Structures algébriques

Lois de composition interne

Exercice 1 [02190] [correction]
On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a\star b=\ln(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)$$

Quelles en sont les propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments réguliers ?

Exercice 2 [02191] [correction]
Soit $E=[0,1]$. On définit une loi $\star$ sur E par

$$\forall x,y\in E,x\star y=x+y-xy$$

a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative et associative.
b) Montrer que $\star$ possède un neutre.
c) Quels sont les éléments symétrisables ? réguliers ?

Exercice 3 [02192] [correction]
Soit $\star$ une loi de composition interne sur E.
Pour $A,B\in\mathcal{P}(E)$ on pose

$$A\star B=\{a\star b/a\in A,b\in B\}$$

Etudier les propriétés de $\star$ sur E (commutativité, associativité, existence d'un neutre) conservées par $\star$ sur $\mathcal{P}(E)$. La loi $\star$ est-elle distributive sur l'union, sur l'intersection ?

Exercice 4 [02193] [correction]
Soit E un ensemble et $f:E\to E$.
Montrer que f est un élément régulier de $(E^E,\circ)$ si, et seulement si, f est bijective.

Exercice 5 [02194] [correction]
Soit a un élément d'un ensemble E muni d'une loi $\star$ associative.
Montrer que a est symétrisable si, et seulement si, l'application $f:E\to E$ définie par $f(x)=a\star x$ est bijective.

Exercice 6 [02195] [correction]
Soit $\star$ une loi associative sur un ensemble E. Un élément x de E est dit idempotent si, et seulement si, $x\star x=x$.
a) Montrer que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x\star y$ est idempotent.
b) Montrer que si x est idempotent et inversible, alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 7 [02196] [correction]
Soit E et F deux ensembles et $\varphi:E\to F$ une application bijective.
On suppose E muni d'une loi de composition interne $\star$ et on définit une loi $\top$ sur F par :

$$\forall x,y\in F,x\top y=\varphi(\varphi^{-1}(x)\star\varphi^{-1}(y))$$

a) Montrer que si $\star$ est commutative (resp. associative) alors $\top$ l'est aussi.
b) Montrer que si $\star$ possède un neutre e alors $\top$ possède aussi un neutre à préciser.

Exercice 8 [02197] [correction]
Soit $\star$ une loi de composition interne associative sur E.
On suppose qu'il existe $a\in E$ tel que l'application $f:E\to E$ définie par $f(x)=a\star x\star a$ soit surjective et on note b un antécédent de a par f.
a) Montrer que $e=a\star b$ et $e'=b\star a$ sont neutres resp. à gauche et à droite puis que $e=e'$.
b) Montrer que a est symétrisable et f bijective.

Exercice 9 [02198] [correction]
Soient $\star$ une loi de composition interne associative sur un ensemble fini E et x un élément régulier de E. Montrer que E possède un neutre.

Exercice 10 [02199] [correction]
Soit $\star$ une loi associative sur un ensemble E fini. On suppose que la loi $\star$ possède un neutre e.
Montrer que tout élément régulier de E est inversible.

Exercice 11 [03043] [correction]
Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative notée $\top$.
Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $e \top e = e$.

Groupes

Exercice 12 [02201] [correction]
Soit $(G, \star)$ un groupe tel que

$$\forall x \in G, x^2 = e$$

Montrer que G est commutatif.

Exercice 13 [02202] [correction]
Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E associative et possédant un neutre e. On suppose que

$$\forall x \in E, x^{\star 2} = e$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 14 [02203] [correction]
Soit $\star$ une loi de composition interne associative sur un ensemble E fini non vide.
On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Montrer que E est un groupe.

Exercice 15 [02204] [correction]
Soit $(G, \star)$ un groupe à n éléments.
Justifier que sa table de composition est un carré latin c'est à dire que tout élément de G figure une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Exercice 16 [02205] [correction]
Soit $G = \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ et $\star$ la loi de composition interne définie sur G par

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$$

a) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe non commutatif.
b) Montrer que $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Exercice 17 [02206] [correction]
Sur $G =]-1, 1[$ on définit une loi $\star$ par

$$\forall x, y \in G, x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 18 [02207] [correction]
[Addition des vitesses en théorie de la relativité]
Soit $c > 0$ (c correspond à la vitesse - ou célérité - de la lumière) et $I =]-c, c[$.
a) Montrer

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \star y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}} \in I$$

b) Montrer que la loi $\star$ munit I d'une structure de groupe abélien.
Cette loi $\star$ correspond à l'addition des vitesses portées par un même axe en théorie de la relativité.

