que  $H$  est un sous-groupe de  $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ . Enfin, on vérifie que  $H$  est commutatif car les polynômes en une matrice commutent entre eux.

**Exercice 189 :** [énoncé]

Par la formule de Taylor en  $a$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

donc

$$P(aI_n + J) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} J^k$$

Il est facile de calculer les puissances de  $J$  et l'on conclut

$$P(aI_n + J) = \begin{pmatrix} P(a) & P'(a) & \frac{P''(a)}{2!} & \dots & \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{P''(a)}{2!} \\ & & & \ddots & P'(a) \\ (0) & & & & P(a) \end{pmatrix}$$

**Exercice 190 :** [énoncé]

Le polynôme  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  est annulateur de  $u$  avec les facteurs  $X - 1$  et  $X^2 + X + 1$  premiers entre eux, il suffit alors d'appliquer le lemme des noyaux pour conclure !

**Exercice 191 :** [énoncé]

$P = X(X^2 - 3aX + a^2)$  est annulateur de  $f$  donc par le théorème de décomposition des noyaux,  $E = \ker f \oplus \ker(f^2 - 3af + a^2\text{Id})$  car  $X$  et  $X^2 - 3aX + a^2$  sont premiers entre eux. Or  $a$  étant non nul, on montre élémentairement  $\ker(f^2 - 3af + a^2\text{Id}) \subset \text{Im}f$  tandis que l'inclusion réciproque provient de ce que  $(f^2 - 3af + a^2\text{Id}) \circ f = 0$ . Il est donc vrai que  $\ker f$  et  $\text{Im}f$  sont supplémentaires.

**Exercice 192 :** [énoncé]

Par le lemme de décomposition des noyaux

$$\ker P(u) = \ker Q(u) \oplus \ker R(u)$$

et puisque  $P$  est annulateur

$$E = \ker Q(u) \oplus \ker R(u)$$

De plus  $R(u) \circ Q(u) = \tilde{0}$  et donc  $\text{Im}Q(u) \subset \ker R(u)$ .

Par la formule du rang

$$\dim \text{Im}Q(u) = \dim E - \dim \ker Q(u)$$

et par la supplémentarité qui précède

$$\dim E = \dim \ker Q(u) + \dim \ker R(u)$$

donc

$$\dim \text{Im}Q(u) = \dim \ker R(u)$$

et l'on peut conclure.

**Exercice 193 :** [énoncé]

Les vecteurs de  $(\text{Id}, u, \dots, u^p)$  évoluent dans  $\mathcal{L}(E)$  qui est de dimension  $n^2$ . Pour  $p = n^2$  la famille est assurément liée. Une relation linéaire donne alors immédiatement un polynôme annulateur non nul.

**Exercice 194 :** [énoncé]

On a  $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ O & P(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \star \\ O & \star \end{pmatrix}$  et

$$Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & \star \\ O & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ O & O \end{pmatrix}$$

donc  $(PQ)(M) = P(M)Q(M) = \begin{pmatrix} O & \star \\ O & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \star \\ O & O \end{pmatrix} = O_n$ .

Ainsi le polynôme  $PQ$  est annulateur de  $M$ .

**Exercice 195 :** [énoncé]

$u \circ (u - \text{Id}) \circ (u + \text{Id})$  s'annule sur  $\ker(u \circ (u - \text{Id}))$  et sur  $\ker(u \circ (u + \text{Id}))$  donc sur  $\ker(u \circ (u - \text{Id})) + \ker(u \circ (u + \text{Id})) = E$  et ainsi  $u \circ (u^2 - \text{Id}) = 0$ .

Si  $x \in \ker u$  alors  $x \in \ker(u \circ (u - \text{Id})) \cap \ker(u \circ (u + \text{Id})) = \{0\}$  donc  $\ker u = \{0\}$  et  $u \in \text{GL}(E)$ .

Par suite  $u^2 - \text{Id} = u^{-1} \circ u \circ (u^2 - \text{Id}) = 0$  et donc  $u^2 = \text{Id}$ . Ainsi  $u$  est une symétrie vectorielle.

**Exercice 196 :** [énoncé]

Quitte à considérer  $\lambda P$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  bien choisi, on peut supposer

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 1$$

ce qui permet d'écrire

$$P(X) = X + X^2Q(X) \text{ avec } Q \in \mathbb{K}[X]$$

Soit  $x \in \text{Im} f \cap \ker f$ . Il existe  $a \in E$  tel que  $x = f(a)$  et on a  $f(x) = 0$ .

On en déduit  $f^2(a) = 0$ . Or  $P(f)(a) = 0$  et

$$P(f)(a) = f(a) + Q(f)(f^2(a)) = f(a) = x$$

Ainsi

$$\text{Im} f \cap \ker f = \{0\}$$

Soit  $x \in E$ .

Analyse :

Supposons  $x = u + v$  avec  $u = f(a) \in \text{Im} f$  et  $v \in \ker f$ .

On a

$$f(x) = f^2(a) + f(v) = f^2(a)$$

Or

$$P(f)(x) = f(x) + f^2(Q(f)(x)) = 0$$

donc

$$f(x) = f^2(-Q(f)(x))$$

Synthèse :

Posons  $u = -f(Q(f)(x))$  et  $v = x - u$ .

On a immédiatement  $u \in \text{Im} f$  et  $x = u + v$ .

On a aussi

$$f(v) = f(x) - f(u) = f(x) + f^2(Q(f)(x)) = P(f)(x) = 0$$

et donc  $v \in \ker f$ .

**Exercice 197 :** [énoncé]

On sait déjà  $\ker u \subset \ker u^2$ .

Inversement, soit  $x \in \ker u^2$ .

Notons  $P$  le polynôme annulateur en question. On peut écrire

$$P(X) = aX + X^2Q(X) \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } Q \in \mathbb{K}[X]$$

L'égalité  $P(u)(x) = 0$  donne

$$au(x) + Q(u)(u^2(x)) = 0$$

et donc  $u(x) = 0$  car  $a \neq 0$  et  $u^2(x) = 0$ .

Ainsi  $x \in \ker u$  et on peut conclure.

**Exercice 198 :** [énoncé]

a) On sait déjà  $\ker u \subset \ker u^2$ . On a  $P = XQ$  avec  $Q(0) \neq 0$ . Pour  $x \in \ker u^2$ , on a  $u^2(x) = 0$  et  $Q(u)(u(x)) = 0$  donc  $u(x) \in \ker u \cap \ker Q(u)$  puis  $u(x) = 0$  car  $Q(0) \neq 0$ . On en déduit  $\ker u^2 \subset \ker u$  puis l'égalité.

L'inclusion  $\text{Im} u^2 \subset \text{Im} u$  est entendue.

Inversement, soit  $x \in \text{Im} u$ . On peut écrire  $x = u(a)$  pour un certain  $a \in E$ . Or  $P(u)(a) = 0$  et l'on peut écrire  $P$  sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X \text{ avec } a_1 \neq 0$$

donc

$$a_1 u(a) \in \text{Im} u^2$$

puis  $x \in \text{Im} u^2$ .

Ainsi  $\text{Im} u^2 = \text{Im} u$

b) Pour  $x \in \ker u \cap \text{Im} u$ , il existe  $a \in E$ ,  $x = u(a)$  et  $a \in \ker u^2 = \ker u$  donc  $x = 0$ . Pour  $x \in E$ ,  $u(x) \in \text{Im} u = \text{Im} u^2$  et on peut écrire  $u(x) = u^2(a)$  pour un certain  $a \in E$ . On a alors  $x = y + z$  avec  $y = u(a) \in \text{Im} u$  et  $z = x - y$  où l'on vérifie  $z \in \ker u$ .

**Exercice 199 :** [énoncé]

Puisque  $u$  possède un polynôme annulateur, on a

$$\dim \mathbb{K}[u] < +\infty$$

Or  $\mathbb{K}[Q(u)] \subset \mathbb{K}[u]$  donc

$$\dim \mathbb{K}[Q(u)] < +\infty$$

et par conséquent  $Q(u)$  possède un polynôme annulateur.

**Exercice 200 :** [énoncé]

Si  $P$  et  $\Pi_u$  sont premiers entre eux alors par l'égalité de Bézout, il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $UP + V\Pi_u = 1$  donc  $U(u)P(u) = \text{Id}_E$ . Aussi  $P(u)U(u) = \text{Id}_E$  donc  $P(u)$  est inversible et  $P(u)^{-1} = U(u) \in \mathbb{K}[u]$ .

Si  $P$  et  $\Pi_u$  ne sont pas premiers entre eux alors on peut écrire  $\Pi_u = QD$  avec  $D$  le pgcd de  $P$  et  $\Pi_u$ . On a  $\Pi_u \mid PQ$  donc  $P(u)Q(u) = 0$  alors que  $Q(u) \neq 0$  puisque  $\deg Q < \deg \Pi_u$ . Par suite  $P(u)$  n'est pas inversible.

**Exercice 201 :** [énoncé]

$\Pi_u$  annule  $u$  donc aussi  $u_F$  et ainsi  $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$ . De même  $\Pi_{u_G} \mid \Pi_u$  donc  $\text{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G}) \mid \Pi_u$ . Inversement si  $P = \text{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G})$  alors  $\forall x \in F, P(u)(x) = 0$  et  $\forall x \in G, P(u)(x) = 0$  donc  $\forall x \in E = F \oplus G, P(u)(x) = 0$  donc  $P$  annule  $u$  puis  $\Pi_u \mid P$ .

**Exercice 202 :** [énoncé]

$\Pi_u$  annule  $u$  donc aussi  $u_F$  puis la conclusion.

**Exercice 203 :** [énoncé]

Considérons  $B = A - I_n$ . On a  $B^2 = O_n$ .

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice est  $B$  dans la base canonique.

On a  $u^2 = \tilde{0}$  donc  $\text{Im} u \subset \ker u$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\text{Im} u$  complétée en  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$  base de  $\ker u$ .

Pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ , considérons  $\varepsilon_j \in E$  tel que  $u(\varepsilon_j) = e_j$ .

Supposons  $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_p \varepsilon_p + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_q e_q = 0$ .

On appliquant  $u$  à cette relation, on obtient  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$  donc

$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ .

La relation initiale devient  $\mu_1 e_1 + \dots + \mu_q e_q = 0$  qui entraîne  $\mu_1 = \dots = \mu_q = 0$ .

Finalement la famille  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)$  est libre et puisque formée de

$p + q = \dim \text{Im} u + \dim \ker u = n$  vecteurs de  $E$ , c'est une base de  $E$ .

La matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, \varepsilon_1, \dots, e_p, \varepsilon_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$  a alors ses coefficients tous nuls sauf  $p$  coefficients sur la sur-diagonale.

La matrice  $B$  est donc semblable à la matrice précédente et  $A = I_n + B$  est semblable à une matrice de la forme voulue.

**Exercice 204 :** [énoncé]

Supposons  $n$  est impair. Le polynôme caractéristique d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

étant de degré impair possèdera une racine qui sera valeur propre de la matrice et aussi racine de son polynôme minimal. Celui-ci ne peut alors être le polynôme  $X^2 + 1$ .

Supposons  $n$  est pair. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_n = \text{diag}(A, \dots, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$A_n$  n'est pas une homothétie donc le degré de son polynôme minimal est supérieur à 2.

De plus  $A_n^2 = -I_n$  donc  $X^2 + 1$  annule  $A_n$ .

Au final,  $X^2 + 1$  est polynôme minimal de  $A_n$ .

**Exercice 205 :** [énoncé]

$A = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(a + b, \dots, a + b, a - b, \dots, a - b)$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & (0) & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 & (0) & & -1 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 1 & & (0) & 0 & -1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\pi_A = (X - (a + b))(X - (a - b))$$

et les polynômes annulateurs de  $A$  sont les multiples de  $\pi_A$ .

**Exercice 206 :** [énoncé]

On peut écrire

$$\Pi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$$

et

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$$

décomposition en somme de sous-espaces vectoriels stables par  $f$ .

Pour chaque  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,

$$\ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1} \neq \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$$

par minimalité de  $\Pi_f$  et donc il existe  $x_\lambda \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda} \setminus \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1}$ .  
On peut alors établir que la famille  $((f - \lambda \text{Id})^k(x_\lambda))_{0 \leq k \leq \alpha_\lambda - 1}$  est libre.

Considérons maintenant  $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$ .

Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(f)(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} P(f)(x_\lambda)$  avec  $P(f)(x_\lambda) \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$  par

stabilité.

Par décomposition en somme directe,

$$P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(f), P(f)(x_\lambda) = 0$$

Par division euclidienne  $P = (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} Q + R$  avec  $\deg R < \alpha_\lambda$  de sorte qu'on puisse écrire  $R = \sum_{k=0}^{\alpha_\lambda - 1} a_k (X - \lambda)^k$ . On alors

$$P(f)(x_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \forall 0 \leq k < \alpha_\lambda, a_k = 0$$

Ainsi

$$P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(f), (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \mid P$$

Enfin puisque les termes  $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$  sont premiers entre eux, on peut conclure

$$P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \Pi_f \mid P$$

**Exercice 207 :** [énoncé]

a) Si  $\ker(u - \lambda \text{Id}) = \{0\}$  alors  $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}) = E$  car  $u - \lambda \text{Id}$  est inversible.  
On en déduit que  $\lambda$  est séparable.

