

Relations binaires

Relations d'équivalence

Exercice 1 [02643] [correction]

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E à la fois réflexive et transitive. On définit les nouvelles relations \mathcal{S} et \mathcal{T} par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ et } x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Les relations \mathcal{S} et \mathcal{T} sont-elles des relations d'équivalences ?

Exercice 2 [02644] [correction]

Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit une relation \mathcal{R} sur $\wp(E)$ par :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence
- Décrire la classe d'équivalence de $X \in \wp(E)$

Exercice 3 [02983] [correction]

On considère sur $\mathcal{F}(E, E)$ la relation binaire \mathcal{R} définie par :

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathfrak{S}(E) \text{ telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in \mathfrak{S}(E)$.

Exercice 4 [02984] [correction]

Soit \mathcal{R} une relation binaire réflexive et transitive. On définit une relation \mathcal{S} par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

Montrer que \mathcal{S} est une relation d'équivalence et que \mathcal{R} permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de \mathcal{S} .

Exercice 5 [02985] [correction]

Soit (G, \times) un groupe et H un sous groupe de (G, \times) . On définit une relation binaire \mathcal{R} sur G par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et en décrire les classes d'équivalence.

Exercice 6 [03243] [correction]

Soit G un groupe multiplicatif de cardinal p^α avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$Z(G) \neq \{1\}$$

Exercice 7 [02357] [correction]

Soit E un ensemble de cardinal n , \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence et $G = \{(x, y) \in E^2 / x\mathcal{R}y\}$ le graphe de \mathcal{R} supposé de cardinal p . Prouver qu'on a $n^2 \leq kp$.

Calculs en congruence

Exercice 8 [01190] [correction]

Montrer que $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 9 [01191] [correction]

Quel est le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 ?

Exercice 10 [01192] [correction]

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 6 \mid 5n^3 + n & \text{b) } 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2} & \text{c) } 5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1} \\ \text{d) } 11 \mid 3^{8n} \times 5^4 + 5^{6n} \times 7^3 & \text{e) } 9 \mid 4^n - 1 - 3n & \text{f) } 15^2 \mid 16^n - 1 - 15n \end{array}$$

Exercice 11 [01193] [correction]

Trouver les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tel que $10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$.

Exercice 12 [03679] [correction]

Montrer que si n est entier impair alors

$$n^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

Exercice 13 [03680] [correction]

Soient $\lambda, a, b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose λ et m premiers entre eux. Montrer

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \lambda a \equiv \lambda b \pmod{m}$$

Exercice 14 [02359] [correction]

Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444} , B celle de A et enfin C celle de B . Que vaut C ?

Exercice 15 [01194] [correction]

Montrer

$$7 \mid x \text{ et } 7 \mid y \Leftrightarrow 7 \mid x^2 + y^2$$

Relations d'ordre

Exercice 16 [01518] [correction]

On définit une relation binaire \preceq sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ par :

$$x \preceq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que \preceq est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 17 [01519] [correction]

Soit \preceq la relation définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$ par

$$(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ ou } y \leq x'$$

Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur E .

Exercice 18 [01520] [correction]

On définit une relation binaire \preceq sur $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) \geq 0\}$ par :

$$z \preceq z' \Leftrightarrow |z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \text{Re}(z) \leq \text{Re}(z'))$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice 19 [01521] [correction]

Soit E l'ensemble des couples (I, f) formé d'un intervalle I et d'une fonction réelle définie sur I .

On définit une relation \preceq sur E par : $(I, f) \preceq (J, g) \Leftrightarrow I \subset J$ et $g|_I = f$.

Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur E .

Exercice 20 [01522] [correction]

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application injective.

On définit sur E une relation binaire \preceq par

$$x \preceq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur E .

Exercice 21 [01523] [correction]

Soient A, B deux parties d'un ensemble E ordonné par \preceq .

On suppose que A et B ont chacun un plus grand élément.

Qu'en est-il de $A \cup B$ lorsque l'ordre est total ? lorsqu'il ne l'est pas ?

Que dire de $A \cap B$?

Exercice 22 [01524] [correction]

Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément.

Montrer que E est fini.

Exercice 23 [01525] [correction]

Soit E un ensemble ordonné par une relation \leq .