Exercice 19 [03199] [correction]
Soient $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$. Les points $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ sont donnés.
On construit le point P_0 par les conditions :
- les droites (P_0M_0) et (Ox) sont parallèles ;
- $P_0 \in (AB)$.
On construit le point Q_0 par les conditions :
- les droites (P_0Q_0) et (M_1B) sont parallèles ;
- $Q_0 \in (AM_1)$.
Soit le point $M_2(x_2, y_2)$ tel que le quadrilatère $(M_0P_0Q_0M_2)$ soit un parallélogramme.
On pose

$$M_2 = M_0 \star M_1$$

a) Démontrer

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1y_0 \\ y_0y_1 \end{pmatrix}$$

b) Démontrer que la loi $\star$ est associative, admet un élément neutre et que, si $y_0 \neq 0$, le point M_0 admet un inverse.
c) On définit une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de M_0, de M_1 et de la relation de récurrence valable pour tout entier $n \geqslant 2$

$$M_n = M_{n-1} \star M_{n-2}$$

Déterminer y_n en fonction de y_0 et de y_1.

Sous-groupes

Exercice 20 [02208] [correction]
Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $H = \{a + \omega b / a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

Exercice 21 [02209] [correction]
Soient $a \in \mathbb{C}^\star$ et $H = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

Exercice 22 [02210] [correction]
Soit a un élément d'un ensemble E. On forme $H = \{f \in \mathcal{S}_E / f(a) = a\}$.
Montrer que H est un sous-groupe du groupe de permutation $(\mathcal{S}_E, \circ)$

Exercice 23 [02211] [correction]
Soit $(G, \times)$ un groupe, H un sous groupe de $(G, \times)$ et $a \in G$.
a) Montrer que $aHa^{-1} = \left\{axa^{-1} / x \in H\right\}$ est un sous groupe de $(G, \times)$.
b) A quelle condition simple $aH = \{ax / x \in H\}$ est un sous groupe de $(G, \times)$?

Exercice 24 [02212] [correction]
On appelle centre d'un groupe $(G, \star)$, la partie C de G définie par

$$C = \{x \in G \mid \forall y \in G, x \star y = y \star x\}$$

Montrer que C est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Exercice 25 [02213] [correction]
Soit $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f_{a,b}(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star, b \in \mathbb{C}$.
Montrer que $(\{f_{a,b} / a \in \mathbb{C}^\star, b \in \mathbb{C}\}, \circ)$ est un groupe.

Exercice 26 [02214] [correction]
On considère les applications de $E = \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ dans lui-même définies par :

$$i(x) = x, f(x) = 1 - x, g(x) = \frac{1}{x}, h(x) = \frac{x}{x-1}, k(x) = \frac{x-1}{x}, \ell(x) = \frac{1}{1-x}$$

a) Démontrer que ce sont des permutations de E.
b) Construire la table donnant la composée de deux éléments quelconques de l'ensemble $G = \{i, f, g, h, k, l\}$.
c) Montrer que G muni de la composition des applications est un groupe non commutatif.

Exercice 27 [02215] [correction]
Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, \star)$ tels que $H \cup K$ en soit aussi un sous-groupe. Montrer que $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 28 [02216] [correction]
Soient $(G, \star)$ un groupe et A une partie finie non vide de G stable pour $\star$.
a) Soient $x \in A$ et $\varphi : \mathbb{N} \to G$ l'application définie par $\varphi(n) = x^n$.
Montrer que φ n'est pas injective.
b) En déduire que $x^{-1} \in A$ puis que A est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Exercice 29 [02217] [correction]
Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak / k \in \mathbb{Z}\}$.
a) Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
On se propose de montrer que, réciproquement, tout sous groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme.
b) Vérifier que le groupe $\{0\}$ est de la forme voulue.
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
c) Montrer que $H^+ = \{h \in H \mid h > 0\}$ possède un plus petit élément. On note $a = \min H^+$.
d) Etablir que $a\mathbb{Z} \subset H$.
e) En étudiant le reste de la division euclidienne d'un élément de H par a montrer que $H \subset a\mathbb{Z}$.
f) Conclure que pour tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$, il existe un unique $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

Exercice 30 [03354] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note U_n l'ensemble des racines $n$ème de l'unité :

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$$

Montrer que

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} U_n$$

est un groupe multiplicatif.

Anneaux et corps

Exercice 31 [02232] [correction]
On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de compositions internes notées $+$ et $\star$ par :

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \text{ et } (a,b)\star(c,d)=(ac,ad+bc)$$

a) Montrer que $(\mathbb{Z}^2,+,\star)$ est un anneau commutatif.
b) Montrer que $A=\{(a,0)/a\in\mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2,+,\star)$.

Exercice 32 [02234] [correction]
On dit qu'un élément x d'un anneau $(A,+,\times)$ est nilpotent s'il existe $n\in\mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$x^n=0_A$$

Soient x et y deux éléments d'un anneau $(A,+,\times)$.
a) Montrer que si x est nilpotent et que x et y commutent, alors xy est nilpotent.
b) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x+y$ est nilpotent.
c) Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
d) Montrer que si x est nilpotent alors $1-x$ est inversible. Préciser $(1-x)^{-1}$.