Par contraposée, si  $\lambda$  n'est pas séparable alors  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ .

b) Si  $u$  est un endomorphisme diagonalisable alors pour tout scalaire  $\lambda$ ,  $\ker(u - \lambda \text{Id}) = \ker(u - \lambda \text{Id})^2$ .

Par suite  $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}) \cap \ker(u - \lambda \text{Id}) = \{0\}$  et on en déduit que  $\lambda$  est séparable.

Inversement, soit  $u$  un endomorphisme scindé dont toutes les valeurs propres sont séparables.

Puisque le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé, on peut écrire

$$\chi_u = (-1)^{\dim E} \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

et par le lemme de décomposition des noyaux

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}u} \ker(u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$$

Or, pour toute valeur propre  $\lambda$ ,  $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}) \cap \ker(u - \lambda \text{Id}) = \{0\}$  entraîne  $\ker(u - \lambda \text{Id}) = \ker(u - \lambda \text{Id})^2$  puis par le principe des noyaux itérés  $\ker(u - \lambda \text{Id}) = \ker(u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$ . Par suite

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}u} \ker(u - \lambda \text{Id})$$

et donc  $u$  est diagonalisable

c) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . Le polynôme minimal de  $u$  peut s'écrire

$$\pi_u = (X - \lambda)^\alpha Q \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$

$\pi_u(u) = 0$  donne

$$\text{Im}Q(u) \subset \ker(u - \lambda \text{Id})^\alpha$$

Si  $\lambda$  est une valeur propre séparable alors  $\ker(u - \lambda \text{Id}) = \ker(u - \lambda \text{Id})^\alpha$  et donc

$$\text{Im}Q(u) \subset \ker(u - \lambda \text{Id})$$

puis le polynôme  $(X - \lambda)Q$  annule  $u$ . Par minimalité de  $\pi_u$ , on conclut  $\alpha = 1$ .  
Inversement, si  $\lambda$  est une racine simple du polynôme minimal, alors

$$\pi_u = (X - \lambda)Q \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$

Puisque les polynômes  $Q$  et  $X - \lambda$  sont premiers entre eux, on peut écrire

$$QU + (X - \lambda)V = 1 \text{ avec } U, V \in \mathbb{K}[X]$$

et en évaluant

$$Q(u)U(u)(x) + (u - \lambda \text{Id})V(u)(x) = x$$

avec  $Q(u)U(u)(x) \in \ker(u - \lambda \text{Id})$  (car  $\pi_u$  est annulateur) et  $(u - \lambda \text{Id})V(u)(x) \in \text{Im}(u - \lambda \text{Id})$ .

Ainsi  $\lambda$  est une valeur propre séparable.

Finalement les scalaires non séparables sont les racines multiples de  $\pi_u$ .

d)  $m(v) = u \circ v$ ,  $m^2(v) = u^2 \circ v, \dots P(m)(v) = P(u) \circ v$  pour tout polynôme  $P$ .  
Par suite les endomorphismes  $m$  et  $u$  ont les mêmes polynômes annulateurs et donc le même polynôme minimal. Puisque les scalaires non séparables sont les racines multiples du polynôme minimal, les endomorphismes  $u$  et  $m$  ont les mêmes valeurs séparables.

**Exercice 208 :** [énoncé]

Soit  $x$  vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

$P(f)(x) = P(\lambda)x$  or  $P(f) = 0$  et  $x \neq 0$  donc  $P(\lambda) = 0$ .

**Exercice 209 :** [énoncé]

a) Soit  $x$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a  $f(x) = \lambda x$  avec  $x \neq 0_E$ . Par composition  $f^n(x) = \lambda^n x$  puis  $P(f)(x) = P(\lambda)x$ . Or  $P(f)(x) = 0_E$  et  $x \neq 0_E$  donc  $P(\lambda) = 0$ .

b) Le polynôme  $X^3 + 2X^2 - X - 2$  est annulateur de  $f$  et 0 n'en est pas racine donc  $0 \notin \text{Sp}f$ . Cela suffit pour conclure si l'espace est de dimension finie. Sinon, on exploite

$$f \circ \left[ \frac{1}{2}(f^2 + 2f - \text{Id}) \right] = \left[ \frac{1}{2}(f^2 + 2f - \text{Id}) \right] \circ f = \text{Id}$$

pour conclure.

**Exercice 210 :** [énoncé]

$\varphi^2 = \text{Id}$  donc  $X^2 - 1$  est annulateur de  $\varphi$ . Les valeurs propres de  $\varphi$  ne peuvent être que 1 et  $-1$ . En prenant pour  $f$  une fonction paire et une fonction impaire non nulle, on montre que 1 et  $-1$  sont effectivement valeurs propres de  $\varphi$ .

**Exercice 211 :** [énoncé]

a) On vérifie  $T^2 = \text{Id}$  donc  $T$  est un automorphisme et  $T^{-1} = T$ .

b) Puisque  $T$  annule  $X^2 - 1$ ,  $\text{Sp}T \subset \{1, -1\}$  puis égale car par exemple 1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1 et  $X - 1/2$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $-1$ .

**Exercice 212 :** [énoncé]

Les valeurs propres de  $u$  sont racines des polynômes annulateurs donc du polynôme minimal.

Soit  $a$  une racine de  $\Pi_u$ . On a

$$\Pi_u = (X - a)P \text{ et } P(u) \neq 0$$

car  $P$  ne peut être annulateur de  $u$ .

Pour  $y \in \text{Im}(P(u)) \setminus \{0_E\}$ , il existe  $x \in E$ ,  $y = P(u)(x)$  et  $\Pi(u)(x) = 0_E$  donc  $(u - a\text{Id})(y) = 0_E$  avec  $y \neq 0_E$ .

Ainsi  $a$  est valeur propre de  $u$  (et  $y$  est vecteur propre associé).

**Exercice 213 :** [énoncé]

$\chi_A = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$  annule matrice  $A$ .

On en déduit

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}((a + d)I_2 - A)$$

**Exercice 214 :** [énoncé]

$\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$  annule  $A$  en vertu du théorème de Cayley Hamilton.

**Exercice 215 :** [énoncé]

Par Sarrus

$$\chi_A = X(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2))$$

a) Si  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  alors  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$  et la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  car son polynôme caractéristique n'est pas scindé.

Si  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  alors  $A$  est la matrice nulle.

b) Si  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  alors la matrice  $A$  diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  car possède trois valeurs propres distinctes à savoir 0 et  $\pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Si  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  alors  $A$  est la matrice nulle.

c) Puisque 0 est la seule valeur propre réelle de  $A$  et puisque  $B$  est inversible si, et seulement si,  $-\lambda$  est valeur propre de  $A$ , on peut conclure que  $B$  est inversible pour tout  $\lambda \neq 0$ .

d) Puisque le polynôme caractéristique est annulateur de  $A$  on a

$$A^3 + (a^2 + b^2 + c^2)A = O_3$$

donc

$$(B - \lambda I_3)^3 + (a^2 + b^2 + c^2)(B - \lambda I_3) = O_3$$

Il suffit de développer et de réorganiser pour obtenir une expression du type

$$B(uB^2 + vB + wI_3) = I_3$$

et conclure

$$B^{-1} = uB^2 + vB + wI_3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

**Exercice 216 :** [énoncé]

Considérons le polynôme caractéristique de  $u$  :

$$\chi_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \text{ avec } a_0 = (-1)^n \det u \neq 0$$

Puisque  $\chi_u(u) = \tilde{0}$ , on obtient

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0\text{Id} = \tilde{0}$$

Par suite

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u = -a_0\text{Id}$$

En composant avec  $u^{-1}$  à gauche on obtient

$$u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \dots + a_1\text{Id} = -a_0u^{-1}$$

et on en déduit

$$u^{-1} = -\frac{1}{a_0} (u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \dots + a_1\text{Id}_E) \in \mathbb{K}[u]$$

**Exercice 217 :** [énoncé]

- a) Si  $f$  est diagonalisable alors  $f$  est représenté par  $\lambda I_n$  dans une certaine base et donc  $f$  est une homothétie vectorielle. La réciproque est immédiate.
- b) Calculé dans une base de triangulation,  $\chi_f(x) = (x - \lambda)^n$ .
- c)  $\chi_f$  est annulateur de  $f$  dans  $(f - \lambda\text{Id})^n = 0$ .

**Exercice 218 :** [énoncé]

- a) Le polynôme caractéristique de  $f$  est un polynôme de degré  $n$  annulant  $f$ . Ainsi  $f^n \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ . Par récurrence, on montre alors que pour tout  $m \geq n$ ,  $f^m \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ . Par suite  $f^n(x), \dots, f^{N-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  puis  $E = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{N-1}(x))$  donne  $E = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ . La famille  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est alors génératrice et formée de  $n = \dim E$  vecteurs de  $E$ , c'est donc une base de  $E$ .
- b) Les polynômes en  $f$  commute avec  $f$ . Inversement, supposons que  $g \in \mathcal{L}(E)$  commute avec  $f$ . Puisque  $g(x) \in E$ , on peut écrire  $g(x) = a_0x + a_1f(x) + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(x)$ . Puisque  $f$  et  $g$  commute, on a encore  $g(f^k(x)) = a_0f^k(x) + a_1f^{k+1}(x) + \dots + a_{n-1}f^{n+k-1}(x)$  de sorte que les endomorphismes  $g$  et  $a_0\text{Id} + a_1f + \dots + a_{n-1}f^{n-1}$  coïncident sur une base de  $E$  et c'est donc égaux. Au final  $f$  est un polynôme en  $f$ .

**Exercice 219 :** [énoncé]

- a)  $A^2M = AMB = MB^2$  et ainsi de suite :  $A^pM = MB^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Par linéarité  $P(A)M = MP(B)$ .
- b) Considérons  $P = \chi_A$ . La relation  $P(A)M = MP(B)$  entraîne  $MP(B) = O_n$ . Or  $M \neq O_n$  donc la matrice  $P(B)$  n'est pas inversible. Par suite  $\det(P(B)) = 0$ . Or

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

avec  $\lambda_i$  valeur propre de  $A$  donc il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  telle que

$$\det(\lambda_i I_n - B) = 0$$

Ainsi  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune.

**Exercice 220 :** [énoncé]

Considérons  $T : P(X) \mapsto P(X + 1)$ .  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  qui est annulé par son polynôme caractéristique de la forme

$$\chi_T = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Cela fournit directement la propriété voulue.

**Exercice 221 :** [énoncé]

- a) Par le théorème de Cayley Hamilton, on a

$$\chi_u(u) = \tilde{0}$$

avec  $\chi_u$  polynôme de coefficient constant  $\det u \neq 0$ .

En écrivant

$$\chi_u(X) = XP(X) + \det u$$

le polynôme

$$Q(X) = -\frac{1}{\det u} P(X)$$

est solution.

- b) Considérons l'endomorphisme  $v$  de  $\mathbb{K}[X]$  qui envoie le polynôme  $P(X)$  sur  $P(X/2)$ .

On vérifie aisément  $u \circ v = v \circ u = \text{Id}$  ce qui permet d'affirmer que  $u$  est inversible d'inverse  $v$ .

Soit  $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$  un polynôme de degré exactement  $n$ .

Si  $u(P) = \lambda P$  alors par identification des coefficients de degré  $n$ , on obtient

$$\lambda = 2^n$$

puis on en déduit

$$P = a_n X^n$$

La réciproque étant immédiate, on peut affirmer

$$\text{Sp}u = \{2^n / n \in \mathbb{N}\} \text{ et } E_{2^n}(u) = \text{Vect}(X^n)$$

Si par l'absurde il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$u^{-1} = Q(u)$$

alors le polynôme non nul

$$XQ(X) - 1$$

est annulateur de  $u$ . Les valeurs propres de  $u$  sont alors racines de celui-ci ce qui donne une infinité de racines.

C'est absurde.

**Exercice 222 :** [\[énoncé\]](#)

L'implication directe est immédiate : elle découle de la stabilité par produit de l'espace des matrices triangulaires supérieures. Inversement, supposons  $A^k$  triangulaire supérieure pour tout  $k \geq 2$ . Introduisons le polynôme caractéristique de  $A$

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + \det(A)$$

Puisque celui-ci est annulateur de  $A$ , on peut écrire

$$a_n A^n + \dots + a_1 A + \det(A)I_n = O_n$$

En multipliant la relation par  $A$  et en réorganisant

$$A = \frac{-1}{\det A} (a_1 A^2 + \dots + a_n A^{n+1})$$

et la matrice  $A$  est donc triangulaire supérieure.

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

nous obtenons un contre-exemple où  $A^k = O_2$  pour tout  $k \geq 2$ .

