Séries entières

Calcul de rayon de convergence concret

Exercice 1 [00971] [correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+1}{3^n}z^n \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-n^2}z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2}z^{2n} \quad \text{d) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^n}{n!}z^{3n}$$

Exercice 2 [03054] [correction]
Déterminer le rayon de convergence de :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0}n!z^n \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3n)!}{(n!)^3}z^n \quad \text{d) } \sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)z^n$$

Exercice 3 [00972] [correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0}z^{n^2} \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0}\sin(n)z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n^2}z^n$$

Exercice 4 [03298] [correction]
a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)x^n \text{ et } \sum\sin(\mathrm{e}^{-n})x^n$$

b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

Exercice 5 [03383] [correction]
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0=\alpha,\ a_1=\beta \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 [02842] [correction]
Quel est le rayon de convergence de

$$\sum\pi^{\sqrt{n^2+2n}}x^{2n}\ ?$$

Exercice 7 [02841] [correction]
On note a_n la n-ième décimale de $\sqrt{3}$.
Quel est l'intervalle de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$?

Exercice 8 [02843] [correction]
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\alpha)}{n}x^n\ ?$$

Exercice 9 [00973] [correction]
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}d(n)z^n \text{ et } \sum_{n\geqslant 1}s(n)z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 10 [03483] [correction]
Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$$

a) Démontrer que $R_\alpha\leqslant 1$.
b) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_1=2 \text{ et } \forall n\geqslant 1, u_{n+1}=(u_n)^{u_n}$$

Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 1$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\leqslant\frac{1}{(n+1)^n}$$

En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.
Dans la suite, on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

et on admet que α est irrationnel.
c) Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{C}{u_n^{u_n - 1}}$$

d) Démontrer que $R_\alpha = 0$.
e) Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.
Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Calcul de rayon de convergence abstrait

Exercice 11 [00977] [correction]
Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R.

Exercice 12 [00975] [correction]
On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 13 [00978] [correction]
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 14 [00974] [correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 15 [03310] [correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum a_n^2 z^n$$

Exercice 16 [03309] [correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

Exercice 17 [02523] [correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul.
a) Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $|a_n| \leqslant 1/r^n$ à partir d'un certain rang.
b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?
c) On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{S_n}{n!} z^n$?

Exercice 18 [03484] [correction]
Soit (a_n) une suite de réels tous non nuls.
Quelle relation lie les rayons de convergence des séries entières ci-dessous

$$\sum a_n z^n \text{ et } \sum \frac{1}{a_n} z^n$$

Exercice 19 [00976] [correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.
a) Montrer que $R' \geqslant \max(1, R)$
b) Etablir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
c) Exprimer alors R' en fonction de R.

Exercice 20 [00979] [correction]
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$.
Montrer que le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $R = \min(R_a, R_b)$

Domaine de convergence

Exercice 21 [02855] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer la limite de (I_n).
b) Donner un équivalent de (I_n).
c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$.
Etudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 22 [03016] [correction]
Soit

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\mathrm{d}t$$

a) Calculer $I(p,q)$.
b) La série de terme général $u_n = I(n,n)$ est-elle convergente ou divergente ?
c) Donner le domaine de définition de $\sum u_n x^n$.

Etude de la somme d'une série entière concrète

Exercice 23 [03307] [correction]
Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par

$$\forall n \geqslant 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (-1)^n \ln(n) x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$.
On note S sa somme.
b) Montrer que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}\right)$$

c) En déduire que S admet une limite en 1^- et que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

d) Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule de Wallis

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Exercice 24 [00038] [correction]
a) Etudier la convergence et préciser la limite éventuelle de (a_n) définie par

$$a_{n+1} = \ln(1+a_n) \text{ et } a_0 > 0$$

b) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
c) Etudier la convergence de $(\sum a_n x^n)$ sur le bord de l'intervalle de convergence (on pourra étudier la limite de $1/a_{n+1} - 1/a_n$ et utiliser le théorème de Cesaro)

Exercice 25 [03653] [correction]
Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
b) Etudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
c) Etablir la continuité de f en -1.
d) Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 26 [03890] [correction]
a) Donner l'intervalle de définition I de la fonction s qui au réel x associe

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

b) Quel est le signe de s' sur $I\cap\mathbb{R}^+$?
Quelle est la limite de s en l'extrémité droite de $I\cap\mathbb{R}^+$?
c) Ecrire $(1-x)s'(x)$ sous forme d'une série et en déduire le signe de s' sur I.
d) Etudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)x$$

En déduire que la fonction s est convexe.

Exercice 27 [03201] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
b) Etudier la convergence en $-R$ et en R.
c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
d) Montrer que quand $x \to 1^-$

$$(1-x)f(x) \to 0$$

Exercice 28 [03663] [correction]
On pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ et } s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1$$

Etude de la somme d'une série entière abstraite

Exercice 29 [00980] [correction]
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
a) Exprimer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.
b) Même question avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 30 [00983] [correction]
Soit (a_n) une suite non nulle et T périodique (avec $T \in \mathbb{N}^\star$).
a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
b) Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{nT-1} a_k x^k$. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, une fraction rationnelle en x.

Exercice 31 [00981] [correction]
Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.
b) Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 32 [00982] [correction]
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose

$$S_n \to +\infty \text{ et } a_n/S_n \to 0$$

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

Exercice 33 [00984] [correction]
Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que sur $[0, \alpha]$ on ait $S(x) = 0$.
Montrer que $S = 0$.

Exercice 34 [02854] [correction]
Soit une série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.
a) Montrer que pour $0 < r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leqslant P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 35 [02856] [correction]
Soient $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$ et f une fonction continue de B dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à B° est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\geqslant 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers f sur B.

Comportement en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 36 [03068] [correction]
Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$$

converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
a) Déterminer I.
b) On pose

$$a_1 = -1 \text{ et } a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 2$$

Déterminer le domaine de définition de

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

c) Trouver une relation entre f et g.
d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
e) Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to -1^+$

Exercice 37 [03783] [correction]
Donner un équivalent simple quand $x \to 1^-$ de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$$

Exercice 38 [02844] [correction]
a) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence de

$$\sum (a_n \ln n)x^n \text{ et } \sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)x^n$$

b) Donner un équivalent simple de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 39 [02852] [correction]
Domaine de définition et étude aux bornes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n$$

Exercice 40 [03747] [correction]
a) Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n$$

b) Calculer $f(-1)$ et $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x$ où E est la fonction partie entière.
c) Donner un équivalent de f en $x = 1$

Exercice 41 [02853] [correction]
On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$entière pour x réel.
On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
b) La fonction f est-elle continue en -1 ?
c) Donner un équivalent simple de f en 1^-.

Exercice 42 [00158] [correction]
a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ où la suite (a_n) est définie par

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \text{ et } a_0 > 0$$

b) Etudier la convergence de $\sum a_n x^n$ en $x = -R$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

d) En déduire un équivalent simple de (a_n).

e) Donner un équivalent de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

quand $x \to R^-$.

Exercice 43 [03067] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle bornée et pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

a) Quels sont les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \frac{u_n}{n!} x^n \text{ et } \sum \frac{S_n}{n!} x^n\,?$$

b) On note u et S leurs sommes respectives. Former une relation entre S, S' et u'.
c) On suppose que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)$$

d) Dans cette question, on choisit $u_n = (-1)^n$. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)$$

Exercice 44 [02394] [correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, on définit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0, 1[$
a) Montrer que $\sum a_n$ est une série convergente.
b) Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 45 [03245] [correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$$

Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on suppose que la fonction S est bornée.
a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
b) Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 46 [03246] [correction]
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme

$$x \in \left]-1, 1\right[\mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que la série numérique $\sum a_n$ converge, montrer que la fonction f est définie et continue en 1.

Exercice 47 [03244] [correction]
Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.
On suppose l'existence d'un réel

$$\ell = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

a) Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?
b) Que dire si l'on sait de plus $a_n = o(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Exercice 48 [00985] [correction]
Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$.
On suppose que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est R et que cette série diverge en R.
a) On suppose que $a_n = o(b_n)$. Montrer que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to R^-$.
b) On suppose que $a_n \sim b_n$. Que dire de $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de R ?

Exercice 49 [02452] [correction]
Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$.
On pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$$
a) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
b) Ici $p_n = n^q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 50 [02483] [correction]
Soit $\alpha > -1$.
a) Donner le rayon de convergence R de
$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$$
On désire trouver un équivalent de f_α lorsque $x \to R^-$.
b) On suppose que α est un entier p.
Calculer f_0, f_1. Donner avec un logiciel de calcul formel l'expression de $f_2, \dots, f_5$.
Trouver les équivalents recherchés.
Montrer qu'il existe $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$f_p(x) = \frac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$
(on calculera f_p'). En déduire l'équivalent recherché.
c) On suppose $\alpha > -1$ quelconque.
Donner le développement en série entière de
$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}$$
On notera b_n ses coefficients.
Montrer qu'il existe $A(\alpha) > 0$ tel que $n^\alpha \sim A(\alpha) b_n$. On étudiera la nature de la série de terme général
$$\ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n}$$
En déduire que $f_\alpha(x)$ est équivalente à
$$\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$$
quand x tend vers R^-.

Exercice 51 [03989] [correction]
On pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$
a) Déterminer les rayons de convergence de f et de g.
b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.
d) Montrer que f est continue sur $[-1, 1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.

Fonctions développables en série entière

Exercice 52 [00992] [correction]
Soient $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour laquelle il existe $A, K > 0$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant K n! A^n$$
Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle ouvert centré en 0.

Exercice 53 [03303] [correction]
Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ (avec $R > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, R[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$
Montrer la convergence de la série
$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$
pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 54 [02851] [correction]
Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[, \mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$
a) Si $|x| < r < a$, montrer
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \left| \frac{x}{r} \right|^{n+1} f(r)$$
b) Montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.
c) Montrer que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 55 [00994] [correction]
Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

Exercice 56 [00993] [correction]
[Fonction absolument monotone]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 57 [03358] [correction]
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$$

admet un développement en série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$.

Exercice 58 [03302] [correction]
Etablir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - \text{sh}x}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Exercice 59 [03687] [correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$$

a) Montrer que la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Observer que le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0 est nul.

Exercice 60 [02975] [correction]
Etant donné une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de carré sommable, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n - t}$$

où la variable t est réelle.
a) Préciser le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est identiquement nulle.

Exercice 61 [02506] [correction]
Soit $a \in]-1, 1[$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{1 - |a|}$$

c) Montrer que f est développable en série entière.

Calcul de développement en série entières

Exercice 62 [00987] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$$

Exercice 63 [00988] [correction]
Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$.
Calculer c_n, le n-ième coefficient du développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{(1 - ax)(1 - bx)}$$

Exprimer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n$$

Exercice 64 [00989] [correction]
Pour $t \in]0, \pi[$, former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos t + x^2}$$

Exercice 65 [00990] [correction]
Former le développement en série entière de

$$\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2}$$

pour $|z|<1$ et $t\in\left]0,\pi\right[$.

Exercice 66 [03485] [correction]
Former le développement en série entière de

$$f:x\mapsto\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Exercice 67 [03346] [correction]
[Développement en série entière de la fonction tangente]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par les conditions

$$a_0=1\text{ et }\forall n\geqslant 1,a_n+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!}=0$$

a) Calculer a_1,a_2,a_3.
b) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_nz^n$ est au moins égal à 1.
c) Etablir que pour tout $|z|<R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=\frac{2}{\mathrm{e}^z+1}$$

d) En déduire que pour tout $x\in\left]-R/2,R/2\right[$,

$$\tan x=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}a_{2p+1}2^{2p+1}x^{2p+1}$$

e) Etablir

$$R=\pi$$

Exercice 68 [00995] [correction]
Réaliser le développement en série entière en 0 de $x\mapsto\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 69 [02859] [correction]
a) Montrer, si $t\in\mathbb{R}$:

$$\left|\mathrm{e}^{it}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|t^n|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ soit bornée.
Montrer que $F:x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}f(t)$ est développable en série entière en 0.

Exercice 70 [03761] [correction]
Pour $x\in\left]-1,1\right[$, on pose

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$$

a) Justifier

$$\forall x\in\left]-1,1\right[,f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\left[\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\right]^2x^{2n}$$

b) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x\to 1^-$.

Exercice 71 [03707] [correction]
a) Pour quel réel x, l'intégrale suivante existe-t-elle

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t}\ ?$$

b) Donner alors sa valeur.
c) Montrer que

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t}$$

est développable en série entière et exprimer ce développement.

Exercice 72 [02512] [correction]
a) Quel est le domaine de définition de

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{x+n}$$

pour $a \in \left]-1,1\right[$?
b) Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.
c) Développer en série entière

$$S(x) - \frac{1}{x}$$

Exercice 73 [03878] [correction]
Pour $\alpha \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(\alpha^n x)$$

a) Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Former une relation engageant $S(\alpha x)$ et $S(x)$.
c) Etablir que la fonction S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et exprimer ce développement.

Exercice 74 [03899] [correction]
Soient $a \in \mathbb{C}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$$

Exercice 75 [02605] [correction]
Soit $\alpha \in \left]-1,1\right[$.
a) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite de terme général

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \alpha^k x\right)$$

vers une limite que l'on notera $P(x)$.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x) f(\alpha x)$$

Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) P(x)$$

c) Montrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 76 [02520] [correction]
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right)$$

a) Montrer que $|P_n(z)| \leqslant P_n(-|z|)$.
En déduire que la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indice : on pourra penser à introduire $\ln P_n(-|z|)$.
b) En étudiant la convergence de la série $\sum (P_{n+1}(z) - P_n(z))$, établir la convergence de la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$.
On introduit la fonction

$$f : z \mapsto \lim_{n\to+\infty} P_n(z)$$

c) Montrer que f est continue en 0.
d) Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (1-z) f(z/2) \text{ et } f(0) = 1$$

e) Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 77 [03931] [correction]
[Identité binomiale]
Etablir que pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} x^n$$

Calcul de développement par dérivation intégration

Exercice 78 [00986] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Exercice 79 [02857] [correction]
Développer en série entière

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

Exercice 80 [00078] [correction]
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]0, \pi/2[$.
a) Calculer la partie imaginaire du complexe

$$\frac{\sin \theta \mathrm{e}^{i\theta}}{1 - x \sin \theta \mathrm{e}^{i\theta}}$$

b) En déduire le développement en série entière de

$$f(x) = \arctan\left(x - \frac{1}{\tan \theta}\right)$$

Exercice 81 [02525] [correction]
Montrer que

$$f(x) = \arctan(1 + x)$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer cette série entière.

Exercice 82 [00991] [correction]
Pour $\alpha \in]0, \pi[$, former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x} \tan \frac{\alpha}{2}\right)$$

Exercice 83 [02848] [correction]
Pour $x \in]-1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)$$

Calcul de développement par équation différentielle

Exercice 84 [01013] [correction]
Soient $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
b) Calculer $f(x)$ en étudiant $(1 - x)f'(x)$.

Exercice 85 [00937] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx) \, \mathrm{d}t$$

a) en procédant à une intégration terme à terme.
b) en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

Exercice 86 [02858] [correction]
Développer en série entière $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 87 [01014] [correction]
Soit f définie sur $]-1, 1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - xy = 1$.
c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$.

Exercice 88 [03699] [correction]
a) Quel est l'ensemble de définition de

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ ?}$$

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec pour condition initiale $f(0) = 0$.
c) Trouver ce développement en série entière et en donner le rayon de convergence.