Un tableau à n lignes et p colonnes est formé d'éléments $a_{i,j} \in E$ avec i indice de ligne ($1 \leq i \leq n$) et j indice de colonne ($1 \leq j \leq p$).

On note le plus petit élément de chaque colonne et l'on prend le plus grand de ces plus petits :

$$\max_{1 \leq j \leq p} \left(\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \right)$$

On note aussi le plus grand élément de chaque ligne et l'on prend le plus petit de ces plus grands :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j} \right)$$

- Comparer ces deux nombres.
- Donner un exemple de non égalité.

Exercice 24 [02055] [correction]

Montrer qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.

Supremum et infimum**Exercice 25** [02107] [correction]

Soit

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

Montrer que A est bornée, déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 26 [02109] [correction]

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 27 [02108] [correction]

Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} telles que $A \subset B$.

Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.

Exercice 28 [02110] [correction]

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} non vides et majorées.

Montrer que $\sup A$, $\sup B$ et $\sup(A \cup B)$ existent et

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

Exercice 29 [02111] [correction]

Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} .

On forme

$$A + B = \{a + b / (a, b) \in A \times B\}$$

Montrer que $A + B$ est majorée et

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Exercice 30 [02113] [correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$$

Exercice 31 [00225] [correction]

Soit A une partie non vide et minorée de \mathbb{R} . On pose

$$m = \inf A \text{ et } B = A \cap]-\infty, m + 1]$$

Déterminer la borne inférieure de B .

Exercice 32 [02347] [correction]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Etablir

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$$

Exercice 33 [02114] [correction]

Déterminer

$$\inf \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) / x_1, \dots, x_n > 0 \right\}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Les relations \mathcal{S} et \mathcal{T} sont clairement réflexives et symétriques.

Soient $x, y, z \in E$.

Supposons $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$.

On a alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ donc $x\mathcal{R}z$ et aussi $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$ donc $z\mathcal{R}x$ puis $x\mathcal{S}z$.

Le raisonnement n'est plus valable avec \mathcal{T} et on peut présumer que \mathcal{T} ne sera pas une relation d'équivalence.

Prenons pour \mathcal{R} la relation divise définie sur \mathbb{N}^* . On a $2 \mid 6$ et $3 \mid 6$ donc $2\mathcal{T}6$ et $6\mathcal{T}3$ or $2 \not\mathcal{T}3$.

Ici la relation \mathcal{T} n'est pas transitive.

Exercice 2 : [énoncé]

a) La relation étudiée est évidemment réflexive, symétrique et transitive.

b) $Y \in Cl(X) \Leftrightarrow Y \cup A = X \cup A$.

Soit $Y \in Cl(X)$. On a $Y \cup A = X \cup A$

$\forall x \in Y \setminus A$ on a $x \in Y \cup A = X \cup A$ et $x \notin A$ donc $x \in X \setminus A$. Ainsi $Y \setminus A \subset X \setminus A$ et inversement $X \setminus A \subset Y \setminus A$ donc $X \setminus A = Y \setminus A$.

Puisque $Y = (Y \setminus A) \cup (Y \cap A)$ on a $Y = (X \setminus A) \cup B$ avec $B \in \wp(A)$.

Inversement soit $Y = (X \setminus A) \cup B$ avec $B \in \wp(A)$.

On a $Y \cup A = (X \setminus A) \cup (B \cup A) = (X \cap \bar{A}) \cup A = X \cup A$.

Finalement $Cl(X) = \{(X \setminus A) \cup B / B \in \wp(A)\}$.

Exercice 3 : [énoncé]

a) $f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f$ donc $f\mathcal{R}f$.

Si $f\mathcal{R}g$ alors il existe $\varphi \in \mathfrak{S}(E)$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ mais alors

$g \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ f$ donc $g\mathcal{R}f$.

Si $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$ alors il existe $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}(E)$ telles que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ et $g \circ \psi = \psi \circ h$ donc $f \circ \theta = \theta \circ h$ avec $\theta = \varphi \circ \psi \in \mathfrak{S}(E)$. Ainsi $f\mathcal{R}h$.

b)

$$g \in Cl(f) \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathfrak{S}(E), g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

Finalement

$$Cl(f) = \{\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi / \varphi \in \mathfrak{S}(E)\}$$

Exercice 4 : [énoncé]

\mathcal{S} est réflexive, symétrique et transitive sans difficultés.