**Exercice 223 :** [\[énoncé\]](#)

a) Si  $v$  est un endomorphisme, on a

$$\dim v^{-1}(F) \leq \dim F + \dim \ker v$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k+1} = (u - \lambda_i \text{Id}_E)^{-1} (\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^k)$$

donc

$$\dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k+1} \leq \dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^k + 1$$

Ainsi, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^k \leq k$$

Le polynôme caractéristique de  $u$  est

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{n_i}$$

et celui-ci est annulateur de  $u$ . Par le lemme de décomposition des noyaux

$$E = \bigoplus_{i=1}^q \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{n_i}$$

et donc

$$\dim E = \sum_{i=1}^q \dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{n_i}$$

Or

$$\dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{n_i} \leq n_i$$

et

$$\dim E = \deg \chi_u = \sum_{i=1}^q n_i$$

donc

$$\forall 1 \leq i \leq q, \dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{n_i} = n_i$$

Enfin, par l'étude initiale

$$\forall 1 \leq i \leq q, \forall 0 \leq m \leq n_i \dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^m = m$$

b) Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$ , le polynôme caractéristique  $Q$  de  $u_F$  annule  $u_F$  et divise  $\chi_u$ . On obtient ainsi un polynôme  $Q$  de la forme

$$Q(X) = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{m_i} \text{ avec } m_i \leq n_i$$

vérifiant

$$F \subset \ker Q(u)$$

Or, par le lemme de décomposition des noyaux

$$\ker Q(u) = \bigoplus_{i=1}^q \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}$$

puis, en vertu du résultat précédent

$$\dim \ker Q(u) = \sum_{i=1}^q m_i = \deg Q = \dim F$$

Par inclusion et égalité des dimensions

$$\ker Q(u) = F$$

c) On reprend les notations qui précèdent

$$F = \bigoplus_{i=1}^q \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}$$

On peut alors faire correspondre à  $F$  le tuple  $(m_1, \dots, m_q)$ .

Cette correspondance est bien définie et bijective car

$$\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i} \subset \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{n_i}, E = \bigoplus_{i=1}^q \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{n_i}$$

et

$$\dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i} = m_i$$

Il y a donc autant de sous-espaces vectoriels stables que de diviseurs unitaires de  $\chi_u$ .

**Exercice 224 :** [\[énoncé\]](#)

Puisque les entiers  $\det A$  et  $\det B$  sont premiers entre eux, on peut écrire par l'égalité de Bézout

$$u \cdot \det A + v \cdot \det B = 1 \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}$$

On écrit  $\chi_A(X) = XQ_A(X) + (-1)^n \det A$  et de même  $\chi_B(X)$  (ces écritures sont possibles car le déterminant est au signe près le coefficient constant d'un polynôme caractéristique).

Posons alors

$$U = (-1)^{n-1} u Q_A(A) \text{ et } V = (-1)^{n-1} v Q_B(B)$$

Puisque  $\chi_A$  et  $\chi_B$  sont à coefficients entiers, on a  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .

Puisque  $\chi_A$  et  $\chi_B$  sont annulateurs, on a

$$Q_A(A)A = (-1)^{n-1} \det A \cdot I_n \text{ et } Q_B(B)B = (-1)^{n-1} \det B \cdot I_n$$

On observe alors

$$UA + VB = (u \cdot \det A + v \cdot \det B)I_n = I_n$$

Remarquons que prendre

$$U = u^t \text{com} A \text{ et } V = v^t \text{com} B$$

était sans doute plus simple...

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

conviennent...

**Exercice 225 :** [\[énoncé\]](#)

$\mu_A \mid \chi_A = (X - 1)^2$  mais  $A$  n'est pas diagonalisable, donc  $\mu_A = (X - 1)^2$ .

**Exercice 226 :** [\[énoncé\]](#)

a) Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les composantes de  $x$  dans une base de diagonalisation  $\mathcal{B}$  de  $f$ . La matrice de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n \lambda_n & \dots & \alpha_n \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $f$  comptées avec multiplicité. Cette matrice est de rang  $n$ , si, et seulement si,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0 \text{ et } \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Par déterminant de Vandermonde, on peut assurer l'existence de  $x$  tel que voulu si, et seulement, si les valeurs propres de  $f$  sont deux à deux distincts et non nulles. N'importe quel  $x$  aux composantes toutes non nulles est alors convenable.

b) Les polynômes en  $f$  commutent avec  $f$ .

Supposons que  $g$  soit un endomorphisme de  $E$  commutant avec  $f$ .

On peut écrire  $g(x_1) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = P(f)(x_1)$  avec

$$P = a_1 + a_2 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}.$$

On a alors

$$g(x_2) = g(f(x_1)) = f(g(x_1)) = f(P(f)(x_1)) = P(f)(f(x_1)) = P(f)(x_2).$$

Plus généralement, en exploitant  $x_k = f^{k-1}(x_1)$ , on obtient  $g(x_k) = P(f)(x_k)$ . Les endomorphismes  $g$  et  $P(f)$  coïncident sur les éléments d'une base, ils sont donc égaux. Finalement, le commutant de  $f$  est exactement formé des polynômes en  $f$ .

Si le polynôme minimal  $\Pi_f$  de  $f$  est de degré  $< n$  alors la famille  $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$  est liée et alors pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  l'est aussi. Cela contredit l'hypothèse de départ. On peut donc affirmer que  $\deg \Pi_f \geq n$  et puisque  $\Pi_f \mid \chi_f$ , on a  $\Pi_f = (-1)\chi_f$  avec  $\chi_f$  polynôme caractéristique de  $f$ .

**Exercice 227 :** [énoncé]

$A$  est symétrique donc diagonalisable.

$$\chi_A = (X - (a + (n - 1)b)(X - (a - b))^{n-1}$$

$$\text{Sp}(A) = \{a + (n - 1)b, a - b\} \text{ (si } n \geq 2)$$

$$\pi_A = (X - (a + (n - 1)b))(X - (a - b))$$

$A$  est inversible si, et seulement si,  $0 \notin \text{Sp}(A)$  i.e.  $a + (n - 1)b \neq 0$  et  $a \neq b$ .

$$\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & & (y) \\ & \ddots & \\ (y) & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = ax + (n - 1)by \\ \beta = ay + bx + (n - 2)by \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le système

$$\begin{cases} ax + (n - 1)by = 1 \\ bx + (a + (n - 2)b)y = 0 \end{cases}$$

pour expliciter  $A^{-1}$ .

**Exercice 228 :** [énoncé]

a) Il est clair que  $L$  est linéaire.

Si  $\text{tr}(M) = 0$  alors  $L(M) = aM$ .

$a$  est valeur propre de  $L$  et le sous-espace propre associé est l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Si  $\text{tr}(M) \neq 0$  alors  $L(M) = \lambda M$  implique  $M \in \text{Vect}(I_n)$ . Or  $L(I_n) = (a + n)I_n$  donc  $a + n$  est valeur propre de  $L$  et le sous-espace propre associé est la droite  $\text{Vect}(I_n)$ .

L'endomorphisme  $L$  est donc diagonalisable et par suite

$$\Pi_L(X) = (X - a)(X - (a + n))$$

b) En dimension finie,  $L$  est un automorphisme si, et seulement si,  $0 \notin \text{Sp}(L)$  i.e.  $a \neq 0, -n$ .

Puisque

$$L^2 - (2a + n)L + a(a + n)I = 0$$

on a

$$L^{-1} = \frac{1}{a(a + n)}(L - (2a + n)I)$$

et donc

$$L^{-1}(M) = \frac{1}{a(a + n)}(\text{tr}(M)I_n - (a + n)M)$$

**Exercice 229 :** [énoncé]

a) Il est immédiat que  $L$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\text{Sp}(L) = \{a, a + n\}$ ,  $E_a(L) = \ker(\text{tr})$  et  $E_{a+n}(L) = \text{Vect}(I_n)$ ,

$\Pi_L = (X - a)(X - (a + n))$  car  $L$  est diagonalisable et donc son polynôme minimal est le polynôme simple dont les racines sont les valeurs propres de  $L$ .

b) Par une base de diagonalisation,  $\det L = a^{n^2-1}(a + n)$  et donc  $L$  est un automorphisme si, et seulement si,  $a \neq 0, -n$ .

Par le polynôme minimal, on a  $L^2 - (2a + n)L + a(a + n)\text{Id} = 0$  et donc

$$L^{-1} = \frac{1}{a(a + n)}((2a + n)\text{Id} - L)$$

**Exercice 230 :** [énoncé]

$A^2 = -I_{2n}$ . On observe que  $X^2 + 1$  est annulateur de  $A$ .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  alors  $A$  est diagonalisable car annule le polynôme  $X^2 + 1$  qui est scindé à racines simples.

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  alors  $A$  n'est pas diagonalisable car sans valeurs propres. En effet une valeur propre (réelle) de  $A$  doit être annulé par le polynôme  $X^2 + 1$ .

**Exercice 231 :** [énoncé]

a)  $A^2 = -I_{2n}$ .

b)  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  est annulateur de  $A$  et scindé simple donc  $A$  est diagonalisable. De plus  $A$  est réelle donc ses valeurs propres sont deux à deux conjuguées, deux valeurs propres conjuguées ont même multiplicité. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines de  $X^2 + 1$  et que la matrice complexe  $A$  possède au moins une valeur propre, on peut affirmer que  $i$  et  $-i$  sont les deux seules valeurs propres de  $A$ , qu'elles sont de multiplicité  $n$ . Enfin les sous-espaces propres associés sont de dimension  $n$  car  $A$  est diagonalisable et donc les dimensions des sous-espaces propres égales la multiplicité des valeurs propres respectives.

**Exercice 232 :** [énoncé]

Soient  $P \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice de permutation et  $\sigma$  la permutation associée. Il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sigma^q = \text{Id}$  et donc  $P^q = I_n$ . La matrice  $P$  annule alors  $X^q - 1$  qui est scindé à racines simples donc  $P$  est diagonalisable.

**Exercice 233 :** [énoncé]

a) Si  $M$  n'est pas inversible, il existe une colonne  $X$  non nulle telle que  $MX = 0$  et alors l'identité de l'énoncé donne  ${}^tMX = X$  donc  $1 \in \text{Sp}({}^tM) = \text{Sp}M$ .

Inversement, si  $1 \in \text{Sp}M$  alors il existe une colonne  $X$  non nulle telle que  $MX = X$  et alors l'identité de l'énoncé donne  ${}^tMX = 0$  et donc  ${}^tM$  n'est pas inversible. Or  $\det({}^tM) = \det M$  donc  $M$  n'est pas inversible non plus.

b) La relation donnée entraîne

$$({}^tM)^2 = (I_n - M^2)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$$

Or

$$({}^tM)^2 = {}^t(M^2) = I_n - M$$

donc

$$M^4 - 2M^2 + I_n = I_n - M$$

et donc la matrice  $M$  est annulée par le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X - 1)(X^2 + X - 1)$$

C'est un polynôme scindé à racines simples donc la matrice  $M$  est diagonalisable.

**Exercice 234 :** [énoncé]

On a

$$(M^2 - 2I_n)^2 = ({}^tM)^2 = {}^t(M^2) = 2I_n - M$$

On en déduit le polynôme annulateur de  $M$  suivant

$$X^4 - 4X^2 + X + 2$$

qui se factorise

$$X^4 - 4X^2 + X + 2 = (X - 1)(X + 2)(X - \alpha)(X - \beta)$$

avec

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Puisque la matrice  $M$  annule un polynôme réel scindé à racines simples, cette matrice est diagonalisable.

**Exercice 235 :** [énoncé]

La relation donnée entraîne

$$({}^tM)^2 = (I_n - M^2)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$$

Or

$$({}^tM)^2 = {}^t(M^2) = I_n - M$$

donc

$$M^4 - 2M^2 + I_n = I_n - M$$

et donc la matrice  $M$  est annulée par le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X - 1)(X^2 + X - 1)$$

Les valeurs propres possibles de  $M$  sont les racines de ce polynôme.

Chacune de celles-ci peut être valeur propre. En effet pour les racines de  $X^2 + X - 1$ , il suffit de considérer une matrice diagonale avec les coefficients diagonaux correspondant aux racines. Pour les racines de  $X(X - 1)$ , il suffit de considérer

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M$  n'est pas nécessairement symétrique comme le montre l'exemple au dessus.

La matrice  $M$  annule un polynôme scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable.

**Exercice 236 :** [\[énoncé\]](#)

a) La matrice  $A$  annule le polynôme  $X^p - 1$  qui est scindé simple dans  $\mathbb{C}[X]$  donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

b) Les valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  sont racines du polynôme annulateur donc  $\alpha^p = \beta^p = 1$ . En particulier  $|\alpha| = |\beta| = 1$ .

Puisque  $\det A = \alpha\beta = 1$ , on a  $\alpha = 1/\beta = \bar{\beta}/|\beta|^2 = \bar{\beta}$ .

Enfin,  $\text{tr}A = 2\text{Re}(\alpha) \in \mathbb{Z}$  et  $2\text{Re}(\alpha) \in [-2, 2]$  car  $|\alpha| \leq 1$  donc  $|\text{Re}(\alpha)| \in \{0, 1/2, 1\}$ .

c) Selon la valeur de  $\text{Re}(\alpha)$  et sachant  $|\alpha| = 1$ , les valeurs possibles de  $\alpha$  sont

$$-1, j, i, -j^2, 1$$

et leurs conjuguées.