Exercice 89 [01015] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exercice 90 [01017] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$f : x \mapsto \cos(\alpha \arcsin x)$$

a) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.
b) En déduire un développement en série entière de f.

Exercice 91 [01018] [correction]
Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$$

Exercice 92 [03694] [correction]
a) Etudier la parité de

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2} \,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle à déterminer.
c) Justifier que f est développable en série entière et donner ce développement.

Exercice 93 [01019] [correction]
a) Former de deux façons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \,\mathrm{d}t$$

b) En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{(2n+1)}$$

Exercice 94 [03659] [correction]
a) Former une équation différentielle vérifiée par

$$f : x > -1 \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \,\mathrm{d}t$$

b) En déduire le développable en série entière en 0 de f.

Exercice 95 [03301] [correction]
Développer $f(x) = \operatorname{ch}(x)\cos(x)$ en série entière en l'exprimant à l'aide de fonctions exponentielles.
Retrouver le résultat en remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

Exercice 96 [02500] [correction]
Soient $k > 0$ et

$$f(x) = \int_0^1 t^k \sin(xt) \mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) + (k+1)f(x) = \sin x$$

c) Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de $xy' + (k+1)y = \sin x$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 97 [02498] [correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E) : ty' + y = 3t^2 \cos(t^{3/2})$$

a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière sur un voisinage de 0.
b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et en déduire une expression plus simple de v.

Calcul de sommes de séries entières

Exercice 98 [00997] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

a) Déterminer l'intervalle de convergence de f.
b) Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1,1[$
c) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 99 [00996] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n-1}{n!}x^n$$

Exercice 100 [00998] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$$

Exercice 101 [03648] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$$

Exercice 102 [02845] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{3n+2}$$

Exercice 103 [00999] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Exercice 104 [01000] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$$

Exercice 105 [01001] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$

Exercice 106 [02448] [correction]
Pour $n>0$, on pose

$$a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,\mathrm{d}t$$

a) Trouver la limite de (a_n).
b) Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n.
c) On pose

$$u_n(x)=\frac{a_n}{n^\alpha}x^n$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de α.
d) On pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n$$

Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 107 [02449] [correction]
Soit (a_n) la suite définie par

$$a_0=1 \text{ et } a_n=\frac{1}{n!}\int_0^1\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t \text{ pour } n\in\mathbb{N}^\star$$

a) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
b) Somme de $\sum a_n x^n$.

Exercice 108 [02847] [correction]
a) Déterminer le rayon de convergence R de

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^n$$

b) Pour $x\in\,]-R,R[$ calculer la somme précédente.

Exercice 109 [02559] [correction]
a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{(-1)^n} x^n$.
b) Calculer sa somme.

Exercice 110 [03791] [correction]
Etude et expression de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

Exercice 111 [00075] [correction]
Calculer

$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

(on pourra calculer $S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+k}}{(3n+k)!}$ pour $k \in \{0,1,2\}$)

Exercice 112 [02414] [correction]
Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.
a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
b) Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

Exercice 113 [02565] [correction]
Trouver le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)} x^n$$

Calculer la somme dans le bon intervalle.

Exercice 114 [02551] [correction]
Calculer

$$a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n \mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
Calculer la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 115 [02607] [correction]
Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, \mathrm{d}t$$

a) Trouver la limite de la suite (a_n).
b) Donner une relation simple entre a_{n+2} et a_n.
c) On pose $f(x)$ la somme de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Déterminer l'intervalle de définition de f.
d) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 116 [02534] [correction]
On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \cos(n\theta)$$

a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.
b) Montrer que pour tout $\theta \neq k\pi$, la série $\sum \frac{a_n}{n+1}$ converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.
c) Calculer cette intégrale pour $\theta \in]0,\pi[$.

Application à la détermination du terme général d'une suite

Exercice 117 [02850] [correction]
On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!}x^n$.

Exercice 118 [01010] [correction]
a) Former le développement en série entière en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

b) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$$

Exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de ses premiers termes.

Exercice 119 [01011] [correction]
On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k$$

a) Donner une formule permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

b) Calculer $S(x)$.
c) Calculer les a_n.
d) Donner un équivalent de la suite (a_n).

Exercice 120 [02451] [correction]
On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n,0)$, puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!}x^n$$

a) relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.
b) Justifier la définition de f sur $]-1,1[$ puis calculer f.
c) Calculer $N(n,p)$.
d) Etudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 121 [02849] [correction]
Une involution d'un ensemble E est une application $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Pour $n \geqslant 1$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. On convient : $I_0 = 1$.
a) Montrer, si $n \geqslant 2$, que

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

b) Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!}x^n$ converge si $x \in\,]-1,1[$.
On note $S(x)$ sa somme.
c) Montrer, pour $x \in\,]-1,1[$, que

$$S'(x) = (1+x)S(x)$$

d) En déduire une expression de $S(x)$, puis une expression de I_n.

Application à la régulatité d'un prolongement continu

Exercice 122 [01002] [correction]
a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}$

Exercice 123 [03308] [correction]
Pour $x \neq 0$ on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
b) Montrer que ce prolongement est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Application au calcul de sommes

Exercice 124 [01003] [correction]
Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

En déduire les sommes
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 125 [01007] [correction]
a) Développer en série entière en 0 la fonction arcsin et préciser le domaine de convergence.
b) En étudiant
$$\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$
déterminer
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \text{ puis } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

Exercice 126 [01009] [correction]
a) On note γ la constante d'Euler. Etablir l'égalité
$$\gamma=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
b) En déduire que
$$\gamma=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$$

Exercice 127 [02808] [correction]
Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n}$$

Intégration terme à terme de séries entières

Exercice 128 [01004] [correction]
Montrer
$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Exercice 129 [01005] [correction]
Etablir l'identité
$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 130 [01006] [correction]
Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x$$
En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 131 [01008] [correction]
Observer que pour tout $x\in\left]-1,1\right[$,
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\pi(\sqrt{1+x}-1)$$

Exercice 132 [00131] [correction]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
a) Déterminer la limite de la suite de terme général
$$u_n=\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t$$
b) Déterminer la limite de
$$v_n=\int_0^1 n\ln\left(1+t^n\right)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 133 [02865] [correction]
Etudier la limite de la suite de terme général
$$I_n=n\int_0^1\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 134 [02597] [correction]
Montrer que $g:t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $h:t\mapsto g(t)\mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ existe et calculer son intégrale.

Applications variées des séries entières

Exercice 135 [02422] [correction]
a) Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}$$

avec m, n deux entiers non nuls.
b) Déterminer deux polynômes U et V tels que

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1$$

Exercice 136 [03074] [correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

On pose donc, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x > r$, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

Exercice 137 [00707] [correction]
Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme dont la plus petite puissance de x est de degré $\geqslant N + 1$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B^2 = I + A$$

Exercice 138 [03932] [correction]
[Formule de Chu-Vandermonde]
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Etablir

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \to \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.
b) $u_n(z) = z^n \mathrm{e}^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \to 0$ donc $R = +\infty$.
c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \to |z|^2$ donc $R = 1$.
d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^3 \to \mathrm{e}\, |z|^3$ donc $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)|z| \to +\infty$ donc $R = 0$.
b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \to 4|z|$ donc $R = 1/4$.
c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z| \to 27|z|$ donc $R = 1/27$.
d) $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$ or $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$ donc $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$.
Par suite $R = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geqslant 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2}|z|^n\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) On a

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

donc le rayon de convergence de la première série entière vaut 1.
Aussi

$$\sin\left(\mathrm{e}^{-n}\right) \sim \mathrm{e}^{-n}$$

donc le rayon de convergence de la deuxième série entière vaut e.
b) On sait qu'une série entière converge normalement sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence, mais en revanche elle ne converge pas normalement sur ce disque. La série entière $\sum z^n$ est un contre-exemple car

$$R = 1 \text{ et } \|z \mapsto z^n\|_{\infty, D(0,1)} = 1$$

Exercice 5 : [énoncé]
La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son terme général est donné par

$$a_n = \alpha + n(\beta - \alpha)$$

Si $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ alors $R = 1$.
Si $(\alpha, \beta) = (0,0)$ alors $R = +\infty$.

Exercice 6 : [énoncé]
Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$. Après calculs $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \pi x^2$ donc $R = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 7 : [énoncé]
La suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n.
En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend par 0.
On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.
On conclut que l'intervalle cherché est

$$]-1, 1[$$

Exercice 8 : [énoncé]
Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Etudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geqslant 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 9 : [énoncé]
$d(n) \not\to 0$ donc $R_d \leqslant 1$ $d(n) \leqslant n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} nz^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geqslant 1$. On peut conclure $R_d = 1$.
De même, en exploitant $s(n) \not\to 0$ et

$$s(n) \leqslant 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

on a $R_s = 1$.

Exercice 10 : [énoncé]
Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sin(n\pi\alpha) \neq 0$$

a) Puisque

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geqslant 1$$

la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leqslant 1$.
b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geqslant n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n-1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^n}$$

c) On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{K}{u_{n+1}}$$

avec

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}$$

On en déduit

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{K\pi u_n}{u_{n+1}} = \frac{K\pi}{u_n^{u_n-1}}$$

d) Considérons $m = u_n \in \mathbb{N}^\star$. Quand $n \to +\infty$, on a pour $x > 0$

$$\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \to -\infty$$

En effet

$$m\alpha = u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

Or

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n}{u_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{k+1}}{u_k} \in 1 + 2\mathbb{N}$$

et donc

$$-\sin(m\pi\alpha) = \sin\left[\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}\right]$$

d'où

$$0 \leqslant -\sin(m\pi\alpha) \leqslant \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

puis

$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \geqslant C\frac{(xu_n)^{u_n}}{u_n} \to +\infty$$

On en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.
e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^\star$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or

$$qu_n\alpha = qu_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

avec comme vu ci-dessus

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

On en déduit

$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

Or

$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \to 0$$

C'est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]
Par la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ on a déjà $R \geqslant |z_0|$. Si $R > |z_0|$ alors il y a absolue convergence en z_0 ce qui est exclu par hypothèse. On conclut $R = |z_0|$.

Exercice 12 : [énoncé]
Pour $z \neq 0$, on observe que $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \to \ell\,|z|$. Or il est connu que pour $\sum u_n$ série à termes positifs, si $\sqrt[n]{u_n} \to m \in [0,1[$ alors la série converge et si $\sqrt[n]{u_n} \to m > 1$ alors la série diverge (ce résultat s'obtient par comparaison avec une suite géométrique).
Si $\ell = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \to 0$ donc $\sum a_n z^n$ converge en z et donc $R = +\infty$.
Si $\ell \in]0,+\infty[$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ converge tandis que pour $|z| > 1/\ell$, $\sum a_n z^n$ diverge. On en déduit $R = 1/\ell$
Si $\ell = +\infty$ alors $\forall z \in \mathbb{C}^\star$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Exercice 13 : [énoncé]
Posons $b_n = n^\alpha a_n$ et comparons R_a et R_b.
Cas $\alpha = 0$: ok
Cas $\alpha > 0$: on a $a_n = o(b_n)$ et donc

$$R_a \geqslant R_b$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, en considérant, $\rho \in]|z|, R_a[$, on peut écrire

$$b_n z^n = n^\alpha a_n z^n = a_n \rho^n \times n^\alpha \frac{z^n}{\rho^n} = o(a_n \rho^n)$$

Puisque $\sum a_n \rho^n$ converge absolument, la série $\sum b_n z^n$ converge et donc $R_b \geqslant |z|$.
Or ceci pour tout z tel que $|z| < R_a$ donc

$$R_b \geqslant R_a$$

Finalement

$$R_a = R_b$$

Cas $\alpha < 0$: on écrit $a_n = n^{-\alpha} b_n$ et on exploite ce qui précède.

Exercice 14 : [énoncé]
Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Pour $|z| < \sqrt{R}$, $\left|z^2\right| < R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > \sqrt{R}$, $\left|z^2\right| > R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Exercice 15 : [énoncé]
Montrons par double inégalité que le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$ vaut

$$R' = R^2$$

Soit $|z| < R$.
Puisque la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, on a $a_n z^n \to 0$ et donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$.
Or pour $|Z| > R'$, on sait que la suite $(a_n^2 Z^n)$ n'est pas bornée. On en déduit $|z|^2 \leqslant R'$ et donc

$$R \leqslant \sqrt{R'}$$

Soit $|z| < \sqrt{R'}$.
On a $|z|^2 < R'$ et donc $\left|a_n^2 z^{2n}\right| \to 0$ puis $|a_n z^n| \to 0$. On en déduit $|z| \leqslant R$ et donc

$$\sqrt{R'} \leqslant R$$

Exercice 16 : [énoncé]
Soit $r \in]0, R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n = o\left(a_n r^n\right)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

Exercice 17 : [énoncé]
a) Pour $r \in]0, R[$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge donc $a_n r^n \to 0$ et à partir d'un certain rang N, on a
$$|a_n| r^n \leqslant 1$$
b) On a alors
$$\frac{a_n z^n}{n!} = O\left(\frac{z^n}{r^n n!}\right)$$
Posons
$$u_n(z) = \frac{z^n}{r^n n!}$$
Pour $z \neq 0$, on a
$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument. Par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n/n!$ converge aussi absolument. On peut donc la série entière $\sum a_n z^n/n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.
c) On a
$$|S_n| \leqslant \sum_{k=0}^n |a_k| \leqslant \sum_{k=0}^N |a_k| + \frac{n-N}{r^n}$$
et donc $S_n = O(n/r^n)$ puis
$$\frac{S_n z^n}{n!} = O\left(\frac{z^n}{r^n (n-1)!}\right)$$
Comme ci-dessus, la série entière $\sum S_n z^n/n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 18 : [énoncé]
Notons R et R' les deux rayons de convergence de séries entières introduites.
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$.
Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge et donc $a_n z^n \to 0$. On en déduit que
$$\left|\frac{1}{a_n z^n}\right| \to +\infty$$
et donc $|1/z| > R'$ d'où $|z| < 1/R'$. On en déduit $R \leqslant 1/R'$ puis
$$RR' \leqslant 1$$
On ne peut affirmer mieux puisque, pour
$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
on obtient $RR' = 1/2$.

Exercice 19 : [énoncé]
a) On a $|b_n| \leqslant |a_n|$ donc $R' \geqslant R$. On a $|b_n| \leqslant 1$ donc $R' \geqslant 1$
b) Si $R' > 1$ alors $b_n \to 0$ et puisque $|b_n| = \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$ donne $|a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|}$, on obtient $a_n = O(|b_n|)$ donc $R \geqslant R'$.
Par suite $R = R'$ d'où $R' = \max(1, R)$.
c) Si $R' = 1$ alors $1 \geqslant R$ et $R' = \max(1, R)$.

Exercice 20 : [énoncé]
Par sommation de séries entière, on sait déjà $R \geqslant \min(R_a, R_b)$
De plus, puisque $a_n b_n = 0$ on peut affirmer $|a_n| \leqslant |a_n + b_n|$ et donc $R \leqslant R_a$ et de même $R \leqslant R_b$ et donc $R \leqslant \min(R_a, R_b)$ puis $R = \min(R_a, R_b)$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Pour $t > 1$, $\mathrm{e}^{-t^n} \to 0$ avec $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^n} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Par convergence dominée $I_n \to 0$.
b) Par le changement de variable $u = t^n$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,
$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$
Par convergence dominée,
$$\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$
donc
$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$
c) Par l'équivalent précédent $R = 1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en -1.