On définit $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$. La relation \preccurlyeq est bien définie, réflexive transitive.

Si $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y)$ et $Cl(y) \preccurlyeq Cl(x)$ alors $x\mathcal{S}y$ donc $Cl(x) = Cl(y)$.

Exercice 5 : [énoncé]

Soit $x \in G$. On a $x\mathcal{R}x$ car $xx^{-1} = 1 \in H$.

Soient $x, y \in G$. Si $x\mathcal{R}y$ alors $xy^{-1} \in H$ et donc $yx^{-1} \in H$ d'où $y\mathcal{R}x$.

Soient $x, y, z \in G$. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $xy^{-1} \in H$ et $yz^{-1} \in H$ donc $xz^{-1} \in H$ d'où $x\mathcal{R}z$.

Finalement \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Soit $a \in G$.

$$x \in Cl(a) \Leftrightarrow x\mathcal{R}a \Leftrightarrow xa^{-1} \in H$$

donc

$$Cl(a) = Ha = \{ha/h \in H\}$$

Exercice 6 : [énoncé]

Considérons la relation binaire \mathcal{R} sur G définie par

$$y_1\mathcal{R}y_2 \Leftrightarrow \exists x \in G, xy_1 = y_2x$$

Il est immédiat de vérifier que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur G . Les classes d'équivalence de \mathcal{R} forment donc une partition de G ce qui permet d'affirmer que le cardinal de G est la somme des cardinaux des classes d'équivalence de \mathcal{R} .

Une classe d'équivalence d'un élément y est réduite à un singleton si, et seulement si,

$$\forall x \in G, xy = yx$$

i.e.

$$y \in Z(G)$$

En dénombrant G en fonction des classes d'équivalence de \mathcal{R} et en isolant parmi celles-ci celles qui sont réduites à un singleton on a

$$\text{Card}G = \text{Card}Z(G) + N$$

avec N la somme des cardinaux des classes d'équivalence de \mathcal{R} qui ne sont pas réduites à un singleton.

Pour poursuivre, montrons maintenant que le cardinal d'une classe d'équivalence de la relation \mathcal{R} divise le cardinal de G .

Considérons une classe d'équivalence $\{y_1, \dots, y_n\}$ pour la relation \mathcal{R} et notons

$$H_i = \{x \in G / xy_1 = y_1x\}$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, puisque $y_i \mathcal{R} y_i$, il existe $x_i \in G$ tel que

$$x_i y_i = y_i x_i$$

Considérons alors l'application $\varphi : H_1 \rightarrow H_i$ définie par

$$\varphi(x) = x_i x$$

On vérifie que cette application est bien définie et qu'elle est bijective.

On en déduit

$$\text{Card}H_1 = \dots = \text{Card}H_n = m$$

et puisque G est la réunion disjointes des H_1, \dots, H_n

$$\text{Card}G = mn = p^\alpha$$

Ainsi toutes les classes d'équivalences qui ne sont pas réduites à 1 élément ont un cardinal multiple de p et donc $p \mid N$.

Puisque p divise $\text{Card}G = \text{Card}Z(G) + N$, on a

$$p \mid \text{Card}Z(G)$$

Sachant $Z(G) \neq \emptyset$ (car $1 \in Z(G)$) on peut affirmer

$$\text{Card}Z(G) \geq p$$

Exercice 7 : [énoncé]

Notons n_1, \dots, n_k les cardinaux respectifs des k classes d'équivalence de \mathcal{R} . D'une part $n = n_1 + \dots + n_k$, d'autre part $p = n_1^2 + \dots + n_k^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(n_1 + \dots + n_k)^2 \leq k(n_1^2 + \dots + n_k^2)$.