Dans tous les cas, on vérifie  $\alpha^{12} = 1$  et on a aussi  $\beta^{12} = 1$ .

Puisque  $A$  est semblable à la matrice diagonale  $D = \text{diag}(\alpha, \beta)$  et que celle-ci vérifie  $D^{12} = I_2$ , on a  $A^{12} = I_2$ .

d) On vérifie aisément que  $G$  est un sous-groupe du groupe  $(\text{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$  et puisque

$$G = \{I_2, A, A^2, \dots, A^{11}\}$$

$G$  est un groupe monogène fini.

**Exercice 237 :** [\[énoncé\]](#)

a) Par récurrence

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

puis on étend par linéarité.

b) Si  $M$  est diagonalisable alors  $M$  annule un polynôme scindé simple  $P$  et les calculs précédents montrent que  $A$  annule aussi ce polynôme. Par suite  $A$  est diagonalisable. De plus  $A$  annule aussi le polynôme  $XP'$  de sorte que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $\lambda$  est racine commune de  $P$  et de  $XP'$ . Or  $P$  n'a que des racines simples donc  $P$  et  $P'$  n'ont pas de racines communes d'où  $\lambda = 0$ .  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{0\}$  donne  $A = 0$ .

Ainsi  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A = 0$ .

**Exercice 238 :** [\[énoncé\]](#)

a) Par récurrence et en exploitant  $AB = BA$

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

puis on étend par linéarité.

b) Si  $M$  est diagonalisable alors  $M$  annule un polynôme scindé simple  $P$  et les calculs précédents montrent que  $A$  annule aussi ce polynôme. Par suite  $A$  est diagonalisable semblable à une matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  qui sont racines de  $P$ .

De plus, on a

$$P'(A)B = O_n$$

et la matrice  $P'(A)$  est semblable à

$$P'(D) = \begin{pmatrix} P'(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P'(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Puisque les racines de  $P$  sont simples et que les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont racines de  $P$ , on a  $P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n) \neq 0$ . On en déduit que la matrice  $P'(A)$  est inversible et l'identité  $P'(A)B = O_n$  donne alors  $B = O_n$ .

Ainsi, si  $M$  est diagonalisable,  $A$  est diagonalisable et  $B$  est nulle. La réciproque est immédiate.

**Exercice 239 :** [\[énoncé\]](#)

Notons  $M$  la matrice étudiée et supposons celle-ci diagonalisable.

Il existe un polynôme  $P$  scindé simple annihilant  $M$ . Puisque

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ O & P(A) \end{pmatrix} = O_{2n}$$

le polynôme  $P$  annule aussi la matrice  $A$  qui est donc nécessairement diagonalisable.

De plus, puisque  $\chi_M = \chi_A^2$ , les matrices  $A$  et  $M$  ont les mêmes valeurs propres et on a l'égalité suivante sur leurs multiplicités :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}A, m_\lambda(M) = 2m_\lambda(A)$$

ce qui entraîne l'égalité suivante sur la dimension des sous-espaces propres

$$\forall \lambda \in \text{Sp}A, \dim E_\lambda(M) = 2 \dim E_\lambda(A)$$

et enfin l'égalité de rang suivante

$$\forall \lambda \in \text{Sp}A, \text{rg}(M - \lambda I_{2n}) = 2\text{rg}(A - \lambda I_n)$$

Or

$$\text{rg}(M - \lambda I_{2n}) = \text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ O & A - \lambda I_n \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  étant diagonalisable, on peut écrire  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont les valeurs propres distinctes de  $A$  et  $\alpha_k = \dim E_{\lambda_k}(A)$ .

En considérant la matrice inversible  $Q = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}$ , on a

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} D & C \\ O & D \end{pmatrix} \text{ avec } C = P^{-1}BP.$$

On écrit la matrice  $C$  par blocs selon la même décomposition que  $A$  :

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,m} \end{pmatrix} \text{ avec } C_{i,j} \in \text{Mat}_{\alpha_i, \alpha_j}(\mathbb{K})$$

et la condition

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda_k I_n & B \\ O & A_k - \lambda I_n \end{pmatrix} = 2\text{rg}(A - \lambda_k I_n)$$

se relit après formule de passage  $C_{k,k} = O_{\alpha_k}$ .

Inversement, si la matrice  $A$  est diagonalisable et s'il y a nullité des blocs diagonaux d'une représentation de  $B$  dans une base adaptée à la décomposition de  $\mathbb{K}^n$  en somme de sous-espaces propres de  $A$  alors on peut reprendre dans l'autre sens l'étude qui précède pour affirmer que  $M$  est diagonalisable.

**Exercice 240 :** [énoncé]

Soit  $M$  solution.

Puisque le corps de base est  $\mathbb{C}$ , la matrice  $M$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure où figure sur la diagonale les valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité.

Puisque  $\text{tr}(M) = n$ , la somme des valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité vaut  $n$ .

Or les valeurs propres de  $M$  sont racines du polynôme  $X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$ , elle ne peuvent donc qu'être  $0, 1, j$  ou  $j^2$ . Notons  $p, q, r$  et  $s$  les multiplicités de chacune ; on a  $\text{tr}M = q + rj + sj^2 = n$ . Puisque les parties réelles de  $j$  et  $j^2$  valent  $-1/2$ , la seule possibilité est que  $q = n, r = s = 0$  et alors  $p = 0$ .

En particulier  $0$  n'est pas valeur propre de  $M$  et donc  $M$  est inversible.

La relation  $M^5 = M^2$  donne alors  $M^3 = I_n$  et donc  $M$  est diagonalisable puisque  $M$  annule un polynôme scindé simple. Finalement  $M$  est semblable à  $I_n$  donc égale  $I_n$  car sa seule valeur propre est  $1$ .

Inversement, la matrice  $I_n$  est solution.

**Exercice 241 :** [énoncé]

a) On vérifie par le biais des relations proposées

$$M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p = O_p$$

On en déduit

$$M \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu} I_p - \frac{1}{\lambda\mu} M \right) = I_p$$

Par le théorème d'inversibilité,  $M$  est inversible et

$$M^{-1} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu} I_p - \frac{1}{\lambda\mu} M$$

b)  $M - \mu I_p = (\lambda - \mu)A$  et  $M - \lambda I_p = (\mu - \lambda)B$ .

Or

$$(M - \mu I_p)(M - \lambda I_p) = M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p = O_p$$

donc  $(\lambda - \mu)^2 AB = O_p$  puis  $AB = O_p$  car  $\lambda \neq \mu$ .

Puisque  $A = A \times I_p = A^2 + AB = A^2$ ,  $A$  est un projecteur.

Il en est de même pour  $B$ .

c)  $M$  annule le polynôme scindé simple

$$X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu = (X - \lambda)(X - \mu)$$

La matrice  $M$  est donc diagonalisable et  $\text{Sp}(M) \subset \{\lambda, \mu\}$ .

Il se peut que cette inclusion soit stricte, c'est le cas si  $M = \lambda I_p$  avec  $A = I_p$  et  $B = O_p$ .

En tout cas, le spectre n'est pas vide car  $M$  est diagonalisable.

**Exercice 242 :** [énoncé]

On remarque

$$C^3 - C^2 = 3A + 3B = 3C$$

La matrice  $C$  annule donc le polynôme

$$X^3 - X^2 - 3X$$

On vérifie aisément que ce polynôme est scindé à racines simples et on peut donc affirmer que  $C$  est diagonalisable. Or

$$A = C^3 - 2C^2 \text{ et } B = C + 2C^2 - C^3$$

donc  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.

**Exercice 243 :** [énoncé]

a) L'implication ( $\Leftarrow$ ) est immédiate

( $\Rightarrow$ ) Par récurrence sur  $n \geq 2$ .

Cas  $n = 2$

Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$  tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

En posant  $u = z_2/z_1$ , on a alors (car  $z_1 \neq 0$ )

$$|1 + u| = 1 + |u|$$

En écrivant  $u = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et en élevant au carré l'identité précédente, on obtient

$$(1 + a)^2 + b^2 = 1 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

et cette identité est vérifiée si, et seulement si,  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $b = 0$  ce qui permet d'écrire  $z_2 = \alpha_2 z_1$  avec  $\alpha_2 = a \in \mathbb{R}^+$ .

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 2$ .

Soient  $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$  avec  $z_1 \neq 0$  tels que

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

et puisque les termes extrémaux sont égaux on a

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

donc par hypothèse de récurrence on peut écrire pour tout  $k \geq 2$

$$z_k = \alpha_k z_1 \text{ avec } \alpha_k \geq 0$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^n z_k = (1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) z_1 \neq 0$$

et puisque

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}|$$

l'étude du cas  $n = 2$  permet d'écrire

$$z_{n+1} = a \sum_{k=1}^n z_k = \alpha_{n+1} z_1 \text{ avec } \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}^+$$

Récurrence établie.

b) Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifie  $M^n = I_n$  et  $\text{tr}M = n$  alors cette matrice est diagonalisable (car annule le polynôme scindé à racines simples  $X^n - 1$ ) et ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vérifient

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$$

Or les valeurs propres vérifient aussi

$$\forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k^n = 1$$

et elles sont donc de module 1. Nous sommes donc dans la situation où

$$|\lambda_1 + \dots + \lambda_n| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

Puisque  $\lambda_1 \neq 0$ , on peut écrire  $\lambda_k = \alpha_k \lambda_1$  pour tout  $k \geq 2$  avec  $\alpha_k \geq 0$ . Or tous les  $\lambda_k$  sont de module 1 donc les  $\alpha_k$  sont égaux à 1 et par suite

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n$$

Enfin puisque la somme des valeurs propres vaut  $n$ , on peut conclure

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$$

et finalement  $M = I_n$  car la matrice  $M$  est semblable à  $I_n$ .

La réciproque est immédiate.

**Exercice 244 :** [énoncé]

a) Pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie  $A^4 = I_2$  et  $B^3 = I_3$ . On en déduit  $M^{12} = I_5$ .Puisque  $M$  annule le polynôme  $X^{12} - 1$  scindé simple sur  $\mathbb{C}[X]$ , la matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ .b) Posons  $x = (1, 0, 1, 0, 0)$ , on a  $m(x) = (0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $m^2(x) = (-1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $m^3(x) = (0, -1, 1, 0, 0)$  et  $m^4(x) = (1, 0, 0, 1, 0)$ . On vérifie aisément que la famille correspondante est une base de  $\mathbb{R}^5$  en observant par exemple qu'elle est génératrice.Puisque  $m^5(x) = (0, 1, 0, 0, 1)$ , matrice de  $m$  dans cette nouvelle base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 245 :** [énoncé]a)  $X^2 - 2X$  annule  $A$ .b) Puisque  $A^2 - 2A = A(A - 2I_2) = O_2$ , on a  $(M^2 + M)(M^2 + M - 2I_2) = O_2$ . On en déduit que

$$P(X) = (X^2 + X)(X^2 + X - 2) = X(X + 1)(X - 1)(X + 2)$$

est annulateur de  $M$ .On en déduit que  $M$  est diagonalisable et que ces valeurs propres possibles sont  $0, -1, 1, 2$ .c) Notons  $\lambda$  et  $\mu$  les deux valeurs propres de  $M$ .Celles-ci ne peuvent être égales car si  $\lambda = \mu$  alors  $M = \lambda I_2$  n'est pas solution de l'équation.Cas  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$ On a  $M(M - I_2) = O_2$  donc  $M^2 - M = O_2$ . Combinée à la relation  $M^2 + M = A$ , on obtient

$$M = \frac{1}{2}A$$

Cas  $\lambda = 0$  et  $\mu = -2$ 

Un raisonnement analogue donne

$$M = -A$$

Cas  $\lambda = 0$  et  $\mu = -1$ On a  $M^2 + M = O_2$  et donc ce cas est impossible etc.**Exercice 246 :** [énoncé]

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient aisément  $\text{Sp}A = \{0, 2\}$ a) Soit  $M$  une matrice solution de l'équation  $M^2 + M = A$ .Si  $\lambda$  est valeur propre de  $M$  alors  $\lambda^2 + \lambda$  est valeur propre de  $A$  et donc

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda = 2$$

On en déduit

$$\lambda \in \{0, -1, 1, -2\}$$

b) Posons

$$P(X) = X(X + 1)(X - 1)(X + 2) = (X^2 + X)(X^2 + X - 2)$$

On a

$$P(M) = A(A - 2I_2) = O_2$$

Puisque  $M$  annule un polynôme scindé à racines simple, la matrice  $M$  est diagonalisable.Notons  $\lambda$  et  $\mu$  ses deux valeurs propres. Puisque  $\lambda^2 + \lambda$  et  $\mu^2 + \mu$  correspondent aux deux valeurs propres de  $A$ , on a, quitte à échanger  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\lambda \in \{0, -1\} \text{ et } \mu \in \{1, -2\}$$

Il y a alors quatre situations possibles :

Cas  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$ On a  $M(M - I_2) = O_2$  donc  $M^2 - M = O_2$ . Combinée à la relation  $M^2 + M = A$ , on obtient

$$M = \frac{1}{2}A$$

Cas  $\lambda = 0$  et  $\mu = -2$ 

Un raisonnement analogue donne

$$M = -A$$

Cas  $\lambda = -1$ 

On obtient

$$M = A - I_2 \text{ et } M = -I_2 - \frac{1}{2}A$$

Inversement, on vérifie par le calcul que ces matrices sont solutions.