Exercice 22 : [énoncé]
a) Par intégration par parties
$$I(p,q) = \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1)$$
puis
$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

b)

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge.
c) Par le calcul ci-dessus $R = 4$ donc $]-4,4[\subset \mathcal{D} \subset [-4,4]$.
Par la formule de Stirling :

$$u_n \sim \frac{2\pi n^{2n+1}}{\mathrm{e}^{2n}} \frac{\mathrm{e}^{2n+1}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{(2n+1)}} = \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}}{\sqrt{2n+1}} \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

et

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} = \exp\left((2n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\right) \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

donc

$$u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\sqrt{n}}$$

$4^n u_n \sim \sqrt{\pi}/2\sqrt{n}$ et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 4^n u_n$ diverge.
$4 \notin \mathcal{D}$.
$v_n = (-4)^n u_n$, (v_n) est alternée, $|v_n| \to 0$ et

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$$

donc $(|v_n|)$ est décroissante.
Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum v_n$ converge et donc $-4 \in \mathcal{D}$. Finalement $\mathcal{D} = [-4,4[$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) $R = 1$.
b) Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1}$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
A l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ ce qui assure que sa somme est continue.
On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\right)^2\right)$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+\star}$. Puisque $a_0 > 0$, la suite récurrente (a_n) est bien définie et à termes dans $\mathbb{R}^{+\star}$. Sachant $\ln(1+x) \leqslant x$, on peut affirmer que la suite (a_n) est décroissante. Or elle est minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. En passant la relation $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ à la limite, on obtient $\ell = \ln(1+\ell)$ ce qui entraîne $\ell = 0$ (car $\ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$). Finalement $a_n \to 0^+$.
b) On a alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} \to 1$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
c) Pour $x = -1$, la série numérique

$$\sum a_n (-1)^n$$

converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.
Pour $x = 1$, déterminons la nature de la série numérique $\sum a_n$
On a

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n(a_n + o(a_n))} \to \frac{1}{2}$$

Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right) \to \frac{1}{2}$$

On en déduit

$$a_n \sim \frac{2}{n}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

Exercice 25 : [énoncé]
a) Pour $x \neq 0$, posons $u_n = x^n/\sqrt{n} \neq 0$. On a $|u_{n+1}/u_n| \to |x|$ donc $R = 1$.
b) En $x = 1$, f n'est pas définie car il y a divergence de la série de Riemann $\sum 1/\sqrt{n}$.
En $x = -1$, f est définie car il y a convergence de la série alternée $\sum (-1)^n/\sqrt{n}$ satisfaisant le critère spécial.
c) Posons $u_n(x) = x^n/\sqrt{n}$ pour $x \in [-1, 0]$.
Chaque fonction u_n est continue et la série de fonctions $\sum u_n$converge simplement sur $[-1, 0]$ en vertu du critère spécial des séries alternées. On a de plus

$$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

et il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1, 0]$.
On en déduit que sa somme est continue sur $[-1, 0]$ et donc f est notamment continue en -1.
d) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sqrt{n} \leqslant n$ donc pour tout $x \in [0, 1[$

$$f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$$

Donc f tend vers $+\infty$ en 1^-.

Exercice 26 : [énoncé]
a) s est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
La série diverge en $x = 1$ (par série de Riemann avec $1/2 \leqslant 1$) et converge en $x = -1$ par application du critère spécial des séries alternées. On conclut $I = [-1, 1[$.
b) Puisque s est la somme d'une série entière, on peut dériver terme à terme sur $]-1, 1[$ et

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n$$

Sur $I \cap \mathbb{R}^+$, cette somme est positive. La fonction s est donc croissante sur $[0, 1[$.
Si celle-ci était majorée par un réel M, nous aurions pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$

$$\forall x \in [0, 1[\,, \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leqslant M$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant M$$

Ceci est absurde car la série à termes positifs $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge et ne peut donc avoir ses sommes partielles majorées. La fonction s est donc croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$ en 1^-.
c) Pour $x \in]-1, 1[$

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n - x\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n$$

Pour $x \leqslant 0$, on peut écrire $x = -t$ avec $t \geqslant 0$ et alors

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n$$

avec $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geqslant 0$. On vérifie que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et donc le critère spécial s'applique à la série alternée $\sum (-1)^n a_n t^n$. Sa somme est donc du signe de son premier terme ce qui fournit $(1-x)s'(x) \geqslant 0$. On en déduit

$$\forall x \in]-1, 0]\,, s'(x) \geqslant 0$$

d) Après étude (un peu lourde) du signe de $f''(x)$, on peut affirmer que f est concave et croissante.

Pour $x \in [0,1[$, on a clairement $s''(x) \geqslant 0$. Pour $x \in]-1,0]$, considérons

$$((1-x)s'(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)x^n$$

puis

$$(1-x)\left((1-x)s'(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f(n+1)-f(n)\right)x^n$$

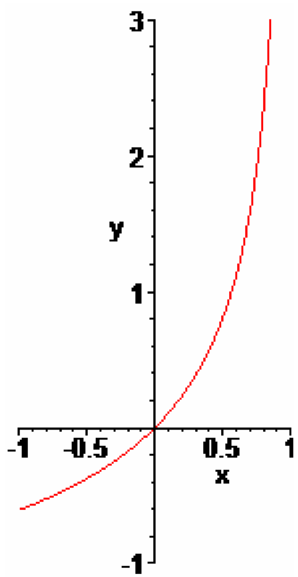
Posons $b_n = f(n+1) - f(n) \geqslant 0$.
On vérifie $b_n \to 0$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$ car la concavité de f fournit

$$\frac{b_n + b_{n+2}}{2} \leqslant b_{n+1}$$

Le critère spécial de série alternée s'applique à nouveau, la somme est du signe de son premier terme et cela fournit

$$(1-x)\left((1-x)s'(x)\right)' \geqslant 0$$

puis $s''(x) \geqslant 0$ car on sait $s'(x) \geqslant 0$.
Finalement s est convexe.



Exercice 27 : [énoncé]
a) Posons

$$a_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Puisque $a_{n+1}/a_n \to 1$, on peut affirmer $R = 1$.
b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternée, la série entière converge en $x = -1$.
Puisque $a_n \sim 1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge en $x = 1$.
c) Par positivité des termes sommés, on a pour $x \in [0,1]$,

$$f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n \xrightarrow[x\to1^-]{} \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Puisque

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant M+1$$

et pour x au voisinage de 1^-

$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n \geqslant M$$

puis

$$f(x) \geqslant M$$

On peut donc affirmer que

$$f(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$$

d) On a

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1}$$

et par décalage d'indice

$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]x^n$$

Puisque

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

la série entière en second membre est définie et continue en 1 par convergence normale de la série de fonctions associée. On en déduit

$$(1-x)f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] = 0$$

Il est aussi possible de procéder par les en ε exploitant

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \varepsilon \text{pour } n \text{ assez grand}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Exercice 28 : [énoncé]
Les rayons de convergences des séries entières définissants c et s sont infinis et on reconnaît

$$\forall x \in \mathbb{R},\ c(x) = \cos x \text{ et } s(x) = \sin x$$

de sorte qu'on a déjà

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x)^2 + s(x)^2 = 1$$

Par opérations sur les séries entières, on sait qu'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ c(z)^2 + s(z)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et l'on peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

Par unicité des coefficients d'un développable en série entière

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = 0$$

donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, c(z)^2 + s(z)^2 = 1$$

Exercice 29 : [énoncé]
a) $\frac{1}{2}\left(f(z) + f(-z)\right) = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n + (-1)^n z^n) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{2p}z^{2p}$.
b) $\frac{1}{3}\left(f(z) + f(jz) + f(j^2z)\right) = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\left(1 + j^n + j^{2n}\right)z^n = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{3p}z^{3p}$.

Exercice 30 : [énoncé]
a) $a_n = O(1)$ donc $R \geqslant 1$. $a_n \not\to 0$ donc $R \leqslant 1$ et ainsi $R = 1$.
b) En réorganisant les termes sommés

$$\sum_{k=0}^{nT-1} a_k x^k = \sum_{k=0}^{T-1}\sum_{p=0}^{n-1} a_{pT+k}x^{pT+k} = \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k \frac{1-x^{nT}}{1-x^T}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x^T}\sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) Notons R le rayon de convergence de g.
Pour $x \in]0, R[$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n x^n$ est absolument convergente donc la série de terme général

$$a_n x^n = S_n x^n - xS_{n-1}x^{n-1}$$

l'est aussi et donc $x \leqslant 1$. Par suite $R \leqslant 1$.
Pour $x \in]0, 1[$,

$$|S_n x^n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\left|x^k\right|$$

or $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ est absolument convergente donc $(S_n x^n)$ est bornée.
Par suite $x \leqslant R$ et donc $1 \leqslant R$. Finalement $R = 1$.
b)

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N+1} S_n x^n - x\sum_{n=1}^{N+1} S_{n-1}x^{n-1} = S_{N+1}x^{N+1} + (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n$$

A la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $f(x) = (1-x)g(x)$ et donc

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

Exercice 32 : [énoncé]
Puisque $S_n \to +\infty$, on a $R_a \leqslant 1$.
Comme $a_n \leqslant S_n$, on a aussi $R_a \geqslant R_s$.
Enfin $S_n/S_{n+1} = 1 - a_{n+1}/S_{n+1} \to 1$ permet par la règle de d'Alembert d'obtenir $R_s = 1$.
On conclut $R_a = R_s = 1$.
Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exercice 33 : [énoncé]
On a $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = 0$ compte tenu de l'hypothèse. On peut conclure que $S = 0$.

Exercice 34 : [énoncé]
a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$. On a

$$\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n} r^n \mathrm{e}^{-in\theta}$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}}\mathrm{e}^{i(2k-n)\theta} r^n$$

Puisque $\sum |a_n r^n|$ et $\sum |\overline{a_n} r^n|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\,|\overline{a_{n-k}}|\, r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}}\mathrm{e}^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$$\int_0^{2\pi}\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}}\mathrm{e}^{i(2k-n)\theta} r^n\,\mathrm{d}\theta$$

Or $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^\star$ donc, après simplification des termes nuls,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta = \sum_{m=0}^{+\infty}|a_m|^2 r^{2m}$$

b) Pour $0 < r < R$ suffisamment petit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\, r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 - |f(0)|^2\,\mathrm{d}\theta$$

Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} \leqslant 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = 0$$

La fonction f est alors constante.
c) Posons

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

Pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}) - f_N(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta$$

Pour $p \geqslant N+1$, on obtient

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}) - f_N(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}}\,\mathrm{d}\theta$$

Or

$$0 \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}) - f_N(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi\frac{(P(r))^2 + \left(\sum\limits_{n=0}^{N}|a_n|\, r^n\right)^2}{r^{2p}} = \frac{O(r^{2N})}{r^{2p}}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}) - f_N(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

Pour $p = N+1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n}}{r^{2p}} = |a_{N+1}|^2 + \sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0 \leqslant \sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2(n-N-1)} \leqslant \frac{1}{r^2}\sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

On en déduit $a_{N+1} = 0$ puis, en reprenant la démarche avec $p = N+2, \ldots$, on obtient successivement $a_{N+2} = 0, \ldots$ et finalement $f = f_N \in \mathbb{C}_N[X]$

Exercice 35 : [énoncé]
Notons $\sum a_n z^n$ la série entière dont la somme est égale à f sur B°.
La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall z, z' \in B, |z - z'| \leqslant \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| \leqslant \varepsilon$$

Considérons alors $r = 1 - \delta$ et $g_r : z \mapsto f(rz)$.
Pour tout $z \in B$, $|z - rz| = \delta\,|z| \leqslant \delta$ donc $|f(z) - g(z)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\|f - g\|_{\infty,B} \leqslant \varepsilon$
Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans B°, la série entière $\sum a_n r^n z^n$ converge uniformément vers g sur B. Il existe donc un polynôme P vérifiant $\|P - g\|_{\infty,B} \leqslant \varepsilon$ puis $\|f - P\|_{\infty,B} \leqslant 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Exercice 36 : [énoncé]
a) $\alpha_n = \ln n \neq 0$ pour $n \geqslant 2$.
$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \to 1$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln(n) x^n$ vaut 1.
De plus, la série entière est grossièrement divergente en 1 et -1.
On en déduit $I =]-1, 1[$.
b) $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$ donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
De plus, la série entière est absolument convergente en 1 et -1.
La fonction g est donc définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.
c) Pour $n \geqslant 2$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ donc

$$a_n x^n = \ln(n) x^n - \ln(n-1) x^n - \frac{1}{n} x^n$$

En sommant pour n allant de 2 à $+\infty$,

$$g(x) = (1 - x) f(x) + \ln(1 - x)$$

d) Puisque $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum |a_n|$ est convergente et donc la fonction g est définie et continue sur le segment $[-1, 1]$. Par suite, la fonction g converge en 1^- et puisque le terme $\ln(1 - x)$ diverge quand $x \to 1^-$, on obtient

$$f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

e) Puisque

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$$

on obtient quand $x \to -1^+$,

$$f(x) \to \frac{g(-1) - \ln(2)}{2}$$

Il reste à calculer $g(-1)$...

$$g(-1) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Or

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

et en regroupant les termes pairs et impairs consécutifs

$$\sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) = \sum_{p=1}^{N} 2 \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) - \ln(2N+1) = \ln \frac{2^{4N} (N!)^4}{(2N+1)!(2N)!} \to \ln \frac{\pi}{2}$$

en vertu de la formule de Stirling.
Finalement

$$g(-1) = \ln \frac{\pi}{2} + \ln(2)$$

On en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x \to -1^+]{} \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$$

Exercice 37 : [énoncé]
Commençons par noter que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et est donc définie sur $]-1, 1[$. Pour $x \in [0, 1[$, la fonction $t \mapsto x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln x}$ est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} x^{t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant x^{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} x^{t^2} \,\mathrm{d}t$$

En sommant

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} \,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x} \,\mathrm{d}t \text{ avec } \ln x < 0$$

Posons le changement de variable $u = t\sqrt{|\ln x|}$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Or $\ln x \sim x - 1$ quand $x \to 1$ donc

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{1-x}}$$

Exercice 38 : [énoncé]
a) On sait que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence R (notamment car une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence). Puisque $a_n = o(a_n \ln n)$ et $a_n \ln n = o(n a_n)$ on peut affirmer par encadrement que la série entière $\sum (a_n \ln n) x^n$ a aussi pour rayon de convergence R. De plus

$$a_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim a_n \ln n$$

donc la série entière $\sum \left(a_n \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n$ a encore pour rayon de convergence R.
b) Notons que $\sum \ln n\, x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. On sait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc le terme générale

$$\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

est borné par un certain M.
Par suite

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} M x^n = \frac{Mx}{1-x} = O\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x \to 1^-$.
Or par produit de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Exercice 39 : [énoncé]
$R = 1$, il y a divergence en $x = 1$ et convergence par le CSSA en $x = -1$.
La fonction somme est définie sur $[-1, 1[$.
Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1, 0]$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) x^k\right\|_{\infty,[-1,0]} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \to 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[-1, 0]$ et donc continuité de la somme en -1 puis finalement sur $[-1, 1[$.
Pour étudier la fonction en 1^-, on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

On en déduit pour $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\text{et} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Exercice 40 : [énoncé]
a) f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Puisque $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, la série n'est pas définie pour $x = 1$. En revanche, on vérifie aisément la convergence de la série en $x = -1$ en vertu du critère spécial des séries alternées. Finalement f est définie sur $[-1, 1[$.

b) Calculons la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) = \ln\left(\frac{(2N+1)\left[(2N)!\right]^2}{\left[2^N N!\right]^4}\right)$$

Par la formule de Stirling

$$f(1) = \ln\frac{2}{\pi}$$

Par le changement de variable $u = 1/x$ $\mathcal{C}^1$ bijectif, on ne modifie par la nature de l'intégrale et on a

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Puisque

$$\left|\int_{E(x)}^{x} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{E(x)}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{u} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

la nature de l'intégrale et sa valeur sont données par la limite de

$$\int_1^{n+1} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^k}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

On peut conclure

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{2}{\pi}$$

c) On peut écrire

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_n x^n$$

D'une part

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$$

et d'autre part

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n| < +\infty$$

On peut donc conclure

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Exercice 41 : [énoncé]

Notons que l'intégrale définissant a_n converge car $|\mathrm{th}t| \leqslant 1$.

a) Pour $t \geqslant n$,

$$\frac{\mathrm{th}n}{t^2} \leqslant \frac{\mathrm{th}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

En intégrant et en exploitant $\mathrm{th}n \to 1$, on obtient $a_n \sim \frac{1}{n}$.