Exercice 8 : [énoncé]

$2^5 = -1$ [11] donc $2^{10} = 1$ [11] puis
 $2^{123} = 2^{120} \times 2^3 = (2^{10})^{12} \times 8 = 1 \times 8 = 8$ [11].
 $3^5 = 1$ [11] donc $3^{121} = 3^{120} \times 3 = (3^5)^{24} \times 3 = 1 \times 3 = 3$ [11].
 Ainsi $2^{123} + 3^{121} = 8 + 3 = 11$ [11] et donc $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 9 : [énoncé]

$1234 = 2$ [7] et $2^3 = 1$ [7] donc $1234^{4321} = 2^{4321} = 2^{4320} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ [7].
 $4321 = 2$ [7] donc $4321^{1234} = 2^{1234} = 2^{1233} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ [7].
 Par suite $1234^{4321} + 4321^{1234} = 2 + 2 = 4$ [7]. Le reste cherché est 4.

Exercice 10 : [énoncé]

a) Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ on a $n^3 = n$ [6] donc $5n^3 + n = 6n = 0$ [6].
 b) $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \cdot (3^2)^n + 4 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n = 0$ [7].
 c) $2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 2 \cdot (2^2)^n + 3 \cdot (3^2)^n = 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 4^n = 5 \cdot 4^n = 0$ [5].
 d) $3^{8n} \times 5^4 + 5^{6n} \times 7^3 = 5^n \times 9 + 5^n \times 2 = 11 \times 5^n = 0$ [11].
 e) $4^n - 1 - 3n = (4 - 1)(1 + 4 + \dots + 4^{n-1}) - 3n = 3(1 + 4 + \dots + 4^{n-1} - n)$
 or $1 + 4 + \dots + 4^{n-1} - n = 1 + \dots + 1 - n = n - n = 0$ [3] donc $9 \mid 4^n - 1 - 3n$.
 f) $16^n - 1 - 15n = (16 - 1)(1 + 16 + \dots + 16^{n-1}) - 15n = 15(1 + 16 + \dots + 16^{n-1} - n)$
 or $1 + 16 + \dots + 16^{n-1} - n = 1 + \dots + 1 - n = n - n = 0$ [15] donc
 $15^2 \mid 16^n - 1 - 15n$.

Exercice 11 : [énoncé]

On a

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$	0	1	8	1	0	5	6	3	6	5

donc $10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2 \Leftrightarrow n = 0$ ou 4 [10].

Exercice 12 : [énoncé]

On peut écrire $n = 2p + 1$ et alors

$$n^2 = (2p + 1)^2 = 4p(p + 1) + 1$$

Puisque l'un des facteurs de $p(p + 1)$ est pair, le produit $4p(p + 1)$ est multiple de 8 et donc

$$4p(p + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{8} \quad [8]$$

Exercice 13 : [énoncé]

(\Rightarrow) Si $a \equiv b \pmod{m}$ alors m divise $b - a$ et divise a fortiori $\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a)$.
 (\Leftarrow) Si $\lambda a \equiv \lambda b \pmod{m}$ alors m divise $\lambda(b - a)$. Or m et λ sont supposés premiers entre eux donc m divise $b - a$.

Exercice 14 : [énoncé]

Posons $x = 4444^{4444}$, $4444 = 7$ [9], $7^3 = 1$ [9] donc $4444^{4444} = 7$ [9].
 $x < 10^{5 \times 4444}$ donc $A \leq 9 \times 5 \times 4444 = 199980$, $B \leq 9 \times 5 + 1 = 46$ puis
 $C \leq 4 + 9 = 13$.
 Or $C = B = A = x$ [9] donc $C = 7$

Exercice 15 : [énoncé]

(\Rightarrow) ok

(\Leftarrow) On observe que :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

 modulo 7.

La seule possibilité pour que $x^2 + y^2 = 0 [7]$ est que $x = y = 0 [7]$.

Exercice 16 : [énoncé]

Soit $x > 0$, on a $x = x^n$ pour $n = 1 \in \mathbb{N}$ donc $x \preceq x$. La relation \preceq est réflexive.

Soient $x, y > 0$, si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^n$ et $x = y^m$.

On a alors $x = x^{nm}$ donc $\ln x = nm \ln x$

Si $x = 1$ alors $y = x^n = 1 = x$.

Si $x \neq 1$ alors $\ln x \neq 0$ puis $1 = nm$. Or $n, m \in \mathbb{N}$ donc $n = m = 1$ puis $x = y$.

Finalement la relation \preceq est antisymétrique.