**Exercice 247 :** [énoncé]

a) Puisque  $p^4 = p^2$ , une valeur propre  $\lambda$  doit vérifier  $\lambda^4 = \lambda^2$  donc  $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ .

b) Si  $p$  est diagonalisable alors sa matrice  $A$  dans une base de vecteurs propres sera diagonale avec des  $-1, 0$  ou  $1$  sur la diagonale. Comme alors  $A^3 = A$  on a  $p^3 = p$ .

Si  $p^3 = p$  alors  $p$  est annulé par un polynôme scindé à racines simples donc  $p$  est diagonalisable.

**Exercice 248 :** [énoncé]

Si  $1$  et  $-1$  sont les seules valeurs propres alors  $f \in \text{GL}(E)$  et la relation  $f^4 = f^2$  donne  $f^2 = \text{Id}$  ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.

Si  $1$  et  $-1$  ne sont pas les seules valeurs propres c'est que  $0$  est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur.  $f$  présente alors  $3 = \dim E$  valeurs propres distincts donc  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 249 :** [énoncé]

$\varphi^2(M) = P(PM + MP) + (PM + MP)P = PM + 2PMP + MP$  car  $P^2 = P$ .

$\varphi^3(M) = PM + 6PMP + MP$ .

Par suite  $\varphi^3(M) - 3\varphi^2(M) = -2PM - 2MP = -2\varphi(M)$ .

Ainsi  $\varphi$  annule le polynôme  $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ .

Puisque ce polynôme est scindé simple, l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable.

**Exercice 250 :** [énoncé]

a) Puisque  $u^3 = u$ , par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que  $u$  est diagonalisable de valeurs propres possibles  $0, 1, -1$ . Par les égalités  $tru = 0$  et  $tru^2 = 2n$  on peut affirmer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices commutant avec  $A$  étant celle de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut affirmer

$$\dim C(u) = 2n^2 + 1$$

b)  $\Pi_u = X^3 - X$  donc  $\dim \mathbb{R}[u] = 3$  et par suite  $C(u) = \mathbb{R}[u]$  si, et seulement si,  $n = 1$ .

**Exercice 251 :** [énoncé]

a) Si  $A^2 = A$  alors  $f_A^2 = f_A$ .  $f_A$  est une projection donc diagonalisable.

b) Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on observe  $P(f_A) : M \mapsto P(A)M$  de sorte que

$$P(f_A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$$

Tout endomorphisme étant diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple, on peut conclure.

**Exercice 252 :** [énoncé]

a) oui.

b) Si  $A$  est inversible alors  $M \mapsto A^{-1}M$  est clairement application réciproque de  $f$ .

Si  $f$  est inversible alors posons  $B = f^{-1}(I_n)$ . On a  $AB = I_n$  donc  $A$  est inversible.

c) On observe que  $f^n(M) = A^n M$  donc pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$P(f)(M) = P(A)M$$

Par suite  $P$  est annulateur de  $f$  si, et seulement si, il est annulateur de  $A$ .

Puisque la diagonalisabilité équivaut à l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, on peut conclure.

**Exercice 253 :** [énoncé]

a) En développant, on vérifie  $(f - \alpha \text{Id}) \circ (f - \beta \text{Id}) = \tilde{0}$ .

L'endomorphisme  $f$  annule un polynôme scindé simple, il est donc diagonalisable.

De plus  $\text{Sp} f \subset \{\alpha, \beta\}$ .

On a  $f(x) = \alpha x \Leftrightarrow \beta v(x) = \alpha v(x) \Leftrightarrow v(x) = 0$ .

b) On a  $(f - \beta \text{Id}) = (\alpha - \beta)u$  et  $(f - \alpha \text{Id}) = (\beta - \alpha)v$ .

La relation  $(f - \alpha \text{Id}) \circ (f - \beta \text{Id}) = \tilde{0}$  donne  $v \circ u = \tilde{0}$  et par un calcul symétrique on obtient aussi  $u \circ v = \tilde{0}$ .

On en déduit  $u = u \circ \text{Id} = u^2 + u \circ v = u^2$  et donc  $u$  est une projection vectorielle.

De plus  $\ker u = \ker((\alpha - \beta)u) = \ker(f - \beta \text{Id})$  et

$\text{Im} u = \ker(\text{Id} - u) = \ker v = \ker(f - \alpha \text{Id})$ .

c) Par récurrence  $f^n = \alpha^n u + \beta^n v$ .

**Exercice 254 :** [énoncé]

Par élimination de  $u$ , on a  $f^2 - \alpha f = \beta(\beta - \alpha)v$  et  $f^3 - \alpha f^2 = \beta^2(\beta - \alpha)v$ .

Par élimination de  $v$ , on obtient  $f \circ (f - \alpha \text{Id}) \circ (f - \beta \text{Id}) = \tilde{0}$ .

Ainsi  $P = X(X - \alpha)(X - \beta)$  est annulateur de  $f$ .

Cas  $\alpha \neq \beta$  et  $\alpha, \beta \neq 0$

$f$  est diagonalisable car annule un polynôme scindé simple.

Cas  $\alpha = \beta = 0$

$f$  est diagonalisable car  $f$  est l'endomorphisme nul.

Cas  $\beta = 0$  et  $\alpha \neq 0$ .

On a  $f^2 - \alpha f = 0$  donc  $f$  est diagonalisable car annule le polynôme scindé simple  $X(X - \alpha)$ .

Cas  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$ .

Semblable.

Cas  $\alpha = \beta \neq 0$ .

On a  $f = \alpha(u + v)$  et  $f^2 = \alpha^2(u + v)$  donc à nouveau  $f^2 - \alpha f = 0$ .

Dans tous les cas, l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 255 :** [énoncé]

a) On a

$$\phi^3(f) = p^3 \circ f \circ s^3 = p \circ f \circ s = \phi(f)$$

L'endomorphisme  $\phi$  annule le polynôme  $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$ .

Ce polynôme étant scindé simple, l'endomorphisme  $\phi$  est diagonalisable.

b) Les valeurs propres possibles de  $\phi$  sont  $0, 1, -1$ .

En raisonnant dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , les matrices de  $p$  et  $s$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & -I_s \end{pmatrix}$$

avec  $r = \dim F$  et  $s = \dim G$ . La matrice de  $f$  sera dans une même décomposition par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

et par calcul la matrice de  $\phi(f)$  sera

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ O & O \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de résoudre les équations  $\phi(f) = \lambda f$  pour  $\lambda = 0, 1, -1$ .

On obtient

$$E_0(\phi) = \{f \in \mathcal{L}(E) / \text{Im} f \subset G\}$$

$$E_1(\phi) = \{f \in \mathcal{L}(E) / G \subset \ker f \text{ et } \text{Im} f \subset F\}$$

et

$$E_{-1}(\phi) = \{f \in \mathcal{L}(E) / F \subset \ker f \text{ et } \text{Im} f \subset G\}$$

**Exercice 256 :** [énoncé]

a) On a

$$f(f(M)) = M + (2 + \text{tr}(AB))\text{tr}(AM)B$$

donc

$$P(X) = X^2 - (2 + \text{tr}(AB))X + 1 + \text{tr}(AB)$$

est annulateur de  $f$ . Les racines de ce polynôme sont  $1$  et  $1 + \text{tr}(AB)$ .

Si  $\text{tr}(AB) \neq 0$  alors  $f$  est diagonalisable car annulé par un polynôme scindé simple.

Pour  $M$  appartenant à l'hyperplan défini par la condition  $\text{tr}(AM) = 0$ , on a  $f(M) = M$ .

Pour  $M \in \text{Vect}(B) \neq \{0\}$ , on a  $f(M) = (1 + \text{tr}(AB))M$ .

Ce qui précède détermine alors les sous-espaces propres de  $f$ .

Si  $\text{tr}(AB) = 0$  alors  $1$  est la seule valeur propre possible de  $f$  et donc  $f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $f = \text{Id}$  ce qui donne la condition

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AM)B = O_n$$

Cette propriété a lieu si, et seulement si,  $A = O_n$  ou  $B = O_n$ .

b) Si  $A = O_n$  ou  $B = O_n$  alors  $f = \text{Id}$  et donc

$$\dim C = n^4$$

Si  $\text{tr}(AB) \neq 0$  alors  $f$  est diagonalisable avec des sous-espaces propres de dimensions  $1$  et  $n^2 - 1$ . On en déduit

$$\dim C = 1 + (n^2 - 1)^2$$

Il reste à étudier le cas complémentaire

$$\text{tr}(AB) = 0 \text{ et } A = O_n \text{ ou } B = O_n$$

Considérons une base de l'hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donnée par l'équation  $\text{tr}(AM) = 0$  dont le premier élément serait  $B$ . Complétons celle-ci en une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice de  $f$  dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & (0) & \lambda \\ & \ddots & & \\ (0) & & 1 & (0) \\ & & (0) & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0$$

En étudiant la commutation avec une telle matrice, on obtient

$$\dim C = n^4 - 2n^2 + 2$$

**Exercice 257 :** [énoncé]

On observe

$$f \circ f(M) = \operatorname{tr}(A)(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A) - \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A)A = \operatorname{tr}(A)f(M)$$

Ainsi

$$f \circ f = \operatorname{tr}(A).f$$

Si  $\operatorname{tr}A \neq 0$  alors l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable car annule le polynôme  $X^2 - \operatorname{tr}(A)X$  qui est scindé à racines simples.

Si  $\operatorname{tr}A = 0$  alors les valeurs propres de  $f$  figurent parmi les racines du polynôme  $X^2$ . Seule 0 peut donc être valeur propre de  $f$  et par conséquent  $f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $f = \tilde{0}$ . Ceci correspond au cas  $A = O_n$ .

Déterminons maintenant les sous-espaces propres de  $f$ .

Le cas  $A = O_n$  est immédiat. Supposons-le désormais exclu.

Si  $\operatorname{tr}(M) = 0$  alors

$$f(M) = \operatorname{tr}(A)M$$

Pour  $M$  matrice de l'hyperplan des matrices de trace nulle,  $f(M) = \lambda M$  avec  $\lambda = \operatorname{tr}(A)$ . On en déduit que  $\operatorname{tr}(A)$  est valeur propre de  $M$  et le sous-espace propre associé est de dimension au moins  $n^2 - 1$ .

Dans le cas où  $\operatorname{tr}(A) = 0$ , l'endomorphisme n'est pas diagonalisable et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre  $\operatorname{tr}(A)$  est exactement  $n^2 - 1$ .

Dans le cas où  $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ , l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable et donc la dimension des sous-espaces propres des valeurs propres 0 et  $\operatorname{tr}(A)$  sont respectivement 1 et  $n^2 - 1$ .

**Exercice 258 :** [énoncé]

a)  $p + q = \operatorname{Id}$ ,  $p \circ q = 0$  car  $(u - a\operatorname{Id})(u - b\operatorname{Id}) = 0$ ,  $p = p \circ \operatorname{Id} = p \circ p + p \circ q = p \circ p$ , aussi  $q \circ q = q$  via  $q \circ p = 0$ .

b)  $\ker p = \ker(u - a\operatorname{Id})$ ,  $\ker q = \ker(u - b\operatorname{Id})$  et  $(u - a\operatorname{Id})(u - b\operatorname{Id}) = 0$  donne par le lemme de décomposition des noyaux,  $E = \ker p \oplus \ker q$ .

c)  $u$  est diagonalisable car annule un polynôme scindé simple,

$\operatorname{Sp}(u) = \{a, b\}$ ,  $E_a(u) = \ker p$ ,  $E_b(u) = \ker q$  à moins que  $u = a\operatorname{Id}$  ou  $u = b\operatorname{Id}$ .

**Exercice 259 :** [énoncé]

$f$  est diagonalisable car annule le polynôme

$$X^3 - 4X = X(X - 2)(X + 2)$$

scindé simple. Les valeurs propres de  $f$  figurent parmi  $\{-2, 0, 2\}$  et donc la trace de  $f$  qui est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité est paire.

**Exercice 260 :** [énoncé]

$A$  annule un polynôme scindé à racines simples  $(1, i$  et  $-i)$  donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Les valeurs propres possibles de  $A$  sont  $1, i$  et  $-i$ . Puisque  $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{R}$ , la multiplicité de  $i$  égale celle de  $-i$ .

Par suite  $\det(A) = 1$ .