On en déduit que $R = 1$. Pour $x = -1$, $\sum a_n x^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.

Pour $x = 1$, $\sum a_n x^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1, 1[$.

b) Pour $x \in [-1, 0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_n x^n$ et affirmer

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant a_{n+1} |x|^{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en -1.

c) On a

$$\left|a_n - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1-\mathrm{th}n}{n}$$

donc pour $x \in [0, 1[$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\mathrm{th}n}{n} x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \to +\infty \text{ et } n^2 \frac{1-\mathrm{th}n}{n} \sim 2n\mathrm{e}^{-2n} \to 0$$

donc $\sum \frac{1-\mathrm{th}n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum \frac{1-\mathrm{th}n}{n} x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Exercice 42 : [énoncé]

a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+\star}$. Puisque $a_0 > 0$, la suite récurrente (a_n) est bien définie et à termes dans $\mathbb{R}^{+\star}$. Sachant $\ln(1+x) \leqslant x$, on peut affirmer que la suite (a_n) est décroissante. Or elle est

minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. En passant la relation $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ à la limite, on obtient $\ell = \ln(1+\ell)$ ce qui entraîne $\ell = 0$ (car $\ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$). Ainsi $a_n \to 0^+$.
On a alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} \to 1$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
b) Pour $x = -1$, la série numérique

$$\sum a_n(-1)^n$$

converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.
c)

$$u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n(a_n + o(a_n))} \to \frac{1}{2}$$

d) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right) \to \frac{1}{2}$$

On en déduit

$$a_n \sim \frac{2}{n}$$

e) On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}x^n$$

avec $\varepsilon_n \to 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On a alors

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1}\frac{\varepsilon_n}{n}x^n + \varepsilon\left|\ln(1-x)\right|$$

puis pour x suffisamment proche de 1

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}x^n\right| \leqslant 2\varepsilon\left|\ln(1-x)\right|$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim -2\ln(1-x)$$

Exercice 43 : [énoncé]

a) donc . Or la série entière exponentielle est de rayon de convergence . On en déduit que la série entière est aussi de rayon de convergence . Puisque , et donc . Comme ci-dessus, on peut conclure que est de rayon de convergence . b) Pour , donc
c) Pour tout ,
Soit , il existe tel que pour tout , . On a alors, pour
Or
et
donc pour assez grand
Ainsi . d) Si alors
Par suite
et donc

Exercice 44 : [énoncé]
a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [0,1[$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant S(x) \leqslant M$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant M$$

La séries à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.
b) La fonction S est croissante sur $[0,1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0,1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$$

Inversement, pour tout $x\in[0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x\to 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 45 : [énoncé]
a) Soit $M\in\mathbb{R}$ tel que $S(x)\leqslant M$ pour tout $x\in[0,1[$.
Soit $N\in\mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant S(x) \leqslant M$$

En passant à la limite quand $x\to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant M$$

La séries à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.
b) La fonction S est croissante sur $[0,1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x\to 1^-} S(x)$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0,1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \lim_{x\to 1^-} S(x)$$

Inversement, pour tout $x\in[0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x\to 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 46 : [énoncé]
La fonction f est évidemment définie en 1. Pour étudier sa continuité, introduisons

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

On peut écrire pour $x\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$

$$f(x)-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k-1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (R_{k-1}-R_k)x^k$$

Puisque $|x|<1$ et $R_n\to 0$, on peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{k-1}x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k$$

avec convergence des deux sommes introduites.
Par décalage d'indice, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k(x-1) + R_n x^{n+1}$$

et ainsi

$$f(x)-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k-1) + (x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1}-1)$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $R_n \to 0$, pour n assez grand on a

$$\forall k \geqslant n, |R_k| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\left|(x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k\right| \leqslant (1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon x^k \leqslant \varepsilon$$

Pour un tel n fixé, on a quand $x \to 1^-$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k-1) \to 0 \text{ et } R_n(x^{n+1}-1) \to 0$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k-1)\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|R_n(x^{n+1}-1)\right| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leqslant 3\varepsilon$$

Exercice 47 : [énoncé]
a) Pour $a_n = (-1)^n$, on a $f(x) = 1/(1+x)$, $\ell = 1/2$ et la série $\sum a_n$ diverge.
b) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A_N + B_N - C_N$$

avec

$$A_N = f(x) - \ell,\ B_N = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ et } C_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 au-delà duquel

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

et alors pour tout $N \geqslant n_0$

$$|C_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

Posons alors

$$x = 1 - \frac{1}{N}$$

et on a

$$|C_N| \leqslant \varepsilon$$

D'autre part

$$|B_N| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n)\right| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} n a_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n a_n$$

En vertu du théorème de Cesaro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n a_n \to 0$$

et donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geqslant n_1$

$$|B_N| \leqslant \varepsilon$$

Enfin, puis f tend vers ℓ en 1^-, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geqslant n_2$

$$A_N = |f(1-1/N) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Finalement, pour $N \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right| \leqslant 3\varepsilon$$

On peut donc affirmer que la série $\sum a_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$$

Exercice 48 : [énoncé]
a) On peut écrire $a_n = b_n\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ et alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \varepsilon_n x^n$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$. On peut alors écrire

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} b_n \varepsilon_n x^n\right| \leqslant \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \varepsilon g(x)$$

puis

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x) + \left|\sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n\right|$$

Quand $x \to R^-$,

$$g(x) \to +\infty \text{ et } \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n x^n \to \sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n R^n = C^{te}$$

donc pour x assez proche de R

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} b_n\varepsilon_n R^n\right| \leqslant \varepsilon g(x)$$

puis

$$|f(x)| \leqslant 2\varepsilon g(x)$$

Cela permet de conclure que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to R$.
b) Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n = b_n + o(b_n)$ donc $f(x) = g(x) + o(g(x)) \sim g(x)$ en vertu de a).

Exercice 49 : [énoncé]
a) Notons a_n le coefficient générale de la série entière étudiée $a_m = 1$ s'il existe n tel que $m = p_n$ et $a_m = 0$ sinon. On observe$a_n = O(1)$ donc $R \geqslant 1$ et $a_n \not\to 0$ donc $R \leqslant 1$ puis $R = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $n \leqslant \varepsilon p_n$. On a alors :

$$0 \leqslant (1-x)f(x) \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon}$$

Quand $x \to 1^-$,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} \to 0$$

et

$$(1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon} \leqslant \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} \to \varepsilon$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$0 \leqslant (1-x)f(x) \leqslant 2\varepsilon$$

Cela permet d'affirmer $(1-x)f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$.
b) Ici, il faut penser à une comparaison série-intégrale...
Pour $x \in \,]0,1[$, la fonction $t \mapsto x^{t^q}$ est décroissante. Par la démarche classique, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^q \ln x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^q t^q}\,\mathrm{d}t$$

avec $a = \sqrt[q]{-\ln x}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

et on ne calculera pas cette dernière intégrale.
Par l'encadrement qui précède, on peut affirmer

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[q]{1-x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

sachant $\ln x \sim x - 1$

Exercice 50 : [énoncé]
a) $R = 1$.
b) $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
On obtient les expressions de $f_2, \dots, f_5$ par

```
seq(normal(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)), k=2..5);
```

On peut présumer un équivalent de la forme $\frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}}$.
On peut obtenir les premières valeurs de C_α par

```
seq(eval(simplify(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)*(1-x)^(k+1)), x=1),
k=0..5);
```

Cela laisse présumer $C_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\alpha!$.
Pour $x \in \,]-1,1[$, $f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1}x^{n-1}$ donc $xf_p'(x) = f_{p+1}(x)$.
En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite (Q_p) de polynômes de sorte que
$Q_0 = X$ et $Q_{p+1}(X) = X(1-X)Q_p'(X) + (p+1)XQ_p(X)$.
On observe $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$ de sorte que $Q_p(1) = p!$.
On peut alors affirmer $f_p(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{1+p}}$.
c) A partir du développement connu de$(1+u)^\alpha$, on obtient $b_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}$.

$\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}}-\ln\frac{n^\alpha}{b_n}=\alpha\ln\frac{n+1}{n}-\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}}-\ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ est absolument convergente.
On en déduit que la suite de terme général $\ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ converge puis que $\frac{n^\alpha}{b_n}$ tend vers une constante $A(\alpha)>0$.
On peut alors conclure en exploitant le résultat suivant :
$a_n\sim b_n$ avec $a_n>0$, $R=1$ et $\sum a_n$ diverge entraine $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\underset{x\to1^-}{\sim}\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.
Pour établir ce résultat :
- d'une part, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\xrightarrow[x\to1^-]{}+\infty$,
- d'autre part, on écrit $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{N}|a_n-b_n|+\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ en choisissant N de sorte que $|a_n-b_n|\leqslant\varepsilon a_n$ pour $n\geqslant N$.
On peut alors conclure que $f_\alpha(x)\sim\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

Exercice 51 : [énoncé]
a) Par application de la règles de d'Alembert, les rayons de convergence de séries entières définissant f et g sont égaux à 1.
b) g est assurément définie et continue sur $]-1,1[$ en tant que somme de série entière.
La série entière définissant g converge aussi sur $[-1,0]$ par application du critère spécial et

$$\forall x\in[-1,0]\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)x^k\right|\leqslant-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

Il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions continues définissant g sur $[-1,0]$.
Ainsi g est définie et continue sur $[-1,1[$.
On peut aussi souligner que g n'est pas définie en 1 car

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)1^n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{n}$$

c) Pour $x\in\,]-1,1[$,

$$(1-x)f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\ln n-\ln(n-1)\right)x^n=-g(x)$$

c) On peut prolonger f par continuité en -1 via

$$f(x)=-\frac{g(x)}{1-x}\xrightarrow[x\to-1]{}-\frac{g(-1)}{2}$$

Cependant la somme définissant f n'est pas, à proprement parler, définie en -1.
On a

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc pour $x\in\,]-1,1[$

$$g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}-\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n$$

et donc

$$g(x)=\ln(1-x)+1-\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n$$

Le terme sommatoire définit une fonction continue sur $[-1,1]$ (par convergence normale) et donc

$$g(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\ln(1-x)$$

puis

$$f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Exercice 52 : [énoncé]
Par la formule de Taylor avec reste-intégrale

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty\leqslant K\,|xA|^{n+1}$$

Posons $r=\min\{a,1/A\}>0$. Pour $|x|<r$, on a

$$\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\infty]{}0$$

car $|xA|<1$ et donc $|xA|^{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$$

et on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

La fonction f est donc égale à la somme d'une série entière sur $]-r, r[$.

Exercice 53 : [énoncé]
Pour $x \in [0, R[$, la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ est une série à termes positifs. Par la formule de Taylor reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et puisque le reste intégrale est positif, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leqslant f(x)$$

Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ est convergente.
Pour $x \in]-R, 0]$, on a

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} |x|^n$$

et la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 54 : [énoncé]
a) Par la formule de Taylor avec reste intégrale

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $t = xu$, on obtient

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

Puisque $x \leqslant |x| \leqslant r$, on a $xu \leqslant ru$ puis $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(ru)$ car $f^{(n+1)}$ est croissante puisque de dérivée $f^{(n+2)} \geqslant 0$.

On en déduit

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} \left| f(r) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k \right|$$

Or la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k$ est à termes positifs et est majorée par $f(r)$ en vertu de la formule de Taylor initiale. On a donc

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \left| \frac{x}{r} \right|^{n+1} f(r)$$

b) Puisque $|x/r| < 1$, la majoration précédente donne

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

Ainsi f est développable en série entière sur $]-a, a[$ car égale à la somme de sa série de Taylor sur $]-a, a[$.
c) Posons $f(x) = \tan x$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que

$$f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$$

avec P_n un polynôme dont la parité est celle de $n+1$ car on a la relation de récurrence

$$P_{n+1}(X) = (1 + X^2) P_n'$$

On en déduit alors que $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, \pi/2[$.
En reprenant l'étude qui précède, on obtient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour tout $x \in [0, \pi/2[$.
Par imparité de f, $f^{(2p)}(0) = 0$ et par imparité de f, on a la relation

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 55 : [énoncé]
Pour tout $x \in]-a, a[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons
$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
Par le changement de variable $t = xu$, on peut écrire
$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$
Choisissons y tel que $|x| < y < a$. Puisque $f^{(n+1)}$ est croissante, on a
$$\forall u \in [0,1]\,, f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(yu)$$
et donc
$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u \leqslant |x/y|^{n+1} R_n(y)$$
De plus $R_n(y) \leqslant f(y)$ car les termes de la somme partielle de Taylor en y sont tous positifs et donc
$$|R_n(x)| \leqslant |x/y|^{n+1} f(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Finalement f est aussi égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $]-a, a[$.

Exercice 56 : [énoncé]
Pour tout a et $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
Pour $x \geqslant a$, la série numérique de terme général $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est une série majorée par $f(x)$ et à termes positifs, elle est donc convergente ce qui assure
$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$$
Pour $x \leqslant 0$,
$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(0)\,\mathrm{d}t = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$
en exploitant la remarque initiale avec 0 et $-x$ pour a et x.

Pour $x \geqslant 0$,
$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \to 0$$
en exploitant la remarque initiale avec x et $2x$ pour a et x.
Finalement f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 57 : [énoncé]
On a
$$(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$$
donc pour $x \in \left]-1,1\right[$,
$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x}} = (1-x^3)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$$
est développable en série entière sur $\left]-1,1\right[$ par produit de fonctions qui le sont.

Exercice 58 : [énoncé]
Posons
$$f(x) = \frac{1}{1-\mathrm{sh}x}$$
La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, R[$ avec $R = \mathrm{argsh}1$.
Soit $x \in]-R, R[$. Puisque $|\mathrm{sh}x| < 1$, on peut écrire
$$f(x) = \frac{1}{1-\mathrm{sh}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sh}^n x$$
Chacune des fonctions $x \mapsto \mathrm{sh}^n x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'écrire
$$\mathrm{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k$$
Puisque les coefficients du développement en série entière de la fonction sh sont tous positifs, on a aussi $a_{n,k} \geqslant 0$ pour tout n, k. Pour $x \in]-R, R[$, on peut donc écrire
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k\right)$$

Puisque la série $\sum_{k\geqslant n} \left|a_{n,k}x^k\right| = \sum_{k\geqslant n} a_{n,k}\left|x\right|^k$ converge et puisque la série $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=n}^{+\infty}\left|a_{n,k}x^k\right| = \sum_{n\geqslant 0}(\operatorname{sh}\left|x\right|)^n$ converge aussi, on peut par le théorème de Fubini échanger les deux sommes ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_{n,k}\right)x^k$$

Ainsi la fonction f est développable en série entière sur $]-R,R[$. Le rayon de convergence de la série entière ainsi introduite est alors au moins égale à R et en fait exactement égal à R car f diverge vers $+\infty$ en R^- et ne peut donc être prolongée par continuité en R.