Soient $x, y, z > 0$. Si $x \preceq y$ et $y \preceq z$ alors $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^n$ et $z = y^m$.

On a $z = x^{mn}$ avec $mn \in \mathbb{N}$ donc $x \preceq z$. La relation \preceq est transitive.

Finalement \preceq est une relation d'ordre.

Cet ordre n'est pas total car, par exemple, 2 et 3 ne sont pas comparables.

Exercice 17 : [énoncé]

\preceq est clairement réflexive et transitive.

Si $(x, y) \preceq (x', y')$ et $(x', y') \preceq (x, y)$ alors $(x, y) = (x', y')$ ou $x \leq y \leq x' \leq y' \leq x$ et donc $(x, y) = (x, x) = (x', y')$.

Exercice 18 : [énoncé]

\preceq est clairement réflexive.

Si $z \preceq z'$ et $z' \preceq z$ alors nécessairement $|z| = |z'|$ et $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ donc $z = z'$ car $\operatorname{Im}(z), \operatorname{Im}(z') \geq 0$.

Si $z \preceq z'$ et $z' \preceq z''$ alors si $|z| < |z''|$ alors $z \preceq z''$ et sinon $|z| = |z'| = |z''|$ et donc $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z') \leq \operatorname{Re}(z'')$ ce qui permet à nouveau d'affirmer $z \preceq z''$.

Pour $z, z' \in \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Si $|z| < |z'|$ alors $z \preceq z'$

Si $|z| > |z'|$ alors $z' \preceq z$.

Si $|z| = |z'|$ alors dans le cas où $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z')$ on a $z \preceq z'$ et, dans le cas complémentaire, on a $z' \preceq z$.

Dans tout les cas z et z' sont comparables, la relation d'ordre est totale.

Exercice 19 : [énoncé]

La relation est clairement réflexive.

Si $(I, f) \preceq (J, g)$ et $(J, g) \preceq (I, f)$ alors $I \subset J$, $J \subset I$ et $g|_I = f$ donc $I = J$ et $f = g$.

Si $(I, f) \preceq (J, g)$ et $(J, g) \preceq (K, h)$ alors $I \subset J \subset K$ et $h|_I = (h|_J)|_I = g|_I = f$ donc $(I, f) \preceq (K, h)$.

Finalement \preceq est une relation d'ordre.

Exercice 20 : [énoncé]

Soit $x \in E$. On a $f(x) \leq f(x)$ donc $x \preceq x$.

Soient $x, y \in E$. Si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$ donc $f(x) = f(y)$. Or f est injective donc $x = y$.

Soient $x, y, z \in E$. Si $x \preceq y$ et $y \preceq z$ alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$ donc $f(x) \leq f(z)$ puis $x \preceq z$.

Finalement, \preceq est une relation d'ordre.

Exercice 21 : [énoncé]

Si l'ordre est total $A \cup B$ possède un plus grand élément :

$\max(A \cup B) = \max(\max(A), \max(B))$.

Si l'ordre n'est pas total, les plus grands éléments de A et de B peuvent ne pas être comparés aux éléments de A et B . Dans $(\mathbb{N}^*, |)$, pour $A = \{2, 4\}$ et $B = \{3, 9\}$, A et B ont un plus grand élément alors que $A \cup B$ n'en a pas.

$A \cap B$ peut ne pas posséder de plus grand élément, cet ensemble peut notamment être vide.

Exercice 22 : [énoncé]

Par l'absurde supposons E infini.

Posons $x_0 = \min E$, $x_1 = \min E \setminus \{x_0\}, \dots$, $x_n = \min E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}, \dots$

L'ensemble $\{x_0, \dots, x_n, \dots\}$ n'a pas de plus grand élément. Absurde.

Exercice 23 : [énoncé]

a) Pour tout $1 \leq m \leq p$,

$$a_{i,m} \leq \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$

donc

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,m} \leq \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$

puis

$$\max_{1 \leq m \leq p} \min_{1 \leq i \leq n} a_{i,m} \leq \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$

b) Pour le tableau $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\max_{1 \leq j \leq 2} \min_{1 \leq i \leq 2} a_{i,j} = 2 \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2} \max_{1 \leq j \leq 2} a_{i,j} = 3$$

Exercice 24 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons que (u_n) soit une telle suite.