**Exercice 261 :** [énoncé]

$A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  semblable à une matrice  $D = \operatorname{diag}(-I_p, -jI_q, -j^2I_q)$  donc

$$\operatorname{tr}A = \operatorname{tr}D = -p - q(j + j^2) = q - p \in \mathbb{Z}$$

**Exercice 262 :** [énoncé]

Le polynôme

$$X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$$

annule la matrice  $A$ . Ce polynôme étant scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De plus

$$\operatorname{Sp}A \subset \{0, j, j^2\}$$

Puisque la matrice  $A$  est réelle, les valeurs propres  $j$  et  $j^2$  ont même multiplicité  $p \in \mathbb{N}$ . La diagonalisation complexe de  $A$  comporte alors  $p$  nombres  $j$  et  $p$  nombres  $j^2$  sur la diagonale, les éventuels autres coefficients diagonaux étant nuls. La matrice  $A$  est alors de même rang que cette matrice diagonale, c'est-à-dire  $2p$ .

**Exercice 263 :** [énoncé]

La matrice  $A$  est diagonalisable car  $A$  annule un polynôme scindé simple.

Les racines complexes du polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  sont conjuguées et valeurs propres de  $A$  donc racines du polynôme annulateur  $X^n - 1$ .

Si les deux racines de  $\chi_A$  sont réelles alors  $\text{Sp}A \subset \{-1, 1\}$  et  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc  $A^{12} = I_2$ .

Sinon les racines de  $\chi_A$  sont complexes conjuguées  $z, \bar{z}$  non réelles. Leur somme sera  $2\text{Re}(z) \in [-2, 2]$ , leur produit  $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ . La matrice  $A$  étant de plus à coefficients entiers,  $2\text{Re}(z) \in \mathbb{Z}$ . Les polynômes caractéristiques de  $A$  possibles sont alors  $X^2 - 2X + 1$ ,  $X^2 - X + 1$ ,  $X^2 + 1$ ,  $X^2 + X + 1$  et  $X^2 + 2X + 1$ .

Les cas  $X^2 - 2X + 1$  et  $X^2 + 2X + 1$  sont à éliminer car correspondant à des racines réelles (et déjà traités).

Dans chaque autre cas, le polynôme  $X^{12} - 1$  est multiple du polynôme caractéristique et donc annulateur.

#### Exercice 264 : [énoncé]

Si  $A \in E_n$  alors  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. Ces valeurs propres sont aussi racines du polynôme caractéristique de  $A$ . Or les coefficients de ce polynôme sont entiers et, par les expressions des coefficients d'un polynôme scindé en fonction de ses racines complexes (ici de module 1), on peut borner les coefficients du polynôme caractéristique de  $A$ . Par suite, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles pour un élément  $A \in E_n$ . Ces polynômes ont eux-mêmes qu'un nombre fini de racines et il n'y a donc qu'un nombre fini de racines de l'unité possibles pour les valeurs propres de  $A \in E_n$ .

On peut alors affirmer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que toutes les valeurs propres  $\lambda$  des matrices  $A \in E_n$  vérifient  $\lambda^N = 1$ . On a alors aussi  $A^N = 1$  (car  $A$  est diagonalisable) et donc  $\omega(A) \leq N$ . Ainsi  $\omega(E_n) \subset \llbracket 1, N \rrbracket$ .

#### Exercice 265 : [énoncé]

$f$  annule un polynôme scindé à racines simple et  $f|_F$  aussi.

#### Exercice 266 : [énoncé]

Le sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$  est stable par  $u$  et l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans  $(e_1, e_2)$ .

Or cette matrice n'est pas diagonalisable donc l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  n'est pas diagonalisable et donc  $u$  ne l'est pas non plus.

#### Exercice 267 : [énoncé]

Si  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisables alors on peut former une base de chaque sous-espace propre de  $f$  à l'aide de vecteur propre de  $g$ . Par suite les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$  et inversement.

Supposons que les sous-espaces propres de  $f$  soient stables par  $g$ .  $f$  étant diagonalisable,  $E$  est la somme directe des sous-espaces propres de  $f$ . Sur chaque sous-espace propre de  $f$ , la restriction de  $g$  définit un endomorphisme diagonalisable car annulé par un polynôme scindé à racines simples (car  $g$  diagonalisable). Cela permet de construire une base de diagonalisation simultanée.

#### Exercice 268 : [énoncé]

Si  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisable alors leurs représentations diagonales commutent donc  $f$  et  $g$  commutent.

Si  $f$  et  $g$  commutent alors  $g$  laisse stable chaque sous-espace propre  $E_\lambda(f)$  et donc la restriction de  $g$  à celui-ci est diagonalisable dans une certaine base  $\mathcal{B}_\lambda$ . En accolant les bases  $\mathcal{B}_\lambda$ , pour  $\lambda \in \text{Sp}(f)$  on obtient une base où  $f$  et  $g$  sont représentés par des matrices diagonales.

#### Exercice 269 : [énoncé]

- Une base de vecteur propre de  $u$  est aussi une base de vecteur propre de  $P(u)$ .
- La réciproque n'est pas vraie en toute généralité comme le montre le cas d'un polynôme constant.

En revanche, on peut montrer que la réciproque est vraie si  $\deg P = 1$ .

#### Exercice 270 : [énoncé]

- Une base diagonalisant  $f$  diagonalise aussi  $f^2$  et permet d'affirmer

$$\text{rg} f = \text{rg} f^2$$

Sachant  $\ker f \subset \ker f^2$ , on obtient  $\ker f = \ker f^2$  par égalité des dimensions.

- Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un endomorphisme représenté par  $A$  n'est pas diagonalisable alors que son carré est nul et donc diagonalisable.

- Supposons  $f$  diagonalise et  $\ker f = \ker f^2$ . Soit  $P$  le polynôme minimal de  $f^2$ . Celui-ci est scindé à racines simples car  $f^2$  est diagonalisable. Cas 0 n'est pas racine de  $P$ .

On peut écrire

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \text{ avec } \forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i \neq 0$$

Pour chaque  $\lambda_i$ , posons  $\delta_i$  et  $-\delta_i$  les deux solutions complexes de l'équation

$$z^2 = \lambda_i$$

Considérons ensuite

$$Q = \prod_{i=1}^p (X - \delta_i)(X + \delta_i)$$

Le polynôme  $Q$  est scindé à racines simples et  $Q(f) = P(f^2) = 0$ .

On en déduit que  $f$  est diagonalisable.

Cas 0 est racine de  $P$ .

On peut écrire

$$P = X \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \text{ avec } \forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i \neq 0$$

En reprenant les notations ci-dessus, et on considérant le polynôme

$$Q = \prod_{i=1}^p (X - \delta_i)(X + \delta_i)$$

on a

$$f^2 Q(f) = P(f^2) = 0$$

Ainsi

$$\text{Im} Q(f) \subset \ker f^2$$

or  $\ker f^2 = \ker f$  donc

$$f Q(f) = 0$$

Ainsi  $f$  annule le polynôme scindé à racines simples

$$R = X \prod_{i=1}^p (X - \delta_i)(X + \delta_i)$$

On en déduit à nouveau  $f$  diagonalisable.

**Exercice 271 : [énoncé]**

a)  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $u$  annule un polynôme scindé à racines simples.

ou encore :

$u$  est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme minimal de  $u$  est scindé à racines simples.

b) Si  $u$  est diagonalisable, il est clair que  $u^2$  l'est aussi.

Inversement, si  $u^2$  est diagonalisable alors son polynôme annulateur est scindé à racines simples :  $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ .

Puisque  $u \in \text{GL}(E) : \forall 1 \leq i \leq p, \lambda_i \neq 0$  car 0 n'est pas valeur propre de  $u$ .

Notons  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  les deux solutions de l'équation  $z^2 = \lambda_i$ .

Puisque  $(u^2 - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (u^2 - \lambda_p \text{Id}) = 0$  on a

$$(u - \alpha_1 \text{Id}) \circ (u - \beta_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (u - \alpha_p \text{Id}) \circ (u - \beta_p \text{Id}) = 0.$$

Ainsi  $u$  annule un polynôme scindé à racines simples. Par suite  $u$  est diagonalisable.

c) Si  $u$  est diagonalisable alors  $P(u)$  l'est aussi.

Inversement, si  $P(u)$  est diagonalisable alors son polynôme minimal est scindé à racines simples  $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$  où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $P(u)$ .

Le polynôme  $(P(X) - \lambda_1) \dots (P(X) - \lambda_p)$  est alors annulateur de  $u$ .

Les facteurs  $P(X) - \lambda_i$  sont sans racines communes.

Le polynôme minimal  $M$  de  $u$  divise  $(P(X) - \lambda_1) \dots (P(X) - \lambda_p)$ .

Si  $\omega$  est racine au moins double de  $M$  alors  $\omega$  est racine au moins double de l'un des facteurs  $P(X) - \lambda_i$  donc racine de  $P'$ .

Or  $\omega$  est aussi valeur propre de  $u$  donc  $P'(\omega) = 0$  est valeur propre de  $P'(u)$ .

Cependant  $P'(u) \in \text{GL}(E)$ , c'est donc impossible.

Par suite les racines de  $M$  sont simples et  $u$  est donc diagonalisable.

**Exercice 272 : [énoncé]**

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $P(u)$ .

Posons

$$Q = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

$Q$  est un polynôme annulateur de  $P(u)$  donc

$$\prod_{k=1}^n (P(u) - \lambda_k \text{Id}_E) = \tilde{0}$$

Posons  $Q_k = P - \lambda_k$ . Le polynôme  $\prod_{k=1}^n Q_k$  est annulateur de  $u$  et les racines d'un

polynôme  $Q_k$  sont distinctes de celles d'un polynôme  $Q_\ell$  avec  $k \neq \ell$  car  $\lambda_k \neq \lambda_\ell$ .

De plus si  $\alpha$  est racine multiple de  $Q_k$  alors  $P(\alpha) = \lambda_k$  et  $Q'_k(\alpha) = P'(\alpha) = 0$  ce qui est exclu par hypothèse.

Par conséquent le polynôme  $\prod_{k=1}^n Q_k$  est scindé simple donc  $u$  est diagonalisable.

**Exercice 273 :** [\[énoncé\]](#)

Si  $A$  est diagonalisable, on peut écrire  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et  $D$  diagonale. On a alors  $B = A^p = P^{-1}D^pP$  avec  $D^p$  diagonale et donc  $B$  est diagonalisable.

Inversement, si  $B$  est diagonalisable alors il existe un polynôme annulateur de  $B$  scindé à racines simple de la forme

$$\prod_{k=1}^m (X - \lambda_k)$$

De plus, puisque  $B$  est inversible, on peut supposer les  $\lambda_k$  tous non nuls. Sachant  $B = A^p$ , le polynôme

$$\prod_{k=1}^m (X^p - \lambda_k)$$

est annulateur de  $A$ . Or ce dernier est scindé à racines simples car  
 - les facteurs  $X^p - \lambda_k$  et  $X^p - \lambda_\ell$  (avec  $k \neq \ell$ ) ont des racines deux à deux distinctes ;  
 - les racines de  $X^p - \lambda_k$  sont toutes simples (car  $\lambda_k \neq 0$ ).  
 On en déduit que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 274 :** [\[énoncé\]](#)

- a)  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte  $T$ .
- b) On peut écrire  $A = PTP^{-1}$  donc

$$\det(A + I_n) = \det(T + I_n) = 1$$

- c)  $\det(A + M) = \det(M) \det(AM^{-1} + I_n)$ .  
 Puisque  $(AM^{-1})^n = A^n M^{-n} = O_n$ , 0 est la seule valeur propre de  $AM^{-1}$  et par l'étude qui précède  $\det(A + M) = \det M$ .
- d) Si  $A$  est solution alors pour tout  $\lambda \neq 0$ ,  $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$  donc 0 est seule valeur propre de  $A$ .

**Exercice 275 :** [\[énoncé\]](#)

Puisque le polynôme  $X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$  annule  $f$  le lemme de décomposition des noyaux donne

$$\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - \text{Id})$$

Sachant  $\dim \ker(f - \text{Id}) = 1$ , on a  $\dim \ker f^2 = 2$ .

On ne peut avoir  $\dim \ker f = 0$  et puisque  $\ker f \subset \ker f^2$ , on a

$$\dim \ker f = 1 \text{ ou } 2$$

Si  $\dim \ker f = 2$  alors

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f - \text{Id}) \oplus \ker f$$

et dans une base adaptée à cette supplémentarité, la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\dim \ker f = 1$  alors considérons  $e_3 \in \ker f^2 \setminus \ker f$  et  $e_2 = f(e_3)$ .

On vérifie aisément que  $(e_2, e_3)$  est une base de  $\ker f^2$  et en considérant un vecteur  $e_1 \in \ker(f - \text{Id})$  non nul, on obtient une base  $(e_1, e_2, e_3)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 276 :** [\[énoncé\]](#)

$\dim \ker A = n - 2$  donc 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité au moins  $n - 2$ . Puisque  $\chi_A$  est scindé, la trace de  $A$  est la somme des valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

Si 0 est la seule valeur propre de  $A$  alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et alors  $A^n = O_n$  ce qui est exclu.