Exercice 59 : [énoncé]
a) Posons

$$u_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{\cos(2^n x)}{n!}$$

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{2^{nk}}{n!}$$

Puisque le majorant est le terme général de la série exponentielle en 2^k, il est sommable et il y a donc convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$.
On en déduit que la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Par l'étude qui précède

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0)$$

Si k est impair, $u_n^{(k)}(x)$ s'exprime en fonction de $\sin(2^n x)$ et donc $u_n^{(k)}(0) = 0$ puis $f^{(k)}(0) = 0$.
Si k est pair, on peut écrire $k = 2p$ et alors

$$u_n^{(2p)}(x) = (-1)^p 2^{2np}\frac{\cos(2^n x)}{n!}$$

puis

$$f^{(2p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{2^{2np}}{n!} = (-1)^p\mathrm{e}^{2^{2p}}$$

La série de Taylor de f en 0 est alors

$$\sum (-1)^p\frac{\mathrm{e}^{2^{2p}}}{(2p)!}x^{2p}$$

Pour $x\neq 0$, posons

$$u_p(x) = (-1)^p\frac{\mathrm{e}^{2^{2p}}}{(2p)!}x^{2p}\neq 0$$

On a

$$\left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \frac{\mathrm{e}^{3.2^{2p}}x^2}{(2p+1)(2p+2)}\to+\infty$$

Le rayon de convergence de la série de Taylor étudiée est donc nul.

Exercice 60 : [énoncé]
a) Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^\star$,

$$\left|\frac{a_n}{n-t}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{(n-t)^2}\right)$$

donc $\sum\frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^\star$.
b) Pour $|t|<1$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}\frac{1}{1-t/n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{a_n t^m}{n^{m+1}}$$

Puisque la série $\sum_{m\geqslant 0}\frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}$ converge pour tout $n\geqslant 1$ et puisque

$$\sum_{n\geqslant 1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n-|t|}$$

converge, peut appliquer le théorème de Fubini pour intervertir les deux sommes.

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{m+1}}\right)t^m$$

La fonction f apparaît alors comme développable en série entière sur $]-1,1[$.
c) Si $f(t) = 0$ sur $[-1/2,1/2]$ alors le développement en série entière de f sur $]-1,1[$ est nul et on en déduit que f est nulle sur $]-1,1[$.
Or

$$f(t) = \frac{a_1}{1-t}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{n-t}$$

avec $t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ définie et continue au voisinage de 1. On en déduit que $a_1 = 0$.
On peut alors reprendre l'étude du b) et, sachant $a_1 = 0$, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $]-2,2[$. Or ce dernier développement étant nul, on obtient comme ci-dessus $a_2 = 0$ etc.
Au final, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est nulle.

Exercice 61 : [énoncé]
a) $|\sin(a^n x)| \leqslant |x|\,|a^n|$, il y a donc convergence absolue de la série définissant $f(x)$.
b) $f_n : x \mapsto \sin(a^n x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant |a|^{nk}$ terme général d'une série absolument convergente donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{nk} = \frac{1}{1-|a|^k} \leqslant \frac{1}{1-|a|}$$

c) Par la formule de Taylor-Laplace,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1-|a|}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

Ainsi la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ vers f et donc f est développable en série entière.

Exercice 62 : [énoncé]
On peut écrire

$$\ln(1-x^3) = \ln(1-x) + \ln(1+x+x^2)$$

donc sur $]-1,1[$,

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ si } n \neq 0 \quad [3] \text{ et } a_{3n} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{3n} = -\frac{2}{3n}$$

Exercice 63 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{a/(a-b)}{1-ax} + \frac{b/(b-a)}{1-bx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}x^n$$

avec $R = \min(1/a, 1/b)$.
On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2}\sum_{n=0}^{+\infty} (b^{2n+2} - 2a^{n+1}b^{n+1} + a^{2n+2})x^n$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^n = \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{b^2}{1-b^2x} - \frac{2ab}{1-abx} + \frac{a^2}{1-a^2x}\right) = \frac{1+abx}{(1-a^2x)(1-abx)(1-b^2x)}$$

Exercice 64 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos t + x^2} = -1 + \frac{1}{1-x\mathrm{e}^{it}} + \frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-it}}$$

Sachant

$$\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{int}x^n \text{ pour } |x| < 1$$

on obtient

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos t + x^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt)x^n$$

pour tout $x \in]-1,1[$.

Exercice 65 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t + z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(\mathrm{e}^{it}z)} + \frac{1}{1-(\mathrm{e}^{-it}z)}\right)$$

donc

$$\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t + z^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{int} + \mathrm{e}^{-int})z^n$$

puis

$$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) z^n$$

Exercice 66 : [énoncé]
La fonction f est définie sur $]-1,1[$ et

$$f(x) = \frac{(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+u)^\alpha$$

avec $u = -x^2 \in]-1,1[$ et $\alpha = -1/2$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (x^{2n} + x^{2n+1})$$

Exercice 67 : [énoncé]
a) $2a_1 + a_0 = 0$ donne $a_1 = -1/2$.
$2a_2 + a_1 + a_0/2 = 0$ donne $a_2 = 0$.
$2a_3 + a_2 + a_1/2 + a_0/6 = 0$ donne $a_3 = 1/24$.
b) Par récurrence, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant 1$$

en exploitant

$$2a_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$$

qui donne

$$2|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \mathrm{e} - 1 \leqslant 2$$

On en déduit que le rayon de convergence R est au moins égal à 1.

c) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$(1 + \mathrm{e}^z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \right) z^n = 1$$

d) Pour $x \in]-R/2, R/2[$, on a $|2ix| < R$ et

$$\tan x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{i(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})} = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2ix} + 1}\right) = -\frac{1}{i}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2ix)^n$$

Puisque la fonction tan est à valeur réelles, on peut affirmer

$$\forall p \in \mathbb{N}^\star, a_{2p} = 0$$

et donc

$$\tan x = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1}$$

e) Puisque la fonction tangente ne peut être prolongée par continuité en $\pi/2$, on a assurément $R \leqslant \pi$.
Par récurrence, on montre que les dérivées successives de la fonction tangente sont des polynômes à coefficients positifs de la fonction tangente. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[\,, (\tan)^{(n)}(x) \geqslant 0$$

Les coefficients du développement en série entière de la fonction tangente sont ceux de sa série de Taylor

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} 2^{2p+1} (-1)^{p+1} = \frac{(\tan)^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)} \geqslant 0$$

La formule de Taylor avec reste-intégrale donne alors

$$\forall x \in [0, \pi/2[\,, \tan x = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)} (\tan)^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et puisque le reste-intégrale est positif, on obtient

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1} \leqslant \tan x$$

Ainsi, la série à termes positifs $\sum (-1)^{p+1} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1}$ converge pour tout $x \in [0, \pi/2[$. On en déduit que le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à $\pi/2$ puis que le rayon de convergence de $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$, qui est aussi celui de $\sum a_n x^n$, est au moins égal à π.
Finalement $R = \pi$.

Exercice 68 : [énoncé]
On a
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\underset{u=1/t}{=}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+(ux)^2}=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^{2n}x^{2n}\mathrm{d}u$$
Pour $|x|<1$, il y a convergence normale sur $[0,1]$ donc
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\frac{\arctan x}{x}$$

Exercice 69 : [énoncé]
a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{it}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
b) La convergence de l'intégrale définissant F provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$.
On a
$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(itx)^k}{k!}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{itx}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(itx)^k}{k!}\right)f(t)\,\mathrm{d}t$$
avec
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(itx)^k}{k!}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(it)^kf(t)}{k!}\,\mathrm{d}t\right)x^k$$
et
$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{itx}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(itx)^k}{k!}\right)f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^{n+1}|f(t)|\,\mathrm{d}t\to 0$$
compte tenu des hypothèses.
On peut alors affirmer
$$F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(it)^k}{k!}f(t)\,\mathrm{d}t\right)x^k$$
avec convergence sur $\mathbb{R}$ de la série entière considérée.

Exercice 70 : [énoncé]
a) On sait
$$\forall u\in\,]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+u}}=(1+u)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}u^n$$
donc
$$f(x)=\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
avec
$$u_n(\theta)=\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}x^{2n}\sin^{2n}\theta$$
Les fonctions u_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,\pi/2]$ et sa somme est continue par morceaux. Les fonctions u_n sont aussi intégrables sur $[0,\pi/2]$ et
$$\int_0^{\pi/2}|u_n(\theta)|\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}u_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\left[\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\right]^2x^{2n}$$
car on sait calculer à l'aide d'une formule de récurrence obtenue par intégration par parties les intégrales de Wallis
$$I_{2n}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\frac{\pi}{2}$$
Par la formule de Stirling
$$\int_0^{\pi/2}|u_n(\theta)|\,\mathrm{d}\theta\sim\frac{x^{2n}}{2n}$$
Ce terme est sommable et l'on peut donc procéder à une intégration terme à terme donnant la relation proposée.
b) On a obtenu
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}\text{ avec }a_n\sim\frac{1}{2n}$$
On peut écrire
$$a_n=\frac{1+\varepsilon(n)}{2n}\text{ avec }\varepsilon(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
et avec convergence des sommes introduites
$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}=a_0-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}$$
Or
$$a_0-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=a_0-\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)\underset{x\to1^-}{\sim}-\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

et pour conclure il nous suffit d'établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x\to 1^-}{=} o\left(\ln(1-x)\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que

$$\forall n \geqslant N,\ |\varepsilon(n)| \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\ln(1-x^2)$$

Le premier terme de la somme réalisant la majoration est polynomiale donc

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x\to 1^-}{=} o\left(\ln(1-x^2)\right)$$

et donc, pour x suffisamment proche de 1,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n}\right| \leqslant \varepsilon \ln(1-x^2)$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon(n)x^{2n}}{2n} \underset{x\to 1^-}{=} o\left(\ln(1-x^2)\right) = o\left(\ln(1-x^2)\right)$$

Finalement

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

Exercice 71 : [énoncé]
a) Si $x > -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x+\mathrm{e}^t)$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable car

$$t^2/(x+\mathrm{e}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Si $x = -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x+\mathrm{e}^t)$ n'est pas définie en 0 et

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$$

La fonction n'est donc pas intégrable et, puisque elle est positive, son intégrale diverge.

Si $x < -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x+\mathrm{e}^t)$ n'est pas définie en $t_0 = \ln(-x) \in]0,+\infty[$. Par dérivabilité en t_0, on obtient

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t + x} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{t_0}} \underset{t\to t_0}{\sim} \frac{1}{(t-t_0)\mathrm{e}^{t_0}}$$

et encore une fois l'intégrale diverge.
b) Pour $x = 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Pour $x \neq 0$, posons le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ qui définit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(x+u)}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \int_1^{+\infty} \frac{1/x}{u} - \frac{1/x}{x+u}\,\mathrm{d}u$$

et finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

c) Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^n$$

Exercice 72 : [énoncé]
a) S est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$.
b) Par convergence normale sur $[1,+\infty[$, on peut intervertir limites et sommes infinies pour justifier,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

de sorte que

$$S(x) \sim \frac{1}{(1-a)x}$$

c) Pour $|x| < 1$;

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m$$

Or $\sum \left|(-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m\right|$ converge et $\sum \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left|(-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m\right|$ converge. Par le théorème de Fubini, on peut permuter les sommes infinies et affirmer

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^{m+1}}\right) x^m$$

Exercice 73 : [énoncé]
a) Posons $u_n(x) = \operatorname{sh}(\alpha^n x)$. La fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $a \geqslant 0$, on a

$$\sup_{x\in[-a,a]} |u_n(x)| = \operatorname{sh}(a\alpha^n)$$

avec

$$n^2 \operatorname{sh}(a\alpha^n) \sim n^2 a\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement sur $[-a, a]$ pour tout $a \geqslant 0$.
Par convergence normale sur tout segment, la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Pour $x \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sh}(\alpha^n x) = S(x) - \operatorname{sh}(x)$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) - S(\alpha x) = \operatorname{sh}(x)$$

c) Analyse : Supposons S développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

L'égalité $S(x) - S(\alpha x) = \operatorname{sh}(x)$ fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(1-\alpha^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{1}{(1-\alpha^{2n+1})(2n+1)!} \text{ et } a_{2n} = 0$$

Synthèse : Considérons la fonction définie par

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(1-\alpha^{2n+1})(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence de la série entière définissant T est $+\infty$ et par les calculs qui précèdent

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) - T(\alpha x) = \operatorname{sh}(x)$$

Il reste à montrer $T = S$ pour conclure. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T(\alpha^n x) - T(\alpha^{n+1}x) = \operatorname{sh}(\alpha^n x)$$

En sommant

$$T(x) - T(\alpha^n x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(T(\alpha^k x) - T(\alpha^{k+1}x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(\alpha^k x)$$

Sachant que T est continue en 0 avec $T(0) = 0$, on obtient quand $n \to +\infty$

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(\alpha^k x) = S(x)$$

Exercice 74 : [énoncé]
Pour $|x| < |a|$,

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-x/a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{a^{n+1}} x^n$$

Par dérivation à l'ordre p

$$\frac{(-1)^p p!}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}{a^{n+p+1}} x^n$$

Ainsi

$$\frac{1}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{a^{n+p+1}} \frac{(n+p)!}{p!n!} x^n$$

On peut aussi obtenir ce développement à partir de celui de $(1+u)^\alpha$.