Exercice 33 [02235] [correction]
[Anneau de Boole 1815-1864)
On considère $(A,+,\times)$ un anneau de Boole c'est à dire un anneau non nul tel que tout élément est idempotent pour la deuxième loi ce qui signifie

$$\forall x\in A,\ x^2=x$$

a) Montrer

$$\forall (x,y)\in A^2,\ xy+yx=0_A$$

et en déduire que

$$\forall x\in A,\ x+x=0_A$$

En déduire que l'anneau A est commutatif.
b) Montrer que la relation binaire définie sur A par

$$x\preccurlyeq y\Leftrightarrow yx=x$$

est une relation d'ordre.
c) Montrer que

$$\forall (x,y)\in A^2,\ xy(x+y)=0_A$$

En déduire qu'un anneau de Boole intègre ne peut avoir que deux éléments.

Exercice 34 [02243] [correction]
Pour $a,b\in\mathbb{R}$, on pose

$$a\top b=a+b-1 \text{ et } a\star b=ab-a-b+2$$

Montrer que $(\mathbb{R},\top,\star)$ est un corps.

Exercice 35 [02246] [correction]
Soit F un sous corps de $(\mathbb{Q},+,\times)$. Montrer que $F=\mathbb{Q}$.

Exercice 36 [01221] [correction]
Soient a et b deux éléments d'un anneau $(A,+,\times)$. Montrer que si $1-ab$ est inversible alors $1-ba$ l'est aussi.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \star a = \ln(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^a) = \ln(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b) = a \star b$. $\star$ est commutative.
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \star b) \star c = \ln(\mathrm{e}^{a \star b} + \mathrm{e}^c) = \ln(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c) = a \star (b \star c)$. $\star$ est associative.
$a \star \varepsilon = a \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^\varepsilon) = a \Leftrightarrow \mathrm{e}^\varepsilon = 0$. Il n'y a donc pas de neutre.
$a \star b = a \star c \Rightarrow \ln(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b) = \ln(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^c) \Rightarrow \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^c \Rightarrow b = c$. Tout élément est régulier

Exercice 2 : [énoncé]
a) $1 - (x + y - xy) = (1 - x)(1 - y)$ donc si $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$ alors $x \star y \leqslant 1$.
Par suite $\star$ est bien une loi de composition interne sur
$\star$ est clairement commutative et associative.
b) 0 est élément neutre de E.
c) Si $x \in]0, 1]$ alors pour tout $y \in [0, 1]$, $x \star y = x(1 - y) + y > 0$ et donc x n'est pas inversible (dans $[0, 1]$).
Ainsi, seul 0 est inversible.
Pour tout $x, y, z \in [0, 1]$, $x \star y = x \star z \Leftrightarrow y(1 - x) = z(1 - x)$.
Par suite, tout $x \in [0, 1[$ est régulier tandis que 1 ne l'est visiblement pas.

Exercice 3 : [énoncé]
$\star$ est bien une loi de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$.
Si $\star$ est commutative sur E, elle l'est aussi sur $\mathcal{P}(E)$.
Si $\star$ est associative sur E, elle l'est aussi sur $\mathcal{P}(E)$.
Si $\star$ possède un neutre e dans E, alors $\star$ possède un neutre dans $\mathcal{P}(E)$ à savoir $\{e\}$ car

$$A \star \{e\} = \{a \star e / a \in A\} = A$$

La loi $\star$ est distributive sur l'union

$$A \star (B \cup C) = \{a \star x / a \in A, x \in B \cup C\} = (A \star B) \cup (A \star C)$$

En revanche la distributivité sur l'intersection est fausse. On obtient un contre exemple dans $\mathbb{R}$ avec $\star = +$, $A = \{1, -1\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{-1\}$ où

$$A \star B \cap C = A \star \emptyset = \emptyset$$

et

$$(A \star B) \cap A \star C = \{2, 0\} \cap \{-2, 0\} = \{0\}$$

Exercice 4 : [énoncé]
Supposons f est bijective.
Soient $g, h : E \to E$. Si $f \circ g = f \circ h$ alors $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h$ puis $g = h$.
De même $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ et donc f est un élément régulier.
Supposons que f est un élément régulier.
Soient $x, x' \in E$. Si $f(x) = f(x')$ alors $f \circ g = f \circ h$ avec g et h les fonctions constantes égales à x et x'.
Par la régularité de f, on obtient $g = h$ et donc $x = x'$.
Si E est un singleton alors f est nécessairement surjective.
Sinon, on peut construire deux fonctions g et h telle que

$$\forall x \in E, g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Im} f$$

On a $g \circ f = h \circ f$ donc, par la régularité de f, $g = h$ d'où $\mathrm{Im} f = E$ puis f surjective.

Exercice 5 : [énoncé]
Si a est symétrisable alors considérons l'application $g : E \to E$ définie par $g(x) = a^{-1} \star x$.
On a $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ donc f est bijective.
Si f est bijective alors considérons b l'antécédent du neutre e. On a $a \star b = e$.
De plus $f(b \star a) = a \star b \star a = e \star a = a = f(e)$ donc $b \star a = e$ car f injective.
Par suite, a est symétrisable et b est son symétrique.