$A = \{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} , elle possède donc un plus petit élément m .

Puisque $m \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = u_n$. Mais alors

$u_{n+1} < u_n \leq m = \min A$. Absurde.

Exercice 25 : [énoncé]

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leq 2$ donc A est bornée.

A est une partie de \mathbb{R} non vide et bornée donc $\inf A$ et $\sup A$ existent.

n	0	1	2	3	...
$(-1)^n + \frac{1}{n+1}$	2	$-1 + \frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{3}$	$-1 + \frac{1}{4}$...

2 est plus grand élément de A et donc $\sup A = \max A = 2$.

A est clairement minorée par -1 et $(-1)^{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \rightarrow -1$ donc il existe une suite d'éléments de A qui converge vers -1 donc $\inf A = -1$.

Exercice 26 : [énoncé]

Soit $b \in B$. Puisque

$$\forall a \in A, a \leq b$$

la partie A est majorée par b .

A est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée par b donc $\sup A$ existe et $\sup A \leq b$.

B est une partie de \mathbb{R} non vide et minorée par $\sup A$ donc $\inf B$ existe et $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 27 : [énoncé]

A et B sont des parties non vides et bornées de \mathbb{R} donc les bornes \sup et \inf considérées existent.

Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $a \leq \sup B$. $\sup B$ majore A donc $\sup A \leq \sup B$.

Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $\inf B \leq a$. $\inf B$ minore A donc $\inf B \leq \inf A$.

Enfin, puisque $A \neq \emptyset$, $\inf A \leq \sup A$.

Exercice 28 : [énoncé]

$A, B, A \cup B$ sont des parties de \mathbb{R} non vides et majorées donc $\sup A, \sup B, \sup(A \cup B)$ existent dans \mathbb{R} .

Pour tout $x \in A \cup B$ on a $x \leq \max(\sup A, \sup B)$ donc

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$$

Puisque $A, B \subset A \cup B$ on a $\sup A, \sup B \leq \sup(A \cup B)$ donc

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$$

puis l'égalité.

Exercice 29 : [énoncé]

A et B sont deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} donc $\sup A$ et $\sup B$ existent.

Pour tout $x \in A + B$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

On a $x = a + b \leq \sup A + \sup B$, donc $A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$

$A + B$ est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée donc $\sup A + B$ existe et

$$\sup A + B \leq \sup A + \sup B$$

Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, $a = (a + b) - b \leq \sup(A + B) - b$ donc A est majorée par $\sup(A + B) - b$ d'où

$$\sup A \leq \sup(A + B) - b$$

Par suite

$$b \leq \sup(A + B) - \sup A$$

et B est donc majoré par $\sup(A + B) - \sup A$ et par suite

$$\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$$

Finalement

$$\sup A + \sup B \leq \sup A + B$$

puis l'égalité.

Exercice 30 : [énoncé]

La fonction f_n est dérivable avec

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = nx^{n-1} - (n+1)x^n$$

On en déduit les variations

x	0	x_n	1
$f_n(x)$	0	$\nearrow M_n$	$\searrow 0$

avec $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0, 1]$ et

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)

Puisque $m+1$ ne minore pas A , la partie B est non vide.
De plus $B \subset A$ donc la borne inférieure de B existe et

$$\inf A \leq \inf B$$

Soit $x \in A$, si $x \leq m+1$ alors $x \in B$ et donc $x \geq \inf B$.

Si $x > m+1$ alors à nouveau $x \geq \inf B$.

Ainsi $\inf B$ minore A et donc

$$\inf A \geq \inf B$$

Finalement

$$\inf A = \inf B$$

Exercice 32 : [\[énoncé\]](#)

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq f(x, y_0)$$

donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y_0)$$

puis

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y_0 \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y_0)$$

Exercice 33 : [\[énoncé\]](#)

On exploite

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geq 2$$

pour obtenir

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i}{x_j} \geq n^2$$

Puisque que pour $x_1 = \dots = x_n = 1$ on obtient

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = n^2$$

on peut conclure

$$\inf \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) / x_1, \dots, x_n > 0 \right\} = n^2$$