Exercice 75 : [énoncé]

a) Sachant $1-\alpha^k x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$, on peut affirmer que pour N assez grand

$$\forall k \geqslant N, 1-\alpha^k x > 0$$

Considérons alors la suite définie par la portion de produit au-delà du rang N

$$\left(\prod_{k=N}^{n} (1-\alpha^k x)\right)_{n\geqslant N}$$

On a

$$\ln\left(\prod_{k=N}^{n} (1-\alpha^k x)\right) = \sum_{k=N}^{n} \ln(1-\alpha^k x)$$

avec $\ln(1-\alpha^k x) = O(\alpha^k)$. La série de terme général α^k est absolument convergente et donc, par comparaison, la série $\sum \ln(1-\alpha^k x)$ est aussi absolument convergente. On en déduit la convergence de la suite

$$\left(\sum_{k=N}^{n} \ln(1-\alpha^k x)\right)_{n\geqslant N}$$

puis, en composant avec la fonction exponentielle, la convergence de la suite

$$\left(\prod_{k=N}^{n} (1-\alpha^k x)\right)_{n\geqslant N}$$

Enfin, en tenant compte de la portion initiale du produit définissant $P_n(x)$, on obtient la convergence de la suite $(P_n(x))$

b) Si f est solution de (E) alors

$$f(x) = (1-\alpha x)f(\alpha x) = (1-\alpha x)(1-\alpha^2 x)f(\alpha^2 x) = \dots$$

Par récurrence, on obtient

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n} (1-\alpha^k x) f(\alpha^{n+1}x) = P_n(x) f(\alpha^{n+1}x)$$

Quand $n\to\infty$, $f(\alpha^{n+1}x) \to f(0)$ car f est continue et donc

$$f(x) = f(0)\prod_{k=0}^{+\infty}(1-\alpha^k x) = f(0)P(x)$$

c) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.
La somme de cette série entière est solution de (E) si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\alpha^{n-1}x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ceci équivaut à

$$\forall n \geqslant 1, a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}$$

Inversement, considérons alors la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1}\right)$$

de sorte que

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}$$

Cette série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} \to 0$$

et l'étude qui précède assure que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) prenant la valeur 1 en 0.
En vertu de la question précédente, on peut affirmer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1}\right)x^n = P(x)$$

Exercice 76 : [énoncé]

a) Puisque

$$\left|1 - \frac{z}{2^k}\right| \leqslant 1 + \frac{|z|}{2^k}$$

l'inégalité $|P_n(z)| \leqslant P_n(-|z|)$ est immédiate.
Par produit à facteurs strictement positifs, on a $P_n(-|z|) > 0$ et on peut donc introduire

$$\ln P_n(-|z|) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^k}\right)$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{2^n}$$

et ce terme est donc sommable. On peut alors écrire

$$\ln P_n(-|z|) \leqslant M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right)$$

puis

$$|P_n(z)| \leqslant \mathrm{e}^M$$

b) On a

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leqslant |P_n(z)| \frac{|z|}{2^{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^M \frac{|z|}{2^{n+1}}$$

Le majorant est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ est donc convergente et la suite $(P_n(z))$ est de même nature.
c) Pour $|z| \leqslant 1$, on a

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}} \text{ avec } M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

et donc

$$\sup_{|z|\leqslant 1} |P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}}$$

Ce terme est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ converge donc normalement, et donc uniformément, sur le domaine défini par la condition $|z| \leqslant 1$. On en déduit que la suite de fonctions $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur ce même domaine. Or chaque fonction P_n est continue en 0 et donc sa limite simple f est continue en 0.
d) La fonction f vérifie évidemment les conditions énoncées.
Inversement, si une fonction g vérifie les conditions proposées alors

$$g(z) = (1 - z)g(z/2) = (1 - z)(1 - z/2)g(z/4) = \dots$$

Par récurrence

$$g(z) = P_n(z)g(z/2^{n+1})$$

Par continuité de g en 0, un passage à la limite donne $g(z) = f(z)$.
e) Par analyse-synthèse, la recherche d'une fonction somme de série entière $\sum a_n z^n$ solution conduit à

$$a_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - 2^k}$$

et un rayon de convergence infini.

Exercice 77 : [énoncé]
On sait pour tout $u \in]-1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1 + u)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} u^n$$

Il suffit alors de considérer $u = -x$ et $a = -\alpha$ pour obtenir la formule proposée sachant

$$\frac{(-a)(-a - 1)\dots(-a - n + 1)}{n!} = (-1)^n \frac{a(a + 1)\dots(a + n - 1)}{n!}$$

Exercice 78 : [énoncé]
En dérivant et en décomposant en éléments simples

$$(\ln(x^2 - 5x + 6))' = \frac{2x - 5}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - x/2} - \frac{1}{3}\frac{1}{1 - x/3}$$

donc

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^n$$

avec un rayon de convergence $R = 2$.
On peut aussi trouver ce développement en série entière en factorisant

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$$

Exercice 79 : [énoncé]
Posons

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2}$$

On vérifie aisément la convergence de cette intégrale et la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

Pour $|x| < 1$,

$$f'(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_{3n} = 1,\ a_{3n+1} = -1 \text{ et } a_{3n+2} = 0$$

En intégrant,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

avec

$$f(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

Pour calculer cette intégrale, on écrit

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{0}$$

Après calculs

$$f(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 80 : [énoncé]

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut affirmer $x\sin\theta \mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$ et par multiplication par la quantité conjuguée

$$\frac{\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}}{1-x\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}(1-x\sin\theta\mathrm{e}^{-i\theta})}{\left|1-x\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2}$$

On en déduit

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}}{1-x\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \frac{\sin^2\theta}{1-2x\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta}$$

b) La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, après calculs

$$f'(x) = \frac{\sin^2\theta}{1-2x\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta}$$

Pour $|x\sin\theta| < 1$, on a

$$\frac{\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}}{1-x\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}} = \sin\theta\mathrm{e}^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(x\sin\theta\mathrm{e}^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sin\theta)^{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}x^n$$

On en déduit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sin\theta)^{n+1}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n$$

puis, par intégration de développement en série entière,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sin\theta)^n\sin(n\theta)}{n}x^n$$

avec

$$f(0) = -\arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \arctan\left(\tan(\theta-\pi/2)\right) = \theta - \pi/2$$

car $\theta - \pi/2 \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Exercice 81 : [énoncé]

La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

est une fraction rationnelle dont 0 n'est pas pôle. La fonction f' puis f sont développables en série entière et les rayons de convergence des séries entières correspondantes sont égaux.

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1/2i}{x+1-i} - \frac{1/2i}{x+1+i} = \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{x+1-i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+1-i}\right)$$

avec

$$\frac{1}{x+1-i} = \frac{1}{1-i}\frac{1}{1+\frac{x}{1-i}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}x^n$$

avec un rayon de convergence $R = \sqrt{2}$.
Comme $1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$ on a

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{2^{(n+1)/2}}x^n$$

puis

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{(n+1)2^{(n+1)/2}} x^{n+1}$$

avec $R = \sqrt{2}$.

Exercice 82 : [énoncé]
En dérivant

$$f'(x) = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{(1-x)^2 + (1+x)^2\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Par les formules de trigonométrie relatives à la tangente de l'angle moitié

$$f'(x) = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

Par décomposition en éléments simple

$$f'(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - \mathrm{e}^{i\alpha}} - \frac{1}{x - \mathrm{e}^{-i\alpha}}\right)$$

Pour $x \in \left]-1,1\right[$, on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i(n+1)\alpha}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\sin(n+1)\alpha$$

Enfin, en intégrant ce développement en série entière sur $\left]-1,1\right[$,

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n$$

Exercice 83 : [énoncé]
Pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)\right) = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - x} - \frac{1}{\mathrm{e}^{i\alpha} - x}\right)$$

On reconnaît une écriture en $(Z - \bar{Z})/2i$, c'est donc une partie imaginaire

$$\frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - x}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{i\alpha}}\right)$$

Par sommation géométrique

$$\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - x\mathrm{e}^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}x^n$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1)\alpha)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\alpha)x^{n-1}$$

Par intégration de série entière, on obtient alors la relation proposée.

Exercice 84 : [énoncé]
a) On a

$$\binom{n+p}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \sim \frac{1}{p!}n^p$$

donc le rayon de convergence de f vaut 1.
b) Sur $\left]-1,1\right[$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n+p}{p}nx^{n-1}$$

Donc

$$(1-x)f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\binom{n+p+1}{p}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}n\binom{n+p}{p}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n$$

avec

$$\alpha_n = (n+1)\binom{n+p+1}{p} - n\binom{n+p}{p}$$

qui donne

$$\alpha_n = (n+p+1)\binom{n+p}{p} - n\binom{n+p}{p} = (p+1)\binom{n+p}{p}$$

Par suite

$$(1-x)f'(x)=(p+1)f(x)$$

Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(1-x)y'=(p+1)y$$

sur $]-1,1[$ sont

$$y(x)=\frac{C}{(1-x)^{p+1}}$$

avec $C\in\mathbb{R}$.
Sachant $f(0)=1$, on obtient

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

Exercice 85 : [énoncé]
a) On a

$$\sin(tx)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+1}$$

A l'aide d'intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}t^{2k+1}\mathrm{e}^{-t^2}=\frac{k!}{2}$$

Or

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}x^{2k+1}\right|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{k!}{2(2k+1)!}\,|x|^{2k+1}$$

qui est terme général d'une série convergente.
On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et affirmer

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$.
b) La fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\right)\right|\leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $t\mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction

$$f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$$

A l'aide d'une intégration par parties

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}xf(x)$$

et ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$2y'+xy=1$$

De plus f vérifie la condition initiale $f(0)=0$.
Si une somme de série entière est solution de l'équation différentielle $2y'+xy=1$ et vérifiant $y(0)=0$, c'est, après calculs, la fonction

$$g:x\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

de rayon de convergence $R=+\infty$.
Puisque f et g sont solutions sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle linéaire $2y'+xy=1$ vérifiant la condition initiale $y(0)=0$ et puisque le théorème de Cauchy assure l'unicité d'une solution à un tel problème, on peut identifier f et g.
Finalement

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 86 : [énoncé]
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 avec

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

et

$$f''(x)=\frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}}f(x)+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f'(x)$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x)+xy'(x)-\frac{1}{4}y(x)=0$$

avec les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=1/2$.
Analyse :
Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x\in\,]-R,R[$, on a

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$$

et

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

La relation $(1+x^2)S''(x)+xS'(x)-S(x)/4=0$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2-1/4)a_n\right]x^n=0$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient la relation

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=-\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

En adjoignant les conditions initiales $S(0)=1$ et $S'(0)=1/2$, on parvient à

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{4p-1}}\frac{(4p-2)!}{((2p)!)((2p-1)!)}\text{ et }a_{2p+1}=\frac{(-1)^p}{2^{4p}}\frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}$$

Synthèse :
Considérons la série entière déterminée au terme de l'analyse. Celle-ci se comprend comme la somme de deux séries entières $\sum a_{2p}x^{2p}$ et $\sum a_{2p+1}x^{2p+1}$ chacune de rayon de convergence 1 car

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right|=\frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)}\to 1$$

Cette série entière est donc de rayon de convergence $R\geqslant 1$ et, compte tenu des calculs de l'analyse, sa somme est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x)+xy'(x)-\frac{1}{4}y(x)=0$$

Elle vérifie de plus les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=1/2$. Puisque la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy et que ce dernier possède une solution unique, on peut identifier f et la somme de la série entière.

Exercice 87 : [énoncé]
a) $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et par suite la primitive $x\mapsto\arcsin x$ l'est aussi. Par produit de fonctions développable en série entière sur $]-1,1[$, f l'est aussi.
b) f est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

donc

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$$

c) Puisque f est impaire, le développement en série entière de f est de la forme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$. On a $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}$ puis

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+2}$$

donc

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}((2n+3)a_{n+1}-(2n+2)a_n)x^{2n+2}=1$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$a_0=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}a_n$$

d'où

$$a_n=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Puisque pour $x\neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}\right|=\frac{4(n+1)^2x^2}{(2n+3)(2n+2)}\to x^2$$

on obtient $R=1$.

Exercice 88 : [énoncé]
a) La fonction f est définie sur $]-1,1[$.
b) On vérifie $(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$ et $f(0)=0$.

c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et par suite la primitive $x \mapsto \arcsin x$ l'est aussi.
Par produit de fonctions développable en série entière sur $]-1,1[$, f l'est aussi.
Puisque f est impaire, le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n}$ puis

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

donc

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+3)a_{n+1} - (2n+2)a_n)x^{2n+2} = 1$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n$$

d'où

$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Puisque pour $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}}\right| = \frac{4(n+1)^2 x^2}{(2n+3)(2n+2)} \to x^2$$

on obtient $R = 1$.

Exercice 89 : [énoncé]
f admet un développement en série entière en 0 par produit fonctions développables en série entière.
De plus son rayon de convergence vérifie $R \geqslant 1$.
On peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ sur }]-1,1[$$

f est dérivable et f est solution de l'équation différentielle

$$(x^2-1)y' + xy - 1 = 0$$

Or

$$(x^2-1)f'(x) + xf(x) - 1 = -(a_1+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (na_{n-1} - (n+1)a_{n+1})\, x^n$$

Par identification

$$a_1 = -1 \text{ et } \forall n \geqslant 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}$$

De plus $a_0 = f(0) = \pi/2$ donc

$$a_{2p} = \frac{(2p-1)}{2p} \times \cdots \times \frac{1}{2} a_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \cdots \frac{2}{3} a_1 = -\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 90 : [énoncé]
a) f est solution de l'équation

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

b) f est solution de l'équation différentielle ci-dessus et vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
La fonction S vérifie sur $]-R,R[$ l'équation différentielle proposée et les conditions initiales imposées si, et seulement si,
$a_0 = 1, a_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} a_n$$

On en déduit que

$$a_{2p+1} = 0 \text{ et } a_{2p} = \frac{(4p^2-\alpha^2)\ldots(4-\alpha^2)}{(2p)!}$$

Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Dans le cas où $\alpha \in 2\mathbb{Z}$, les (a_{2p}) sont nuls à partir d'un certain rang, donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R = +\infty$.
Dans le cas où $\alpha \notin 2\mathbb{Z}$, pour $x \neq 0$ et $u_p = a_{2p}x^{2p}$, on a

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| \to |x|^2$$

donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R = 1$.
Dans les deux cas, les calculs qui précèdent assure que la fonction somme de cette série entière est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Par unicité des solutions à un tel problème différentiel, on peut conclure que f est égale à la somme des cette série entière.

Exercice 91 : [énoncé]
Posons $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$
f vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
Analyse :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
La fonction S vérifie sur $]-R, R[$l'équation différentielle proposée et les conditions initiales imposées si, et seulement si,

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Ceci donne

$$a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^{p} \left((2p-1)^2 + 1\right)}{(2p+1)!}$$

Synthèse :
Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Pour $x \neq 0$ et $u_p = a_{2p+1} x^{2p+1}$; on a

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| \to |x|^2$$

donc le rayon de convergence de la série entière étudiée vaut 1. Par les calculs qui précèdent on peut alors affirmer que sa somme S est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Par unicité des solutions à un tel problème différentiel, on peut conclure que f est la somme des la série entière introduite sur $]-1, 1[$.

Exercice 92 : [énoncé]
a) La fonction f est impaire car produit d'une fonction paire par la primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire.
b) f est solution de l'équation différentielle

$$y' = xy + 1$$

c) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ces primitives le sont donc aussi et, par produit de fonctions développable en série entière, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par imparité, on peut écrire ce développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

et l'équation différentielle donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, (2n+1)a_n = a_{n-1} \text{ et } a_0 = 1$$

On en déduit

$$a_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}$$

Exercice 93 : [énoncé]
a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait par la série exponentielle

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ donc par intégration de série entière

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergente.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!k!(2k+1)} x^{2n+1}$$

De plus f est solution de l'équation différentielle

$$f'(x) + 2xf(x) = 1$$

avec la condition initiale $f(0) = 0$.
En écrivant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (car on sait que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme on l'a vu ci-dessus) et en injectant dans l'équation différentielle on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right) + \left(2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n\right) = 1$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0$$

Sachant $a_0 = f(0) = 0$, on parvient à

$$a_{2n} = 0 \text{ et } a_{2n+1} = \frac{-2}{2n+1}a_{2n-1} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

b) Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!k!(2k+1)} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\binom{n}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

puis la relation voulue.