Exercice 6 : [énoncé]
a) On a

$$(x \star y) \star (x \star y) = (x \star x) \star (y \star y) = x \star y$$

b) On a

$$x \star x = x \Rightarrow (x \star x)^{-1} = x^{-1} \Rightarrow x^{-1} \star x^{-1} = x^{-1}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) Supposons $\star$ commutative :

$$\forall x, y \in F, y \top x = \varphi(\varphi^{-1}(y) \star \varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x) \star \varphi^{-1}(y)) = x \top y$$

donc $\top$ est commutative.
Supposons $\star$ associative :

$$\forall x, y, z \in F, (x \top y) \top z = \varphi(\varphi^{-1}(x \top y) \star \varphi^{-1}(z)) = \varphi(\varphi^{-1}(x) \star \varphi^{-1}(y) \star \varphi^{-1}(z)) = x \top (y$$

donc $\top$ est associative.
b) Supposons que $\star$ possède un neutre e et montrons que $f = \varphi(e)$ est neutre pour $\top$.

$$\forall x \in F, x \top f = \varphi(\varphi^{-1}(x) \star e) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$$

et

$$f \top x = \varphi(e \star \varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$$

donc f est neutre pour $\top$.

Exercice 8 : [énoncé]
Par la surjectivité de f, il existe $b \in E$ tel que $a \star b \star a = a$.
a) $a \star b = a \star a \star c \star a$
Pour tout $x \in E$, il existe $\alpha \in E$ tel qu'on peut écrire $x = a \star \alpha \star a$.
Pour $e = a \star b$, $e \star x = a \star b \star a \star \alpha \star a = a \star \alpha \star a = x$.
Pour $e' = b \star a$, $x \star e' = x \star b \star a = a \star \alpha \star a \star b \star a = a \star \alpha \star a$.
$e \star e' = e = e'$.
b) Puisque $a \star b = b \star a = e$, a est symétrisable et $\operatorname{sym}(a) = b$.
De plus $g : x \to b \star x \star b$ est clairement application réciproque de f.

Exercice 9 : [énoncé]
Considérons l'application $f : \mathbb{N} \to E$ définie par $f(n) = x^{\star n}$.
Puisque N est infini et que l'ensemble E est fini, l'application f n'est pas injective et donc il existe $p > q \in \mathbb{N}$ tels que $f(p) = f(q)$ i.e.

$$x^{\star p} = x^{\star q}$$

Pour tout $y \in E$.

$$x^{\star p} \star y = x^{\star q} \star y$$

Puisque x est régulier, on obtient :

$$x^{\star (p-q)} \star y = y$$

De même $y \star x^{\star (p-q)} = y$ et donc $e = x^{\star (p-q)}$ est neutre.

Exercice 10 : [énoncé]
Soit a un élément régulier.
Considérons l'application $f : E \to E$ définie par $f(x) = a \star x$.
L'application f est injective.
E est fini donc f est bijective et par suite surjective d'où $\exists b \in E$ tel que $a \star b = e$.
$f(e) = a$ et $f(b \star a) = a \star b \star a = e \star a = a$ donc par l'injectivité de f : $b \star a = e$.
Finalement a est inversible.
On peut aussi partir de $f : \mathbb{N} \to E$ définie par $f(n) = a^{\star n}$ qui n'est pas injective.

Exercice 11 : [énoncé]
Soit $x \in E$. Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ déterminée par

$$x_1 = x \text{ et } x_{n+1} = x_n \top x_n$$

i.e.

$$x_{n+1} = x^{2^n}$$

Puisque l'ensemble E est fini, les éléments $x_1, x_2, \ldots$ ne peuvent être deux à deux distincts et donc il existe $p < q$ tels que

$$x^{2^p} = x^{2^q}$$

Posons alors $a = x^{2^p}$ et $n = q - p \in \mathbb{N}^\star$ de sorte que

$$a^{2^n} = a$$

Si $n = 1$, $e = a$ convient.
Si $n > 1$, il faut construire e à partir de a... Après quelques essais pour de premières valeurs de n, on est amené à proposer $e = a^{2^n - 1} \in E$. On constate alors

$$e \top e = e^2 = a^{2^{n+1} - 2} = a^{2^n} \top a^{2^n - 2} = a \top a^{2^n - 2} = a^{2^n - 1} = e$$

Exercice 12 : [énoncé]
On observe que

$$\forall x \in G, x^{-1} = x$$

donc

$$\forall x, y \in G,\ y \star x = (y \star x)^{-1} = x^{-1} \star y^{-1} = x \star y$$

Exercice 13 : [énoncé]
Tout élément x de E est symétrisable et $\operatorname{sym}(x) = x$ donc $(E, \star)$ est un groupe.
De plus

$$x \star y = \operatorname{sym}(x \star y) = \operatorname{sym}(y) \star \operatorname{sym}(x) = y \star x$$

donc $(E, \star)$ est abélien.