Sinon  $A$  possède alors une autre valeur propre, puis deux car la somme des valeurs propres est nulle. Par suite la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $A$  est au moins  $n$  et donc  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 277 :** [\[énoncé\]](#)

Le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X - 2)^2$$

est annulateur de  $M$ .

On en déduit  $\text{Sp}M \subset \{0, 2\}$  et  $M$  trigonalisable (car  $M$  annule un polynôme scindé).

Par suite  $\text{tr}M$  est la somme des valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité et puisque  $\text{tr}M = 0$ , seule 0 est valeur propre de  $M$ .

On en déduit que la matrice  $M - 2I_n$  est inversible et puisque

$$M(M - 2I_n)^2 = O_n$$

on obtient

$$M = O_n$$

**Exercice 278 :** [énoncé]

Si  $A$  est solution alors  $P = X(X - 2)^2$  est annulateur de  $A$  et les valeurs propres de  $A$  figurent parmi  $\{0, 2\}$ . Par la trace, on peut alors affirmer que 2 est valeur propre de multiplicité 4.

Par le lemme de décomposition des noyaux,  $\ker(A - 2\text{Id})^2$  et  $\ker A$  sont supplémentaires.

Par multiplicité des valeurs propres, leurs dimensions respectives sont 4 et  $n - 4$ .

Ainsi  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 2I_4 + M & 0 \\ 0 & O_{n-4} \end{pmatrix}$$

avec  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  vérifiant  $M^2 = 0$ .

En raisonnant sur le rang, on montre que  $M$  est semblable à

$$O_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La réciproque est immédiate.

**Exercice 279 :** [énoncé]

a) Puisque  $A$  est nilpotente,  $A$  ne peut avoir que des valeurs propres nulles. Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique et ce dernier étant scindé sur  $\mathbb{C}$ ,  $\chi_A = X^n$ .

b) Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a aussi  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et le polynôme caractéristique est calculé par la même formule dans les deux cas.

**Exercice 280 :** [énoncé]

a) Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  alors  $A$  est triangularisable et lors de cette triangularisation les valeurs propres de  $A$  apparaissent sur la diagonale. Or  $A$  est nilpotent donc 0 est sa seule valeur propre et la diagonale de la matrice triangulaire obtenue est nulle. Le polynôme caractéristique de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est alors égal à  $X^n$ .

b) Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a aussi  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et le polynôme caractéristique est calculé par la même formule dans les deux cas. Par suite le polynôme caractéristique pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est scindé et donc à nouveau  $A$  est triangularisable avec des 0 sur la diagonale.

**Exercice 281 :** [énoncé]

Puisque la matrice  $A$  est nilpotente, on a

$$A^n = O_n$$

et donc puisque  $A$  et  $B$  commutent

$$(AB)^n = A^n B^n = O_n$$

On en déduit que la matrice  $AB$  est aussi nilpotente. Elle est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et donc

$$\text{tr}(AB) = 0$$

**Exercice 282 :** [énoncé]

a) Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $\lambda^p = 0$  d'où  $\lambda = 0$ . Par suite  $\chi_A = (-1)^n X^n$  puis par Cayley Hamilton  $A^n = 0$ .

b)  $\det(A + I) = \chi_A(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1$

c) Si  $M$  est inversible  $\det(A + M) = \det(AM^{-1} + I) \det M$ .

Or  $A$  et  $M^{-1}$  commutent donc  $(AM^{-1})^p = 0$  puis par b) :  $\det(A + M) = \det M$ . Si  $M$  n'est pas inversible. Posons  $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$ . Quand  $p \rightarrow +\infty$ ,  $M_p$  est inversible et commute avec  $A$  donc  $\det(A + M_p) = \det M_p$ . Or  $\det M_p \rightarrow \det M$  et  $\det(A + M_p) \rightarrow \det(A + M)$  donc on peut prolonger l'égalité à toute matrice qui commute avec  $A$ .

d) Non prendre :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 283 :** [énoncé]

On a

$$\det(A + N) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}N)$$

Puisque  $A$  et  $N$  commutent, il en est de même de  $A^{-1}$  et  $N$ . On en déduit que la matrice  $A^{-1}N$  est nilpotente car  $N$  l'est.

La matrice  $A^{-1}N$  est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et la matrice  $I_n + A^{-1}N$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

On en déduit

$$\det(I_n + A^{-1}N) = 1$$

puis

$$\det(A + N) = \det A$$

**Exercice 284 :** [\[énoncé\]](#)

Si la matrice  $A$  est nilpotente alors elle est annihilée par un polynôme  $X^m$  et donc

$$\text{Sp}A \subset \{0\}$$

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la matrice  $A$  est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

De la même façon, les matrices  $A^p$  sont aussi semblables à des matrices triangulaires supérieures strictes et donc

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{tr}A^p = 0$$

Inversement, supposons  $\text{tr}A^p = 0$  pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Nous allons montrer que seule 0 est valeur propre de  $A$ . On pourra alors par trigonalisation affirmer que la matrice  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire supérieure stricte  $T$  et puisque  $T^n = O_n$  on aura aussi  $A^n = O_n$  ce qui conclut.

Par l'absurde supposons donc que la matrice  $A$  ait au moins une valeur propre non nulle.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres non nulles de la matrice  $A$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  leurs multiplicités respectives.

En procédant encore à une trigonalisation de la matrice  $A$ , on peut affirmer

$$\forall 1 \leq p \leq n, \text{tr}(A^p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^p = 0$$

On ne retient que les  $m$  premières équations pour exprimer le système

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0 \\ \lambda_1^2 \alpha_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m^2 \alpha_m = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^m \alpha_1 + \lambda_2^m \alpha_2 + \dots + \lambda_m^m \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Ce système peut se percevoir sous la forme matricielle  $VX = 0$  avec  $X = {}^t(\alpha_1 \dots \alpha_m)$  et

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \dots & \lambda_m^m \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice  $V$  se calcule par déterminant de Vandermonde et est non nul car  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$ . On en déduit

$$\forall 1 \leq i \leq m, \alpha_i = 0$$

ce qui est absurde car les  $\alpha_i$  étaient des multiplicités de véritables valeurs propres.

**Exercice 285 :** [\[énoncé\]](#)

a) Supposons qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^p = 0$ .

$X^p$  est annulateur de  $f$  donc  $\text{Sp}(f) \subset \{0\}$ . Or  $\text{Sp}(f) \neq \emptyset$  donc  $\text{Sp}(f) = \{0\}$ .

Inversement, si  $\text{Sp}(f) = \{0\}$  alors seule 0 est racine de son polynôme caractéristique. Or  $\chi_f$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  donc  $\chi_f = (-1)^n X^n$  puis  $f^n = 0$  en vertu du théorème de Cayley Hamilton. On en déduit que  $f$  est nilpotente.

b) Supposons  $f$  nilpotent.

Par l'étude ci-dessus,  $f$  est trigonalisable stricte et donc

$$\forall 1 \leq k \leq n, \text{tr}(f^k) = 0$$

car les puissances de  $f$  pourront aussi être représentées par des matrices triangulaires strictes.

Inversement, supposons

$$\forall 1 \leq k \leq n, \text{tr}(f^k) = 0$$

En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres comptées avec multiplicité de  $A$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système est délicate.

En raisonnant par récurrence, nous allons établir que la seule solution est  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  ce qui permettra de conclure que  $f$  est nilpotente car  $\chi_f = (-1)^n X^n$  est annulateur de  $f$ .

Pour  $n = 1$  : la propriété est immédiate.

Supposons la propriété au rang  $n - 1$ .

Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

En développant,

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

Comme  $P(\lambda_i) = 0$ , on a  $\sum_{i=1}^n P(\lambda_i) = 0$ .

Or

$$\sum_{i=1}^n P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n + a_{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{n-1} + \dots + a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i + na_0 = na_0$$

On en déduit  $a_0 = 0$  et donc 0 est racine de  $P$ .

Il existe alors  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\lambda_i = 0$ .

Par symétrie du problème, on peut supposer  $\lambda_n = 0$ .

Par application de l'hypothèse de récurrence, on obtient  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

La récurrence est établie.

**Exercice 286 : [énoncé]**

Si  $u$  possède une unique valeur propre  $\lambda$  alors celle-ci est la seule racine de son polynôme caractéristique qui est alors  $(X - \lambda)^{\dim E}$ . Ce dernier annulant  $u$ , on peut affirmer  $u - \lambda \text{Id}_E$  est nilpotent.

Si  $u - \lambda \text{Id}_E$  est nilpotent alors il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $(X - \lambda)^p$  soit annulateur de  $u$ . Les valeurs propres de  $u$  étant racine de ce polynôme, elles ne peuvent qu'être égale à  $\lambda$ . De plus  $\lambda$  est assurément valeur propre car un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie possède au moins une valeur propre.

**Exercice 287 : [énoncé]**

Rappelons qu'une matrice  $M$  carrée de taille  $n$  qui est nilpotente vérifie  $M^n = O_n$  (l'ordre de nilpotence est au plus égal à la taille de la matrice). On a

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, (A + 2^k B)^n = O_n$$

Considérons alors la matrice

$$(A + XB)^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$$

Celle-ci est à coefficients polynomiaux de degrés inférieurs à  $n$ . Puisque  $1, 2, \dots, 2^n$  sont  $n + 1$  racines distinctes de ces coefficients, ceux-ci sont tous nuls. On en déduit

$$A^n = O_n$$

car les coefficients constants sont nuls, et

$$B^n = O_n$$

car les coefficients des termes  $X^n$  sont aussi nuls.

**Exercice 288 : [énoncé]**

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente vérifie  $M^n = O_n$ . Considérons la matrice  $(A + xB)^n$ . Les coefficients de cette matrice sont des polynômes de degrés inférieurs à  $n$  s'annulant chacun en les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ , ce sont donc des polynômes nuls. Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{C}$ ,  $(A + xB)^n = O_n$ . En particulier pour  $x = 0$ , on obtient  $A^n = O_n$ . Aussi pour tout  $y \neq 0$ , en considérant  $y = 1/x$ , on a  $(yA + B)^n = O_n$  et en faisant  $y \rightarrow 0$ , on obtient  $B^n = O_n$ .

**Exercice 289 : [énoncé]**

a)  $\mathcal{I}_1$  est l'idéal des polynômes annulateurs de  $u$ ; il est engendré par  $P_1 = \pi_u$  polynôme minimal de  $u$ .

La somme de deux endomorphismes nilpotents commutant est encore nilpotent car la formule du binôme de Newton s'applique et il suffit de travailler avec un exposant assez grand. On obtient alors facilement que  $\mathcal{I}_2$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{K}[X], +)$ . La stabilité par absorption étant immédiate,  $\mathcal{I}_2$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  et comme il contient  $\mathcal{I}_1$ , il est non nul.

b) Puisque  $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ ,  $P_1 \in P_2 \mathbb{K}[X]$  et donc  $P_2 \mid P_1$ .

Aussi, en posant  $n$  la dimension de  $E$ , on sait que pour tout endomorphisme nilpotent de  $v$  de  $E$ , on a  $v^n = \tilde{0}$ . Puisque  $P_2(u)$  est nilpotent, on en déduit que  $(P_2)^n(u) = \tilde{0}$  et donc  $P_1 \mid P_2^n$ .

c) Cette question est immédiate avec la décomposition de Dunford mais cette dernière est hors-programme... Procédons autrement!

Puisque  $P_2 \mid P_1$  et  $P_1 \mid P_2^n$ , les racines de  $P_2$  sont exactement celles de  $P_1$  c'est-à-dire les valeurs propres de l'endomorphisme  $u$ . On peut donc écrire

$$P_2 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$$

Or  $P_2(u)$  étant nilpotent, il est immédiat que l'endomorphisme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (u - \lambda \text{Id}_E)$

l'est aussi.

On en déduit que

$$P_2 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)$$

et ce polynôme est donc scindé simple.

Déterminons maintenant un polynôme  $R \in \mathbb{K}[X]$  tel que pour  $Q = P_2 R$ , on ait  $P_2(u - Q(u)) = \tilde{0}$ .

On en déduira que  $u - Q(u)$  est diagonalisable avec  $Q(u) \in \mathcal{I}_2$ .

L'identité  $P_2(u - Q(u)) = \tilde{0}$  est obtenue dès que  $P_1$  divise le polynôme

$$P_2(X - P_2(X)R(X)) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda - P_2(X)R(X))$$

Or  $P_1 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)^{\beta_\lambda}$  donc il suffit que pour chaque  $\lambda \in \text{Sp}u$ , le facteur  $(X - \lambda)^{\beta_\lambda}$  divise le facteur  $X - \lambda - P_2(X)R(X)$  pour pouvoir conclure.  
On a

$$X - \lambda - P_2(X)R(X) = (X - \lambda) \left( 1 - \prod_{\mu \neq \lambda} (X - \mu)R(X) \right)$$

La condition voulue est assurément vérifiée si  $\beta_\lambda = 1$ .  
Pour  $\beta_\lambda \geq 2$ , la condition voulue est satisfaite si  $\prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu)R(\lambda) = 1$  et si pour tout  $k \in \{1, \dots, \beta_\lambda - 2\}$ , la dérivée  $k$ ème du polynôme  $\prod_{\mu \neq \lambda} (X - \mu)R(X)$  s'annule en  $\lambda$ . Cela fournit des équations déterminant pleinement  $R(\lambda), R'(\lambda), \dots, R^{\beta_\lambda - 2}(\lambda)$  car  $\prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu) \neq 0$ .