Exercice 94 : [énoncé]
a) Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t}/(x+t)$ définie sur $]-1,+\infty[\times[1,+\infty[$.
Pour chaque $x > -1$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ et $t^2 u(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
La fonction f est donc bien définie sur $]-1,+\infty[$.
Pour chaque $t \geqslant 1$, $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}$$

La fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux en t, continue en x et pour tout $a > -1$

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[1,+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(a+t)^2} = \varphi_a(t)$$

avec $\varphi_a : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable par des arguments analogues aux précédents.
On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties, on obtient

$$f'(x) - f(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+1}$$

b) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in]-R,R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - a_n\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-1}x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-1}$$

Après résolution de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{a_0}{n!} + \mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{(n-1-k)}k!}{n!}$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédents. On a

$$|a_n| \leqslant |a_0| + \mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!} = |a_0| + \mathrm{e}^{-1}$$

La suite (a_n) est bornée donc le rayon de convergence R de la série entière est au moins égal à 1 et, par les calculs qui précédent, on peut affirmer que la somme S de la série entière est solution de l'équation différentielle sur $]-1,1[$. En ajoutant la condition initiale $a_0 = f(0)$, on peut affirmer que $f(x) = S(x)$ sur $]-1,1[$ par unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 95 : [énoncé]
On a

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{(1+i)x} + \mathrm{e}^{(1-i)x} + \mathrm{e}^{(-1+i)x} + \mathrm{e}^{(-1-i)x}\right)$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n}{4n!} x^n$$

On a $1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$ etc, donc

$$(1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n = 2\sqrt{2}^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{3n\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Finalement

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!} x^{4q}$$

Retrouvons ce résultat, en exploitant l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.
La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ par produit de telles fonctions. De plus, la fonction f est paire donc le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Par l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$, on obtient

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4} + 4a_n = 0$$

Puisque $a_0 = 1$, $a_1 = a_3 = 0$ (par imparité) et $a_2 = 0$ (par calculs), on obtient

$$a_{4q} = \frac{(-1)^q 4^q}{(4q)!} \text{ et } a_{4q+1} = a_{4q+2} = a_{4q+3} = 0$$

ce qui conduit au développement précédent.

Exercice 96 : [énoncé]
I) a) $(x,t) \mapsto t^k \sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ donc, par intégration sur un segment, f est continue.
b) $(x,t) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(t^k \sin(xt))$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ donc par intégration sur un segment, f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 xt^k \cos(xt)\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$xf'(x) + (k+1)f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^k \sin(xt)\right)\mathrm{d}t = \sin x$$

c) Par analyse synthèse, on obtient une seule fonction solution :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+2+k)} x^{2n+2}$$

de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 97 : [énoncé]
a) Soit v la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
La fonction v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et

$$tv'(t) + v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n t^n$$

Parallèlement, sur $\mathbb{R}$

$$3t^2\cos(t^3/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 3t^{3n+2}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, v est solution de (E) sur $]-R,R[$ si, et seulement si,

$$a_{3n} = a_{3n+1} = 0 \text{ et } a_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{n+1}$$

Ainsi la fonction v est déterminée de manière unique et de plus celle-ci existe puisque le rayon de convergence de la série entière définie par les a_n ci-dessus est $R = +\infty$.
b) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0,+\infty[$.
La solution générale homogène est $y(t) = \lambda/t$.
Par la méthode de la variation de la constante, on peut proposer la solution particulière

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t}$$

et finalement la solution générale

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t} + \frac{\lambda}{t}$$

Parmi les solutions, la seule pouvant être prolongée par continuité en 0 , et donc correspondre à v, est celle obtenue pour $\lambda = -2$.

Exercice 98 : [énoncé]
a) Notons $\mathcal{D}$ l'intervalle de convergence de cette série entière.
Le rayon de convergence étant 1 on en déduit : $]-1,1[\subset\mathcal{D}\subset[-1,1]$.
De plus $\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right|\sim\frac{1}{n^2}$ donc $f(1)$ et $f(-1)$ existe. Ainsi $\mathcal{D}=[-1,1]$.
b) Sur $]-1,1[$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(1+x)$$

Donc

$$\int\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=(1+x)\ln(1+x)-x+C$$

Puisque $f(0)=0$, on conclut

$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$$

sur $]-1,1[$.
c)

$$\forall x\in[-1,1],\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\right|\leqslant\frac{1}{n(n-1)}\sim\frac{1}{n^2}$$

donc la série de fonctions définissant f converge normalement sur $[-1,1]$ et par suite f est continue.

$$f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}((1+x)\ln(1+x)-x)=2\ln2-1$$

et

$$f(-1)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}((1+x)\ln(1+x)-x)=1$$

Exercice 99 : [énoncé]
Pour $x\neq0$,

$$\left|\frac{n}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{x^n}/\frac{n-1}{n!}\right|\to0$$

donc $R=+\infty$.
Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=(x-1)\mathrm{e}^x$$

Exercice 100 : [énoncé]
Clairement $R=+\infty$.

$$\sum_{n\geqslant0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n=\sum_{n\geqslant0}\frac{n^2-n-2}{n!}x^n=\sum_{n\geqslant0}\frac{n(n-1)-2}{n!}x^n$$

donc

$$\sum_{n\geqslant0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n=\sum_{n\geqslant2}\frac{x^n}{(n-2)!}-2\sum_{n\geqslant0}\frac{x^n}{n!}=(x^2-2)\mathrm{e}^x$$

Exercice 101 : [énoncé]
Pour $x\neq0$,

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right|\to\left|x^2\right|$$

donc $R=1$.
Pour $x\in\,]-1,1[$

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n$$

donc

$$xf'(x)=-\frac{x}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nnx^n$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}=x\times\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$$

Exercice 102 : [énoncé]
Pour $x\neq0$, posons $u_n=\frac{x^{2n+1}}{3n+2}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to x^2$ donc $R=1$.
La fonction somme S est impaire, on se limite alors à $x>0$.

$$\sqrt{x}S(x^{3/2})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{3n+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$$

donc $S(x) = \frac{1}{x^{4/3}}\int_0^{x^{2/3}} \frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.

$$S(x) = \frac{1}{6x^{4/3}}\ln\frac{x^{4/3}+x^{2/3}+1}{x^{4/3}-2x^{2/3}+1} - \frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x^{2/3}+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 103 : [énoncé]
Pour $x \neq 0$, posons

$$u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1} \neq 0$$

Puisque

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to |x|^2$$

on obtient $R = 1$.
Sachant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

on obtient par intégration de développement en série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

puis, pour $x \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Pour $x = 0$, la somme vaut 1.

Exercice 104 : [énoncé]
Par la règle de d'Alembert, on obtient $R = 1$.
Posons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$$

On a

$$xS(x^2) = \arctan x$$

On en déduit

$$S(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ pour } x > 0$$

Sachant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

on obtient par intégration de développement en série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

On en déduit

$$xS(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

donc

$$S(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \text{ si } x < 0$$

Enfin, pour $x = 0$, $S(0) = 1$.

Exercice 105 : [énoncé]
Clairement $R = 1$.
Posons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Sachant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

on obtient par intégration de développement en série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

On en déduit

$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{4x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Exercice 106 : [énoncé]
a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi : t \mapsto 1$, on obtient $a_n \to 0$.
b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)'(\tan t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leqslant 2a_n \leqslant a_n + a_{n-2}$. On en déduit $a_n \sim \frac{1}{2n}$ puis $u_n(x) \sim \frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.
Pour $x = 1$, $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si,$\alpha > 0$.
Pour $x = -1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement si $\alpha \leqslant -1$.
Pour $\alpha > -1$, $2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} a_k = \alpha + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}(a_k + a_{k+2}) + o(1)$
Or $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha(n+1)}$ converge par application de critère spécial des séries alternées (car $n \mapsto \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ décroît vers 0 pour n assez grand) donc $\sum u_n(x)$converge.
d) Puisque $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^n + a_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

On en déduit

$$f(x) + \frac{f(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}x}{x^2} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

puis

$$f(x) = \frac{-x\ln(1-x) + \frac{\pi}{4} + x\frac{\ln 2}{2}}{x^2+1}$$

Exercice 107 : [énoncé]
a) On a

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1} (k-t) \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}$$

donc $R \geqslant 1$.

$$|a_n| \geqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t) \times \prod_{k=2}^{n-1} (k-1)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{4n(n-1)}$$

donc $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$.

b) Soit $x \in \left]-1, 1\right[$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) x^n \mathrm{d}t$$

or par convergence uniforme de la suite de fonctions de la variable t sur $[0,1]$ (convergence uniforme obtenue par convergence normale grâce à $|x| < 1$) on peut permuter somme et intégrale.

$$S(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k)x^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1+x)^t \mathrm{d}t = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

Exercice 108 : [énoncé]
a) Posons $a_n = \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} \neq 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2}$. $R = 2$.
b) On sait que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$$

Par convergence uniforme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t}{2 - x\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(2-x) + x\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(2-x) + xu^2}$$

puis
si $x > 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}} \arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

Si $x < 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \mathrm{argth}\sqrt{\frac{-x}{2-x}}$$

Exercice 109 : [énoncé]
a) Puisque la suite $\left(n^{(-1)^n}\right)$ ne tend pas vers 0, la série numérique $\sum n^{(-1)^n}x^n$ diverge grossièrement pour $x=1$ et donc le rayon de convergence R vérifie $R\leqslant 1$.
D'autre part $\left|n^{(-1)^n}\right|\leqslant n$ et l'on sait (ou on le vérifie rapidement) que le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ vaut 1. Par comparaison, on obtient $R\geqslant 1$ puis $R=1$.
b) Puisque la série entière diverge grossièrement en $x=1$ et en $x=-1$, le domaine de définition de la somme est $]-1,1[$. Pour $x\in\,]-1,1[$, un argument d'absolue convergence assure que l'on peut séparer la somme en deux selon la parité de n.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n}x^n=\sum_{p=1}^{+\infty}2px^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}$$

Puisque

$$\sum_{p=1}^{+\infty}py^{p-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{1-y}\right)=\frac{1}{(1-y)^2}$$

on a

$$\sum_{p=1}^{+\infty}2px^{2p}=\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$

De plus

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}=\operatorname{argth}x$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n=\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}+\operatorname{argth}x$$

Exercice 110 : [énoncé]
Posons

$$u_n(x)=n^{(-1)^n}x^n$$

Pour $x\in[0,1[$, on a $u_n(x)\to 0$ et pour $x=\pm 1$, $(u_n(x))$ ne tend pas vers 0.
Le rayon de convergence de cette série entière vaut donc $R=1$ et l'intervalle de convergence est $]-1,1[$.
Pour $x\in\,]-1,1[$, on peut décomposer la somme en deux

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}(2p)x^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}$$

D'une part

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}=\operatorname{argth}(x)$$

et d'autre part

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(2p)x^{2p}=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$

Exercice 111 : [énoncé]
Les séries entières définissant S_0,S_1 et S_2 sont de rayons de convergence $R=+\infty$.
Pour $x\in\mathbb{C}$, on a

$$S_0(x)+S_1(x)+S_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\exp(x)$$

On a aussi

$$S_0(x)+jS_1(x)+j^2S_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(jx)^n}{n!}=\exp(jx)$$

et

$$S_0(x)+j^2S_1(x)+jS_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(j^2x)^n}{n!}=\exp(j^2x)$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$S_0(x)=\frac{1}{3}\left(\exp(x)+\exp(jx)+\exp(j^2x)\right)$$

Exercice 112 : [énoncé]
a) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, pour $|x|<\min(R,R')$, $\sum c_nx^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\right)$$

Ainsi le rayon de convergence R'' de $\sum c_nx^n$ vérifie $R''\geqslant\min(R,R')$.
En revanche, on ne peut facilement rien dire de plus de façon générale. Par exemple $1-x$ et $\frac{1}{1-x}$ se développent en série entière de rayons de convergence $+\infty$ et 1 et leur produit de Cauchy est de rayon de convergence $+\infty$...
b) Puisque $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$, on obtient facilement $R=1$.

Si l'on pose $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$ et $b_k = 1$ pour $k \geqslant 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Par suite, pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = -\frac{x\ln(1-x)}{1-x}$$

Exercice 113 : [énoncé]
Par la règle de d'Alembert, $R = 1/\mathrm{e}$.
Sur $[-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{sh} n}{n(n+1)} x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}x)^n}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/\mathrm{e})^n}{n(n+1)}\right)$$

Or sur $]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n+1} = -\ln(1-y) + \frac{1}{y}(\ln(1-y) + y)$$

Cette identité pouvant être prolongée en -1 et en 1 par continuité.
Cela permet alors d'expliciter la somme cherchée.

Exercice 114 : [énoncé]
Par intégration par parties successives

$$a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n \mathrm{d}t = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Puisque $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{1}{4}$ on a $R = 4$.
Pour $|x| < 4$, par convergence normale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - t(1-t)x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{xt^2 - xt + 1}$$

Si $x \in]0, 4[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{4-x}}$$

Si $x \in]-2, 0[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(x-4)}} \operatorname{argth} \sqrt{\frac{x}{x-4}}$$

Si $x = 0$, $f(x) = 1$.

Exercice 115 : [énoncé]
a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi : t \mapsto 1$, on obtient $a_n \to 0$.
b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)'(\tan t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leqslant 2a_n \leqslant a_n + a_{n-2}$. On en déduit

$$a_n \sim \frac{1}{2n}$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.
Pour $x = 1$, $\sum a_n$ diverge en vertu de l'équivalent précédent et par comparaison de séries à termes positifs.
Pour $x = -1$, $\sum (-1)^n a_n$ en vertu du critère spécial des séries alternées, la suite (a_n) étant notamment décroissante.
Ainsi la fonction f est définie sur $[-1, 1[$.
d) Puisque $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_{n+2} x^{n+1} + a_n x^{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

pour $x \in [-1, 1[$. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_{n+2} x^{n+1} + a_n x^{n+1}\right) = \frac{1}{x}\left(f(x) - a_0 - a_1 x\right) + x f(x)$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} x - x\ln(1-x)\right)$$

pour $x \neq 0$ et aussi pour $x = 0$ par continuité.
On peut aussi procéder à une permutation somme intégrale pour parvenir à

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\tan t}$$

Exercice 116 : [énoncé]

a) Comme la suite (a_n) est bornée, on peut écrire $a_n x^n = O(x^n)$. Or la série $\sum x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$ et donc, par comparaison, la série $\sum a_n x^n$est absolument convergente.

Puisque $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{in\theta}\right)$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n\right)$$

Par sommation géométrique (possible puisque $\left|x\mathrm{e}^{i\theta}\right| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \frac{1 - x\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

b) La convergence de la série étudiée n'est pas immédiate. Exprimons ses sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N}\cos(n\theta)x^n\mathrm{d}x$$

Par le calcul au dessus, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\,\mathrm{d}x$$

Puisque $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, on peut écrire

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\right| \leqslant \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\mathrm{e}^{in\theta}x^n\right|$$

ce qui donne par un calcul analogue au précédent

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{\left|1 - x\mathrm{e}^{i\theta}\right|} \leqslant \frac{x^{N+1}}{\left|\mathrm{Im}(x\mathrm{e}^{i\theta})\right|} = \frac{x^N}{|\sin\theta|}$$

Par conséquent

$$\left|\int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^N}{|\sin\theta|}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(N+1)\,|\sin\theta|} \to 0$$

On en déduit que la série $\sum\frac{\cos(n\theta)}{n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{x - 2x\cos\theta + 1}\,\mathrm{d}x$$

c) On décompose l'intégrale étudiée en deux intégrales directement calculables

$$\int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,\mathrm{d}x = \sin^2\theta\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{2}\int_0^1 \frac{2x - 2\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

et l'on obtient

$$\int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,\mathrm{d}x = \sin\theta\left[\arctan\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right]_0^1 - \frac{\cos\theta}{2}\left[\ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)\right]_0^1$$

On simplifie en exploitant

$$\arctan\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \arctan\left(\tan(\theta - \pi/2)\right) = \theta - \pi/2$$

$$\arctan\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right) = \arctan\frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2} = \frac{\theta}{2}$$

et

$$\ln\left(2 - 2\cos\theta\right) = \ln\left(4\sin^2\theta/2\right)$$

On obtient au final

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \frac{\pi - \theta}{2}\sin\theta - \cos\theta\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 117 : [énoncé]

Posons $b_n = \frac{a_n}{n!}$, on a $b_0 = 1$ et

$$(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}b_k$$

Notons S la somme de la série entière $\sum b_n x^n$ et posons R son rayon de convergence.