Exercice 14 : [énoncé]
La loi $\star$ est déjà associative. Montrons qu'elle est possède un neutre. Soit x un élément de E. La suite des x^n avec

$$x^n = x \star \cdots \star x \ (n \text{ termes}),\ n \geqslant 1$$

ne peut être formé d'éléments deux à deux distincts car E est un ensemble fini. Il existe donc $n, k > 0$ vérifiant
$$x^{n+k} = x^n$$
Posons alors $e = x^k$ et vérifions que e est neutre pour la loi $\star$. Soit $y \in E$. On a $y \star x^{n+k} = y \star x^n$ et donc $(y \star x^k) \star x^n = y \star x^n$. Par régularité de x^n, on obtient $y \star e = y$. On montre de même $e \star y$.
Il reste maintenant à vérifier que tout élément $a \in E$ est inversible.
Considérons l'application $f : E \to E$ définie par $f(x) = a \star x$.
a est régulier donc l'application f est injective.
E est fini donc f est bijective et par suite surjective d'où l'existence d'un $b \in E$ tel que $a \star b = e$.
$f(e) = a$ et $f(b \star a) = a \star b \star a = e \star a = a$ donc par l'injectivité de f : $b \star a = e$.
Finalement a est inversible et $(E, \star)$ est un groupe.

Exercice 15 : [énoncé]
Si un élément figure deux fois dans une même ligne correspondant aux valeurs de composition avec x, c'est qu'il existe $a \neq b$ tel que $x \star a = x \star b$.
Or tout élément d'un groupe est régulier, ce cas de figure ci-dessus est donc impossible.
Comme le groupe G à n élément, qu'il y a n cases sur chaque ligne et que chaque ligne ne peut contenir deux fois le même élément, chaque ligne contient chaque élément de G une fois et une seule.
On raisonne de même avec les colonnes.

Exercice 16 : [énoncé]
a) La loi $\star$ est bien définie. Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in G$
$$((x, y) \star (x', y')) \star (x'', y'') = (xx', xy' + y) \star (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$
et
$$(x, y) \star ((x', y') \star (x'', y'')) = (x, y) \star (x'x'', x'y'' + y') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$
donc $\star$ est associative.
$$(x, y) \star (1, 0) = (x, y) \text{ et } (1, 0) \star (x, y) = (x, y)$$
donc $(1, 0)$ est élément neutre.
$$(x, y) \star (1/x, -y/x) = (1, 0) \text{ et } (1/x, -y/x) \star (x, y) = (1, 0)$$
donc tout élément est symétrisable.
Finalement $(G, \star)$ est un groupe.
$(1, 2) \star (3, 4) = (3, 6)$ et $(3, 4) \times (1, 2) = (3, 10)$ donc le groupe n'est pas commutatif.
b) $H = \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ est inclus dans G.
$(1, 0) \in H$.
$$\forall (x, y), (x', y') \in H,\ (x, y) \star (x', y') \in H$$
car $xx' > 0$
$$\forall (x, y) \in H,\ (x, y)^{-1} = (1/x, -y/x) \in H$$
car $1/x > 0$.
Ainsi H est un sous groupe de $(G, \star)$.

Exercice 17 : [énoncé]
Notons que $\frac{x+y}{1+xy}$ existe pour tout $x, y \in G$ car $1 + xy > 0$.
On a
$$x + y - (1 + xy) = (1 - x)(y - 1) < 0$$
donc $\frac{x+y}{1+xy} < 1$ et de même $\frac{x+y}{1+xy} > -1$ d'où
$$\frac{x + y}{1 + xy} \in G$$
Par suite la loi $\star$ est bien définie.
La loi $\star$ est clairement commutative.
Soient $x, y, z \in G$,
$$(x \star y) \star z = \frac{(x \star y) + z}{1 + (x \star y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz} = x \star (y \star z)$$
La loi $\star$ est donc associative.
0 est neutre pour $\star$ puisque
$$\forall x \in G, x \star 0 = x$$
Enfin
$$\forall x \in G,\ x \star (-x) = 0$$
donc tout élément x de G est symétrisable et $\mathrm{sym}(x) = -x$.
Finalement $(G, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 18 : [énoncé]
a) On a

$$\begin{aligned} x \star y \in I &\Leftrightarrow xy + c(x+y) + c^2 > 0 \text{ et } xy - c(x+y) + c^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+c)(y+c) > 0 \text{ et } (x-c)(y-c) > 0 \end{aligned}$$

Par suite

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x \star y \in I$$

b) $\star$ est clairement commutative.
$\star$ est associative puisque

$$\forall x,y,z \in I,\ (x \star y) \star z = \frac{x+y+z+\frac{xyz}{c^2}}{1+\frac{xy+yz+zx}{c^2}} = x \star (y \star z)$$