Sachant qu'il est possible de construire un polynôme prenant des valeurs données ainsi que ses dérivées en des éléments deux à deux distincts de  $\mathbb{K}$ , on peut déterminer un polynôme résolvant notre problème.

**Exercice 290 : [énoncé]**

- a)  $O_2^2 = O_2$  donc  $\Phi(O_2)^2 = \Phi(O_2)$  d'où  $\Phi(O_2) = 0$  ou  $1$ .  
Si  $\Phi(O_2) = 1$  alors pour tout  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $\Phi(A) = \Phi(A) \times \Phi(O_2) = \Phi(A \times O_2) = 1$ .  
Ceci est exclu car la fonction  $\Phi$  n'est pas constante. On en déduit  $\Phi(O_2) = 0$ .  
b) Si  $A$  est nilpotente alors  $A^2 = O_2$  (car  $A$  est de taille 2) et donc  $\Phi(A)^2 = 0$  puis  $\Phi(A) = 0$ .  
c)  $I_2^2 = I_2$  donc  $\Phi(I_2)^2 = \Phi(I_2)$  puis  $\Phi(I_2) = 0$  ou  $1$ .  
Si  $\Phi(I_2) = 0$  alors pour tout  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $\Phi(A) = \Phi(A \times I_2) = \Phi(A) \times 0 = 0$ .  
Ceci est exclu car la fonction  $\Phi$  n'est pas constante. On en déduit  $\Phi(I_2) = 1$ .  
Notons  $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  
On remarque  $E^2 = I_2$  donc  $\Phi(E)^2 = 1$  puis  $\Phi(E) = -1$  car  $\Phi(E) \neq \Phi(I_2)$ .  
Puisque  $B = EA$ , on en déduit  $\Phi(B) = -\Phi(A)$ .  
d) Si  $A$  est inversible alors  $\Phi(I_2) = \Phi(A) \times \Phi(A^{-1})$  et donc  $\Phi(A) \neq 0$  puisque  $\Phi(I_2) = 1 \neq 0$ .  
Inversement, supposons  $A$  non inversible.  $0$  est valeur propre de  $A$ .  
On vérifie aisément que deux matrices  $A$  et  $B$  semblables vérifient  $\Phi(A) = \Phi(B)$ .  
Si  $A$  est diagonalisable alors  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}A \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\Phi(A) = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}A \end{pmatrix} = -\Phi \begin{pmatrix} 0 & \text{tr}A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

car cette dernière matrice est nilpotente.

Si  $A$  n'est pas diagonalisable  $A$  est trigonalisable (car  $\chi_A$  scindé sur  $\mathbb{R}$ ) et  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite  $\Phi(A) = 0$  car cette dernière matrice est nilpotente.

**Exercice 291 : [énoncé]**

- a)  $\text{Sp}A = \{0\}$  et  $A \neq O_n$  donc  $A$  n'est pas diagonalisable.  
b) On remarque  $A^n = O_n$  et  $A^{n-1} \neq O_n$ .  
S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $B^2 = A$  alors  $B^{2n} = A^n = O_n$  donc  $B$  est nilpotente. Par suite  $B^n = O_n$ .  
Or  $B^{2n-2} \neq O_n$  avec  $2n - 2 \geq n$ , c'est absurde.

**Exercice 292 : [énoncé]**

a) Par le développement limite de  $\sqrt{1+x}$  en 0 on peut écrire

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$$

avec  $P_n$  polynôme de degré inférieur à  $n - 1$ .

b) On a

$$P_n^2(x) = (\sqrt{1+x} + O(x^n))^2 = 1 + x + O(x^n)$$

donc

$$P_n^2(x) - x - 1 = O(x^n)$$

Notons  $\alpha$  la multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme  $P_n^2(X) - X - 1$ .  
On peut écrire  $P_n^2(X) - X - 1 = X^\alpha Q(X)$  avec  $Q(0) \neq 0$  et donc

$$x^\alpha Q(x) = O(x^n) \text{ au voisinage de } 0$$

puis

$$x^{\alpha-n} Q(x) = O(1)$$

Nécessairement  $\alpha - n \geq 0$  et on en déduit que 0 est racine de multiplicité au moins  $n$  du polynôme  $P_n^2(X) - X - 1$  et donc que  $X^n$  divise ce polynôme.

c) Puisque  $X^n$  annule  $f$ ,  $P_n^2(X) - X - 1$  annule aussi  $f$  et alors l'endomorphisme  $g = P_n(f)$  vérifie

$$g^2 = f + \text{Id}_E$$

d) Puisque  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé et puisque  $\lambda$  est sa seule valeur propre, celui-ci est

$$\chi_f = (-1)^n (X - \lambda)^n$$

En vertu du théorème de Cayley-Hamilton, on a  $(f - \lambda \text{Id}_E)^n = \bar{0}$ .  
Considérons alors  $\mu \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\mu^2 = \lambda$  et posons

$$g = \mu P_n((f - \lambda \text{Id}_E)/\mu^2)$$

Puisque  $(f - \lambda \text{Id}_E)/\mu^2$  vérifie l'hypothèse du c), on a

$$g^2 = \mu^2 \left( \frac{f - \lambda \text{Id}_E}{\mu^2} + \text{Id}_E \right) = f$$

**Exercice 293 :** [énoncé]

a) On remarque

$$\forall k \geq 2, A^k = A^2$$

En particulier  $A^4 = A^2$  donc  $X^2 - X = X(X - 1)$  annule  $A^2$ . Ce poly étant scindé simple, la matrice  $A^2$  est diagonalisable.

De plus  $(A^2 - A)^2 = A^4 - 2A^3 + A^2 = O_n$  donc  $A^2 - A$  est nilpotente.

b) On remarque

$$\forall i \geq k, A^i = A^k$$

et donc  $A^{2k} = A^k$  ce qui assure comme au dessus que  $A^k$  est diagonalisable et

$$(A^k - A)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} A^{k(k-i)+i} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} A^k = O_n$$

**Exercice 294 :** [énoncé]

a) Puisque  $H$  est un hyperplan et que  $I_n \notin H$ , on a

$$H \oplus \text{Vect}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Soit  $A$  une matrice nilpotente. On peut l'écrire  $A = B + \lambda I_n$  avec  $B \in H$ . La matrice  $B$  n'étant pas inversible, il existe une colonne  $X$  non nulle telle que  $BX = O$  et alors  $AX = \lambda X$ . Le scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A$ . Or les seules valeurs propres d'une matrice nilpotente sont nulles. On en déduit  $\lambda = 0$  puis  $A = B \in H$ .

b) Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  avec  $i \neq j$  sont nilpotentes car de carrées nulles ; elles sont donc toutes éléments de  $H$  et par combinaison linéaire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à  $H$ . Cependant celle-ci est notoirement inversible.

**Exercice 295 :** [énoncé]

a) Sachant  $MA = O_n$ , on a  $\text{Im}A \subset \ker M$ . Introduisons  $F$  un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\ker M$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . En considérant une matrice de passage  $P$  traduisant un changement de base vers une base adaptée à la supplémentarité

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \ker M \oplus F$$

on obtient les écritures par blocs

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & O \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} O & M_1 \\ O & M_2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_A = \chi_{A_1} \times X^{\dim F} \text{ et } \chi_{A+M} = \chi_{A_1} \chi_{M_2}$$

Or  $M_2$  est une matrice nilpotente complexe, sa seule valeur propre étant 0, on obtient

$$\chi_{M_2} = X^{\dim F}$$

et l'identité voulue est établie.

b) C'est le même raisonnement avec  $\text{Im}M \subset \ker A$  et l'introduction d'un sous-espace vectoriel  $F$  tel que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \ker A \oplus F$$

On a alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ O & O \end{pmatrix}$$

avec  $M_1$  nilpotente.

**Exercice 296 : [énoncé]**

a) Notons qu'il est immédiat de vérifier que  $L_A$  est une forme linéaire sur  $E$ . Par linéarité de la trace, on vérifie  $\text{tr}((\lambda A + \mu B)M) = \lambda \text{tr}(AM) + \mu \text{tr}(BM)$  ce qui fournit la linéarité de l'application  $L$ .

Puisque  $\dim E = \dim E^* < +\infty$ , il suffit désormais de vérifier l'injectivité de  $L$  pour assurer qu'il s'agit d'un isomorphisme. Si  $L_A = 0$  (l'application nulle) alors en particulier  $L_A({}^t\bar{A}) = 0$  et donc  $\text{tr}(A{}^t\bar{A}) = \text{tr}({}^t\bar{A}A) = 0$ .

Or

$$\text{tr}({}^t\bar{A}A) = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2$$

donc  $A = 0$ .

Puisque les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles, on peut assurer que pour tout hyperplan  $H$  de  $E$ , il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \text{tr}(AM) = 0\}$$

b) Pour toute matrice  $M \in T_n^+$ , le produit  $TM$  est triangulaire à coefficients diagonaux nuls donc  $\text{tr}(TM) = 0$ . Ainsi  $T_n^+ \subset H$  puis  $H \cap T_n^+ = T_n^+$ .

Concernant  $H \cap T_n^-$ , ou bien c'est un hyperplan de  $T_n^-$ , ou bien c'est  $T_n^-$  entier. S'il n'y a pas de coefficient non nul dans le bloc supérieur strict de  $T$  alors  $T$  est diagonale et un calcul analogue au précédent donne  $H \cap T_n^- = T_n^-$  (de dimension  $n(n-1)/2$ )

Sinon, on peut déterminer une matrice élémentaire dans  $T_n^-$  qui n'est pas dans  $H$  (si  $[T]_{i,j} \neq 0$  alors  $E_{j,i}$  convient) et donc  $H \cap T_n^-$  est un hyperplan de  $T_n^-$  (de dimension  $n(n-1)/2 - 1$ ).

c) Les matrices triangulaire strictes sont bien connues nilpotentes...

Une base de  $T_n^+$  adjointe à une base de  $H \cap T_n^-$  fournit une famille libre (car  $T_n^+$  et  $T_n^-$  sont en somme directe) et celle-ci est formée d'au moins  $n(n-1)/2 + n(n-1)/2 - 1 = n^2 - n - 1$  éléments.

d) Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \text{tr}(AM) = 0\}$$

La matrice  $A$  est trigonalisable donc on peut écrire  $A = PTP^{-1}$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $T$  triangulaire supérieure non nulle. Posons alors l'isomorphisme  $\varphi : M \rightarrow P^{-1}MP$  et considérons l'hyperplan

$$K = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \text{tr}(TN) = 0\}$$

On constate

$$M \in H \Leftrightarrow \varphi(N) \in K$$

Par l'isomorphisme  $\varphi$ , on transforme une famille de  $n^2 - n - 1$  matrices nilpotentes linéairement indépendantes d'éléments de  $K$  en une famille telle que voulue.

**Exercice 297 : [énoncé]**

Commençons par établir pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$A \neq O_n, AB = BA \text{ et } B \text{ nilpotente} \Rightarrow \text{rg}(AB) < \text{rg}A$$

Supposons donc  $A \neq O_n, AB = BA$  et  $B$  nilpotente.

Par l'absurde, supposons aussi  $\text{rg}(AB) \geq \text{rg}A$ .

Puisque  $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}A, \text{rg}B)$ , on a  $\text{rg}(AB) = \text{rg}A$ .

Par la formule du rang, on obtient

$$\dim \ker(AB) = \dim \ker A$$

Or  $\ker A \subset \ker(BA) = \ker(AB)$  donc  $\ker A = \ker(AB)$ .

Considérons ensuite  $\varphi : \text{Im}A \rightarrow \text{Im}A$  donné par  $\varphi(Y) = BY$ .

L'application  $\varphi$  est linéaire et bien définie car  $\text{Im}A$  est stable par  $B$  puisque  $A$  et  $B$  commutent.

Soit  $Y = AX \in \text{Im}A$

Si  $\varphi(Y) = 0$  alors  $BAX = ABX = 0$  donc  $X \in \ker(AB) = \ker A$  puis  $Y = 0$ .

L'application linéaire  $\varphi$  est donc injective.

Or il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $B^p = O_n$  et donc  $\varphi^p : Y \rightarrow B^pY = O_{n,1}$  est l'application nulle.

Sachant l'espace  $\text{Im}A$  non réduit à  $\{0\}$ , il y a absurdité et ainsi  $\text{rg}(AB) < \text{rg}A$ .

En revenant à l'énoncé initial, on montre alors par récurrence

$$\forall 1 \leq p \leq n, \text{rg}(A_1 A_2 \dots A_p) \leq n - p$$

et en particulier  $\text{rg}(A_1 A_2 \dots A_n) = 0$ .