Par récurrence, on peut affirmer $|b_n| \leqslant 1$ et donc $R > 0$.

Sur $]-R, R[$, la relation précédente donne a

$$S'(x) = S^2(x)$$

Après résolution, sachant que $S(0) = 1$, on obtient

$$S(x) = \frac{1}{1 - x}$$

d'où l'on tire $a_n = n!$.

Exercice 118 : [énoncé]
a) Pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \operatorname{Card}\left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 / k + 2\ell = n\right\} = \lfloor n/2 \rfloor + 1$$

b) Analyse :
Introduisons la série entière $\sum u_n x^n$ de somme S et de rayon de convergence R.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3}x^{n+3} = u_{n+2}x^{n+3} + u_{n+1}x^{n+3} - u_n x^{n+3}$$

En sommant, on obtient pour $|x| < R$,

$$S(x) - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = x\left(S(x) - u_0 - u_1 x\right) + x^2\left(S(x) - u_0\right) - x^3 S(x)$$

On en déduit

$$S(x) = u_0 \frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} + u_1 \frac{x}{1-x^2} + u_2 \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

Synthèse : Considérons la fonction

$$f : x \mapsto u_0 \frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} + u_1 \frac{x}{1-x^2} + u_2 \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

f est une fonction rationnelle donc 0 n'est pas pôle, elle est développable en série entière sur $]-1,1[$.
Puisque cette fonction vérifie la relation

$$f(x) - \left(u_0 + u_1 x + u_2 x^2\right) = x\left(f(x) - u_0 - u_1 x\right) + x^2\left(f(x) - u_0\right) - x^3 f(x)$$

les coefficients u_n de son développement en séries entières vérifient

$$\forall x \in\,]-1,1[\,, \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+2} + u_{n+1} - u_n)x^{n+3}$$

Par identification des coefficients de séries entières de sommes égales sur $]-1,1[$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$$

Ceci détermine alors entièrement la suite (u_n) moyennant la connaissance des coefficients u_0, u_1, u_2.
Pour exprimer u_n, il ne reste plus qu'à former le développement en série entière de f.

$$\frac{(1-x-x^2)}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3}$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} \text{ et } \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}$$

On en déduit que pour $n \geqslant 3$,

$$u_n = -u_0 a_{n-3} + u_1 \varepsilon_n + u_2 a_{n-1}$$

avec $\varepsilon_n = 1$ si n est impair et 0 sinon.

Exercice 119 : [énoncé]
a) Si la série entière S est de rayon de convergence $R > 0$, alors pour tout $x \in\,]-R,R[$ on a

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$S(x) = 1 + xS^2(x)$$

b) Pour $x \neq 0$, on obtient, après résolution

$$S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour } x < 1/4$$

Posons $\varepsilon(x)$ tel que

$$S(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$

On a

$$\varepsilon(x) = \frac{2xS(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

La fonction ε est continue sur $]-R,0[\cup]0,\min(R,1/4)[$ et ne prend que les valeurs -1 ou 1. On en déduit que cette fonction ε est constante et puisque S converge quand $x\to 0^{+/-}$, on peut affirmer que ε est constante égale à -1 car négative au voisinage de 0.
Finalement

$$S(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ et } S(0)=1$$

c) Après développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$, on obtient

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et $R=1/4$.
Puisque la fonction

$$T : x\mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

vérifie l'équation $xT^2(x)=T(x)-1$, la reprise des calculs précédents (sachant $R>0$) assure que les coefficients b_n vérifient

$$b_0=1,\forall n\in\mathbb{N}, b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}b_k$$

On en déduit $a_n=b_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ car les conditions qui précèdent déterminent une suite de façon unique.
d) Par la formule de Stirling

$$a_n\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}$$

Exercice 120 : [énoncé]
a)

$$N(n,p)=\binom{n}{p}D(n-p)$$

b) $D(n)\leqslant n!$ donc $\left|\frac{D(n)}{n!}\right|\leqslant 1$ qui implique $R\geqslant 1$.

On a $\sum_{p=0}^{n} N(n,p)=n!$ donc $\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!(n-p)!}D(n-p)=1$ d'où par produit de Cauchy $\mathrm{e}^x f(x)=\frac{1}{1-x}$ puis

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$$

c)

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^n$$

donc

$$D_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

puis

$$N(n,p)=\frac{n!}{p!}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}$$

d) Finalement

$$\frac{1}{n!}N(n,p)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{p!\mathrm{e}}$$

Exercice 121 : [énoncé]
a) Une involution de $\{1,\dots,n\}$ peut fixer l'élément n ou non.
Il y a exactement I_{n-1} involutions de $\{1,\dots,n\}$ fixant n.
Si une involution ne fixe pas n, elle l'échange avec un autre élément a de $\{1,\dots,n-1\}$. Il y a $n-1$ valeurs possibles pour a, l'involution alors obtenue envoyant n sur a et a sur n réalise aussi par restriction une involution sur $\{1,\dots,n\}\setminus\{a,n\}$: il y en a exactement $(n-1)I_{n-2}$.
Au final, on obtient

$$I_n=I_{n-1}+(n-1)I_{n-2}$$

b) Une involution est bijective et il y a exactement $n!$ permutations de $\{1,\dots,n\}$.
On a donc $I_n\leqslant n!$.
Puisque $I_n/n!=O(1)$, le rayon de convergence de la série entière est supérieur à 1.
c) Par décalage d'indice

$$(1+x)S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n$$

En combinant les deux sommes

$$(1+x)S(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n-nI_{n-1}}{n!}x^n$$

En vertu de la relation obtenue précédemment

$$(1+x)S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = S'(x)$$

d) La résolution de cette équation différentielle linéaire, sachant $S(0) = 1$, donne

$$S(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{2}x^2}$$

Or

$$\mathrm{e}^{x+\frac{1}{2}x^2} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

puis, par produit de Cauchy

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2p}{2k} \text{ et } I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2p+1}{2k}$$

Exercice 122 : [énoncé]
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donc

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

pour $x \neq 0$. Or

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, cela permet de conclure.
b) Un raisonnement semblable, permet d'établir que $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas. Par opération, le prolongement continue de $x \mapsto \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 123 : [énoncé]
a) Pour $t \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{\cos t}{t} = \frac{\cos t - 1}{t} + \frac{1}{t}$$

Posons alors

$$g(t) = \frac{\cos t - 1}{t}$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^\star$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
On a alors pour tout $x \neq 0$

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) \,\mathrm{d}t + \ln 2 = G(2x) - G(x) + \ln 2$$

avec G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
On en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ln 2$$

et on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$.
b) Pour $t \neq 0$ et aussi pour $t = 0$ on a

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n-1}$$

On peut alors poser

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{2n}$$

primitive de g et on obtient

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{4^n - 1}{2n} x^{2n}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 124 : [énoncé]
Pour tout $t \in [0,1[$ on sait

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

donc aussi

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na}$$

Soit F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ sur $[0,1]$.

Sur

$$[0,1[\,,F(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{na+1}}{na+1}+F(0)$$

Or F est continue sur $[0,1]$ et la série de fonctions convergence uniformément sur $[0,1]$.
Par passage à la limite en 1,

$$F(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}+F(0)$$

Par suite

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}=F(1)-F(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 125 : [énoncé]
a) En intégrant le développement en série entière de sa dérivée, on obtient

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n+1}$$

avec un rayon de convergence $R=1$.
Par la formule de Stirling

$$\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

ce qui assure la convergence normale de la série de fonctions sur $[-1,1]$.
b) D'une part

$$\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{8}$$

D'autre part, en intégrant terme à terme

$$\int_0^{\pi/2}\arcsin(\sin(t))\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

car il y a convergence normale de la série de fonctions sur $[0,\pi/2]$.
On connaît l'intégrale de Wallis

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

et on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

donc

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 126 : [énoncé]
a) Par télescopage

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N+1)$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+o(1)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\to\gamma$$

b) Puisque

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}$$

on obtient

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} + \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}$$

or

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^k} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)} < +\infty$$

donc on peut appliquer le théorème d'échange de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k)-1)$$

et enfin

$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k)-1) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$$

Exercice 127 : [énoncé]

Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

somme de série entière définie sur $]-1,1[$.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n} = \sqrt[3]{9}S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{9}\int_0^{1/\sqrt[3]{3}}\frac{t\mathrm{d}t}{1-t^3}$$

ce qui donne un résultat assez monstrueux :

$$9^{(1/3)}(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan((\frac{2}{9}3^{(2/3)}+\frac{1}{3})\sqrt{3})+\frac{1}{6}\ln(3)+\frac{1}{6}\ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)})-\frac{1}{3}\ln(-3^{(2/3)}+3)+\frac{1}{18}\sqrt{3}\pi)$$

fourni par Maple.

Exercice 128 : [énoncé]

On a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}$$

avec une convergence uniforme sur $[0,1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial.

On a alors

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

On peut montrer que cette vaut $\pi^2/12$ si l'on sait

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 129 : [énoncé]

Pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

(en considérant que la valeur du premier membre en 0 est 1, valeur du prolongement par continuité).

Il y a convergence uniforme de la série en second membre sur $[0,1]$ par majoration du reste d'une série satisfaisant le critère spécial. Puisque les fonctions sommées sont continues

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

On ne sait pas exprimer cette valeur à l'aide des constantes usuelles, on l'appelle nombre de Catalan.

Exercice 130 : [énoncé]

On a

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

avec convergence uniforme sur $[0,1]$ par majoration du reste d'une série vérifiant le critère spécial. On peut donc intégrer terme à terme

$$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 131 : [énoncé]
On a

$$\ln(1+u) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}u^k}{k}$$

avec convergence normale sur $[-|x|,|x|]$ donc

$$\ln(1+x\sin^2 t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k\sin^{2k}t}{k}$$

avec convergence normale sur $[0,\pi/2]$.
Par suite

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}I_{k-1}$$

avec

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

puis

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}\frac{(2k-2)!}{(2^{k-1}(k-1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Or

$$\sqrt{1+u} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}x^k$$

avec

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k((k-1)!)^2}$$

d'où

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+x\sin^2 t)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \pi(\sqrt{1+x}-1)$$

Exercice 132 : [énoncé]
a) Par le changement de variable $s = t^{n+1}$, on obtient

$$u_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 f(s^{1/(n+1)})\,\mathrm{d}s$$

Posons alors $f_n(s) = f(s^{1/(n+1)})$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et convergent simplement sur $]0,1]$ vers la fonction constante égale à $f(1)$ elle-même continue par morceaux. On a de plus la domination

$$|f_n(s)| \leqslant \max_{t\in[0,1]}|f(t)|$$

Par convergence dominée, on a donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}s = f(1)$$

b) On réalise le changement de variable $s = t^n$ et on obtient

$$v_n = \int_0^1 \ln(1+s)f(s^{1/n})s^{-\frac{n-1}{n}}\,\mathrm{d}s$$

Posons alors g_n la fonction définie par l'intégrande, on peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée sachant

$$g_n(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(1+s)}{s}f(1) \text{ et } |g_n(s)| \leqslant \frac{\ln(1+s)}{s}f(1)$$

et l'on obtient

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)\int_0^1\frac{\ln(1+s)}{s}\,\mathrm{d}s$$

Pour calculer l'intégrale, il suffit ensuite d'écrire

$$\frac{\ln(1+s)}{s} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}s^{n-1}$$

et de procéder à une intégration terme à terme sachant la sommabilité de

$$\int_0^1\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}s^{n-1}\right|\,\mathrm{d}s = \frac{1}{n^2}$$

On obtient

$$\int_0^1\frac{\ln(1+s)}{s}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 133 : [énoncé]
Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \int_{[0,1[} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}\,\mathrm{d}t$$

Pour $n \geqslant 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

On a alors

$$n\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

donc

$$n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 134 : [énoncé]
g est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et h l'est aussi par produit.
$h(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ avec

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n t^n \mathrm{e}^{-t}}{2^{2n}(n!)!}$$

pour tout $t \in [0,+\infty[$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
Puisque

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{2^{2n} n!}$$

et donc la série $\sum \int_{[0,+\infty[} |f_n|$ converge.
Puisque $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers h continue par morceaux, on peut par théorème affirmer que h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} = \mathrm{e}^{-1/4}$$

Exercice 135 : [énoncé]
a) En posant $Y = X - 1$,

$$\frac{1}{(X+1)^m (X-1)^n} = \frac{1}{Y^n (Y+2)^m}$$

Pour $Y \in \left]-1/2, 1/2\right[$,

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \frac{1}{2^m}\frac{1}{\left(1+\frac{Y}{2}\right)^m} = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!}\frac{Y^k}{2^k}$$

Après simplifications

$$\frac{1}{(Y+2)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k} Y^k$$

On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est

$$\frac{a_0}{(X-1)^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{X-1} = \frac{a_0}{Y^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y}$$

avec

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}$$

De même, en posant $Z = X + 1$, la partie polaire relative au pôle -1 est

$$\frac{b_0}{(X+1)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{X+1} = \frac{b_0}{Z^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{Z}$$

avec
$$b_k = \frac{(-1)^n}{2^{n+k}}\binom{n+k-1}{k}$$
Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.
b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient
$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k}{(X-1)^n} + \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k}{(X+1)^m}$$
Par conséquent, on posant
$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k \text{ et } V(X) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k$$
la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne
$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1$$

Exercice 136 : [énoncé]
a) Soit $r \in]0,R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{a_n}{n!}z^n = a_n r^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n = o\left(a_n r^n\right)$$
car par croissance comparée
$$\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum a_n z^n$est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.
b) On a
$$f(t)\mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}t^n\mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ avec } f_n(t) = \frac{a_n}{n!}t^n\mathrm{e}^{-xt}$$
La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
Les fonctions f_n et la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0,+\infty[$ car $t^2 f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et
$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
Par intégration par parties généralisées successives
$$\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{x^{n+1}}$$
et donc
$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}$$
Si $x > 1/R$ alors la série $\sum |a_n|/x^{n+1}$ est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable et
$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

Exercice 137 : [énoncé]
a) On a
$$S_N(x)^2 - 1 - x = S_N(x)^2 - S(x)^2 = R_N(x)(S(x) + S_N(x))$$
C'est donc une série entière dont le premier terme non nul est au moins un x^{N+1}.
D'autre part $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme.
b) Pour N tel que $A^N = 0$, $(S_N(A))^2 - I - A = O_n$ donc $B = S_N(A)$ convient.

Exercice 138 : [énoncé]
Pour $|x| < 1$, on a le développement en série entière
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$
On peut écrire
$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b$$
Par produit de Cauchy de développements en série entière
$$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient en étudiant le coefficient d'indice n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$$