0 est élément neutre car

$$\forall x \in I,\ x \star 0 = 0 \star x = x$$

Enfin

$$\forall x \in I,\ (-x) \star x = x \star (-x) = 0$$

donc tout élément de I est symétrisable dans I.
Finalement $(I, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 19 : [énoncé]
a) On a

$$P_0 \left| \begin{array}{l} 1 - y_0 \\ y_0 \end{array} \right. \text{ et } Q_0 \left| \begin{array}{l} 1 + y_0(x_1 - 1) \\ y_0 y_1 \end{array} \right.$$

(en considérant que les cas singuliers sont les prolongements du cas général)
On en déduit

$$\begin{cases} x_2 = x_0 + y_0 x_1 \\ y_2 = y_0 y_1 \end{cases}$$

b) Avec des notations immédiates

$$(M_0 \star M_1) \star M_2 \left| \begin{array}{l} (x_0 + y_0 x_1) + (y_0 y_1) x_2 \\ (y_0 y_1) y_2 \end{array} \right. \text{ et } M_0 \star (M_1 \star M_2) \left| \begin{array}{l} x_0 + y_0(x_1 + y_1 x_2) \\ y_0(y_1 y_2) \end{array} \right.$$

et on vérifie bien l'associativité de la loi $\star$.
On remarque que

$$B \star M = M \star B = M$$

donc B est élément neutre de la loi $\star$.
Enfin si $y_0 \neq 0$ alors pour

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0/y_0 \\ y_1 &= 1/y_0 \end{aligned}$$

on observe

$$M_0 \star M_1 = M_1 \star M_0 = B$$

et donc on peut affirmer que M_0 est inversible d'inverse M_1.
c) On a

$$y_n = y_{n-1} y_{n-2}$$

et on peut donc affirmer qu'il est possible d'écrire y_n sous la forme

$$y_n = y_0^{a_n} y_1^{b_n}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_0 = 0, b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont récurrente linéaires d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 = r + 1$ de racines

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On obtient après calculs

$$a_n = \frac{r_2}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{r_1}{r_1 - r_2} r_2^n \text{ et } b_n = \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1}$$

Exercice 20 : [énoncé]
$H \subset \mathbb{C}$, $0 = 0 + \omega.0 \in H$.
Soient $x, y \in H$. On peut écrire $x = a + \omega b$ et $y = a' + \omega b'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ et alors

$$x - y = (a - a') + \omega(b - b')$$

avec $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b - b' \in \mathbb{Z}$ donc $x - y \in H$.
Ainsi H est un sous groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

Exercice 21 : [énoncé]
$H \subset \mathbb{C}^\star$, $1 = a^0 \in H$.

Soient $x, y \in H$, on peut écrire $x = a^n$ et $y = a^m$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$xy^{-1} = a^{n-m}$$

avec $n - m \in \mathbb{Z}$ donc $xy^{-1} \in H$.
Ainsi H est un sous groupe de $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

Exercice 22 : [énoncé]
$H \subset \mathcal{S}_E$, $\mathrm{Id}_E \in H$ car $\mathrm{Id}_E(a) = a$.
Soient $f, g \in H$, $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a) = a$ donc $f \circ g \in H$.
Soit $f \in H$, $f^{-1}(a) = a$ car $f(a) = a$ donc $f^{-1} \in H$.
Ainsi H est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_E, \circ)$.

Exercice 23 : [énoncé]
a) $aHa^{-1} \subset G$, $e = aea^{-1} \in aHa^{-1}$.
Soient $axa^{-1}, aya^{-1} \in aHa^{-1}$ avec $x, y \in H$ on a

$$(axa^{-1})(ay^{-1}a^{-1}) = a(xy^{-1})a^{-1} \in aHa^{-1}$$

b) $e \in aH \Rightarrow a^{-1} \in H \Rightarrow a \in H$. Inversement

$$a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \Rightarrow aH = H$$

La condition simple cherchée est $a \in H$.

Exercice 24 : [énoncé]
$C \subset G$ et $e \in G$ car

$$\forall y \in G, e \star y = y = y \star e$$

Soient $x, x' \in C$. Pour tout $y \in G$

$$x \star x' \star y = x \star y \star x' = y \star x \star x'$$

donc $x \star x' \in C$
Soit $x \in C$. Pour tout $y \in G$,

$$x \star y^{-1} = y^{-1} \star x$$

donne

$$(x \star y^{-1})^{-1} = (y^{-1} \star x)^{-1}$$

i.e.

$$y \star x^{-1} = x^{-1} \star y$$

donc $x^{-1} \in C$.
Ainsi C est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Exercice 25 : [énoncé]
Posons $H = \{f_{a,b}/a \in \mathbb{C}^\star, b \in \mathbb{C}\}$ et montrons que H est un sous-groupe du groupe de permutations $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}, \circ)$.
$\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = f_{1,0} \in H$.

$$Z = az + b \Leftrightarrow z = \frac{1}{a}Z - \frac{b}{a}$$

donc $f_{a,b} \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ et $f_{a,b}^{-1} = f_{1/a,-b/a}$. Ainsi $H \subset \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ et

$$\forall f \in H, f^{-1} \in H$$

Enfin $f_{a,b} \circ f_{c,d}(z) = a(cz + d) + b = acz + (ad + b)$ donc $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$.
Ainsi,

$$\forall f, g \in H, f \circ g \in H$$

On peut conclure.

Exercice 26 : [énoncé]
a) Il est clair que i, f et g sont des permutations de E.

$$h(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{1-x} = f(g(f(x)))$$

donc $h = f \circ g \circ f$ et donc $h \in \mathcal{S}_E$.
De même $k = f \circ g \in \mathcal{S}_E$ et $\ell = g \circ f \in \mathcal{S}_E$
b)

$\circ$	i	f	g	h	k	ℓ
i	i	f	g	h	k	ℓ
f	f	i	k	ℓ	g	h
g	g	ℓ	i	k	h	f
h	h	k	ℓ	i	f	g
k	k	h	f	g	ℓ	i
ℓ	ℓ	g	h	f	i	k

c) G est un sous groupe de $(\mathcal{S}_E, \circ)$ car G contient i, est stable par composition et par passage à l'inverse.
De plus ce groupe n'est pas commutatif car $g \circ f \neq f \circ g$.

Exercice 27 : [énoncé]
Par l'absurde supposons

$$H \not\subset K \text{ et } K \not\subset H$$

Il existe $h \in H$ tel que $h \notin K$ et $k \in K$ tel que $k \notin H$.

On a $h, k \in H \cup K$ donc $h \star k \in H \cup K$ car $H \cup K$ sous-groupe.
Si $h \star k \in H$ alors $k = h^{-1} \star (h \star k) \in H$ car H sous-groupe. Or ceci est exclu.
Si $h \star k \in K$ alors $h = (h \star k) \star k^{-1} \in K$ car K sous-groupe. Or ceci est exclu.
Ainsi $h \star k \notin H \cup K$. Absurde.

Exercice 28 : [énoncé]
a) L'application φ est à valeurs dans A qui est un ensemble fini et au départ de $\mathbb{N}$ qui est infini donc φ n'est pas injective.
b) Par la non injectivité de φ, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\varphi(n+p) = \varphi(n)$.
On a alors $x^{(n+p)} = x^n \star x^p = x^n$ donc $x^p = e$ par régularité de $x^n \in G$.
Par suite $x^{-1} = x^{(p-1)} \in A$.
A est non vide, stable pour $\star$ et stable par inversion donc A est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Exercice 29 : [énoncé]
a) $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, $0 = a.0 \in a\mathbb{Z}$.
Soient $x, y \in a\mathbb{Z}$, on peut écrire $x = ak$ et $y = a\ell$ avec $k, \ell \in \mathbb{Z}$.
$x - y = a(k - \ell)$ avec $k - \ell \in \mathbb{Z}$ donc $x - y \in a\mathbb{Z}$.
Ainsi $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
b) Pour $a = 0 \in \mathbb{N}$, $\{0\} = a\mathbb{Z}$.
c) Puisque H est non vide et non réduit à $\{0\}$, il existe $h \in H$ tel que $h \neq 0$.
Si $h > 0$ alors $h \in H^+$, si $h < 0$ alors $-h \in H$ (car H sous-groupe) et $-h > 0$ donc $-h \in H^+$.
Dans les deux cas $H^+ \neq \emptyset$.
H^+ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc H^+ possède un plus petit élément.
d) $0 \in H$ et $a \in H$.
Par récurrence, la stabilité de H donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, a.n = a + \cdots + a \in H$$

Par passage à l'opposé, la stabilité de H par passage au symétrique donne

$$\forall n \in \mathbb{Z}, an \in H$$

Ainsi $a\mathbb{Z} \subset H$.
e) Soit $x \in H$. La division euclidienne de x par $a \neq 0$ donne $x = aq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < a$.
On a $r = x - aq$ avec $x \in H$ et $aq \in a\mathbb{Z} \subset H$ donc $r \in H$.
Si $r > 0$ alors $r \in H^+$ or $r < a = \min H^+$ donc cela est impossible.
Il reste $r = 0$ ce qui donne $x = aq \in a\mathbb{Z}$. Ainsi $H \subset a\mathbb{Z}$ et finalement $H = a\mathbb{Z}$.
f) L'existence est établie ci-dessus. Il reste à montrer l'unicité.
Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$. On a $a \in a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ donc $b \mid a$ et de même $a \mid b$, or $a, b \geqslant 0$ donc $a = b$.

Exercice 30 : [énoncé]
Montrons que V est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^\star, \times)$.
La partie V est incluse dans $\mathbb{C}^\star$ et évidemment non vide.
Soient $z \in V$. Il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $z^n = 1$ et alors $(z^{-1})^n = 1$ donc $z^{-1} \in V$.
Soient $z, z' \in V$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}^\star$ tels que $z^n = z'^m = 1$. On a alors $(zz')^{nm} = (z^n)^m (z'^m)^n = 1$ et donc $zz' \in V$.
Finalement V est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star, \times)$ et donc $(V, \times)$ est un groupe.

Exercice 31 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que $(\mathbb{Z}^2, +)$ est un groupe commutatif.
Avec des notations entendues

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc) = (c, d) \star (a, b)$$

La loi $\star$ est donc commutative. De plus

$$((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) = (ac, ad + bc) \star (e, f) = (ace, acf + ade + bce) = (a, b) \star ((c, d) \star (e, f))$$

La loi $\star$ est donc associative.
Le couple $(1, 0)$ est neutre pour la loi $\star$, car $(a, b) \star (1, 0) = (a, b)$
Enfin

$$((a, b) + (c, d)) \star (e, f) = (a + c, b + d) \star (e, f) = (ae + ce, af + cf + be + de)$$

donc

$$((a, b) + (c, d)) \star (e, f) = (ae, af + be) + (ce, cf + de) = (a, b) \star (e, f) + (c, d) \star (e, f)$$

et la loi $\star$ est distributive sur $+$.
Finalement $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif.
b) $A \subset \mathbb{Z}^2$, $(1, 0) \in A$.
Pour tout $(a, 0), (b, 0) \in A$, on a

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0) \in A$$

et

$$(a, 0) \star (b, 0) = (ab, 0) \in A$$

A est donc un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$. Puisque x et y commutent

$$(xy)^n = (xy)(xy)\dots(xy) = x^n y^n = 0_A.y^n = 0_A$$

donc xy nilpotent.
b) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x^n = y^m = 0_A$. Puisque x et y commutent, on peut exploiter la formule du binôme

$$(x+y)^{m+n-1} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^k y^{m+n-1-k}$$

En séparant la somme en deux

$$(x+y)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{k} x^k y^{m+n-1-k} + \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^k y^{m+n-1-k}$$

Or

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\},\ y^{m+n-1-k} = 0_A$$

car $m+n-1-k \geqslant m$ et

$$\forall k \geqslant n, x^k = 0_A$$

donc

$$(x+y)^{m+n-1} = 0_A + 0_A = 0_A$$

Ainsi $x+y$ est nilpotent.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(xy)^n = 0_A$.

$$(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = y.0_A.x = 0_A$$

donc yx nilpotent.
d) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$. Par factorisation, on peut écrire

$$1 = 1 - x^n = (1-x)y = y(1-x)$$

avec $y = 1 + x + \dots + x^{n-1}$.
Par suite $1-x$ est inversible et y est son inverse.

Exercice 33 : [énoncé]
a) $(x+y)^2 = (x+y)$ donne $x^2 + y^2 + xy + yx = x + y$ puis $xy + yx = 0$ sachant $x^2 = x$ et $y^2 = y$.
Pour $y = 1$ on obtient $x + x = 0_A$.
b) Comme $x^2 = x$, $\preccurlyeq$ est réflexive.
Si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ alors $yx = x$ et $xy = y$ donc $xy + yx = x + y = 0$.
Or $x + x = 0$, donc $x + y = x + x$, puis $y = x$.
Si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$ alors $yx = x$ et $zy = y$ donc $zx = zyx = yx = x$ i.e. $x \preccurlyeq z$.
Ainsi $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur A.
c) $xy(x+y) = xyx + xy^2 \underset{yx=-xy}{=} -x^2y + xy^2 = -xy + xy = 0$.
Si A est intègre alors : $xy(x+y) = 0_A \Rightarrow x = 0_A$, $y = 0_A$ ou $x + y = 0_A$.
Or $x + y = 0 = x + x$ donne $y = x$.
Ainsi, lorsqu'on choisit deux éléments de A, soit l'un deux est nul, soit ils sont égaux.
Une telle propriété est impossible si $\mathrm{Card}(A) \geqslant 3$. Par suite $\mathrm{Card}(A) = 2$ car A est non nul.

Exercice 34 : [énoncé]
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi : x \mapsto x - 1$. φ est une bijection et on vérifie

$$\varphi(a \top b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ et } \varphi(a \star b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$$

Par la bijection φ^{-1} la structure de corps sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ est transportée sur $(\mathbb{R}, \top, \star)$.
Notamment, les neutres de $(\mathbb{R}, \top, \star)$ sont 1 et 2.

Exercice 35 : [énoncé]
$0, 1 \in F$ puis par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, n \in F$. Par passage à l'opposée $\forall p \in \mathbb{Z}, p \in F$.
Par passage à l'inverse : $\forall q \in \mathbb{N}^\star, 1/q \in F$. Par produit $\forall r = p/q \in \mathbb{Q}, r \in F$.

Exercice 36 : [énoncé]
Supposons $1 - ab$ inversible et notons x son inverse de sorte que $(1-ab)x = 1$
On observe

$$(1-ba)bxa = ba$$

donc

$$(1-ba)bxa = (ba-1) + 1$$

puis

$$(1-ba)(1+bxa) = 1$$

L'identité est aussi valable dans l'autre sens et donc $1 - ba$ est inversible avec

$$(1-ba)^{-1} = 1 + b\,(1-ab)^{-1}\,a$$