Suites et séries de fonctions vectorielles

Continuité

Exercice 1 [01186] [correction]
Soit E une algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|\,.\,\|$ vérifiant

$$\forall a, b \in E, \|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$$

a) Soit $a \in E$ vérifiant $\|a\| < 1$. Montrer que $1_E - a$ est inversible et exprimer son inverse comme la somme d'une série.
b) Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E.
c) Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue.

Exercice 2 [04095] [correction]
a) Pour quel $z \in \mathbb{C}$ peut-on définir

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-z)} \,?$$

b) Établir que la fonction f est continue sur le domaine correspondant.

Dérivation et intégration

Exercice 3 [00574] [correction]
On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|\,.\,\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k$$

a) Montrer que f est bien définie et que $f(t) = (I - tA)^{-1}$.
b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f'(t) = A(I - tA)^{-2}$.

Exercice 4 [00573] [correction]
On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|\,.\,\|$vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k$$

a) Montrer que f est bien définie.
b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$(I - tA) f'(t) = A$$

Exponentielles

Exercice 5 [03135] [correction]
Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Etablir

$$\ker\left(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\right) = \ker u \text{ et } \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Im} u$$

Exercice 6 [02725] [correction]
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr} A}$.

Exercice 7 [03011] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{e}^A \in \mathbb{R}[A]$.

Exercice 8 [01185] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Etablir que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \exp(A)$$

Exercice 9 [02416] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \exp(A + B)$$

Exercice 10 [03094] [correction]
On note
$$T=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}/a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$
et T^+ le sous-ensemble de T formé des matrices de coefficients diagonaux strictement positifs.
a) Soit $M\in T$. Déterminer les puissances de M. Calculer $\exp(M)$.
b) L'application $\exp : T\to T^+$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 11 [03451] [correction]
Sur $E=\mathbb{R}_n[X]$, on note D l'endomorphisme de dérivation et T l'endomorphisme de translation définis par
$$D(P)=P'(X) \text{ et } T(P(X))=P(X+1)$$
Etablir
$$\exp(D)=T$$

Exercice 12 [00340] [correction]
Soit T une matrice réelle carrée d'ordre n antisymétrique.
Etablir que la matrice $\exp(T)$ est orthogonale.

Exercice 13 [02742] [correction]
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que peut-on dire de $\exp A$?

Calcul d'exponentielles de matrices

Exercice 14 [02710] [correction]
On pose
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Sans diagonaliser la matrice A, déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal et calculer A^k pour $k\in\mathbb{N}$.
Evaluer $\exp(A)$.

Exercice 15 [02711] [correction]
Soit
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. Calculer $\exp A$ et $\exp(A)\exp({}^tA)$.

Exercice 16 [02701] [correction]
Soient $a\in\mathbb{R}^\star$ et
$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$
a) Calculer le polynôme minimal de A.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
c) Calculer e^A.

Exercice 17 [02712] [correction]
Soit
$$A=\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$$
Etudier la diagonalisabilité de A, déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A, calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n.

Exercice 18 [03215] [correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\mathrm{Sp}A=\{-2,1,3\}$$
a) Exprimer A^n en fonction de A^2, A et I_3.
b) Calculer
$$\mathrm{ch}(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^{2n}}{(2n)!}$$

Exercice 19 [02709] [correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $A^4=I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Puisque $\|a\|<1$ et $\|a^n\|\leqslant\|a\|^n$, la série $\sum a^n$ est absolument convergente et sa somme S vérifie $(1_E-a)S=S(1_E-a)=1_E$ donc 1_E-a est inversible d'inverse S.
b) Pour $\alpha\in[0,1[$, on montre par convergence normale la continuité de $a\mapsto(1-a)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n$ sur $\bar{B}(0,\alpha)$. On en déduit que $x\mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E.
c) Soit $a\in U(E)$. Quand $x\in U(E)\to a$ alors $xa^{-1}\to 1_E$ donc $(xa^{-1})^{-1}\to 1_E^{-1}=1_E$ puis $x^{-1}=a^{-1}(xa^{-1})^{-1}\to a^{-1}$. Ainsi $x\mapsto x^{-1}$ est continue en chaque $a\in U(E)$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) Pour que les termes sommés aient un sens il faut $z\in\Omega=\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}^\star$.
Inversement, si $z\in\Omega=\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}^\star$ alors les termes sommés existent et puisque

$$\frac{1}{n(n-z)}\sim\frac{1}{n^2}$$

la série définissant $f(z)$ converge absolument. Finalement, f est définie sur Ω.
b) Posons $u_n:\Omega\to\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$u_n(z)=\frac{1}{n(n+z)}$$

Soient $a\in\mathbb{R}^+$ et $\Omega_a=\{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}^\star/\mathrm{Re}(z)\leqslant a\}$. Pour tout $z\in\Omega_a$

$$|u_n(z)|=\frac{1}{n}\frac{1}{|n-z|}$$

Pour $n\geqslant a$,

$$|n-z|\geqslant|n-\mathrm{Re}(z)|\geqslant n-a$$

et donc

$$|u_n(z)|=\frac{1}{n(n-a)}$$

Ce majorant indépendant de z est sommable, il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur Ω_a. Or les fonctions u_n sont continues, donc f est continue sur Ω_a. Ceci valant pour tout $a\geqslant 0$, on peut conclure que f est continue sur Ω.

Exercice 3 : [énoncé]
a) $\left\|t^kA^k\right\|=|t|^k\|A\|^k$ avec $|t|\,\|A\|<1$ donc la série converge simplement. De plus

$$(I-tA)\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k=\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k-\sum_{k=1}^{+\infty}t^kA^k=I$$

donc $(I-tA)f(t)=I$ d'où $f(t)=(I-tA)^{-1}$.
b) Soit $\rho\in[0,1/\|A\|[$. $t\mapsto t^kA^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $kt^{k-1}A^k$ avec $\left\|kt^{k-1}A^k\right\|_{\infty,[-\rho,\rho]}\leqslant k\rho^{k-1}\|A\|^k$ terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivée converge donc normalement sur $[-\rho,\rho]$ ce qui assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1/\|A\|,1/\|A\|[$ et

$$f'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)t^kA^{k+1}=A\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)t^kA^k\right)$$

Or par produit de Cauchy de série absolument convergente :

$$(f(t))^2=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}t^kA^kt^{n-k}A^{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^nA^n$$

donc

$$f'(t)=A(f(t))^2$$

Exercice 4 : [énoncé]
a) $\left\|\frac{1}{k}t^kA^k\right\|=\frac{1}{k}|t|^k\|A\|^k$ avec $|t|\,\|A\|<1$ donc la série converge simplement.
b) Soit $\rho\in[0,1/\|A\|[$. $t\mapsto\frac{1}{k}t^kA^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $t^{k-1}A^k$ avec $\left\|t^{k-1}A^k\right\|_{\infty,[-\rho,\rho]}\leqslant\rho^{k-1}\|A\|^k$ terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivées converge donc normalement sur $[-\rho,\rho]$ ce qui assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1/\|A\|,1/\|A\|[$ et $f'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^{k+1}=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k\right)A$. Or $(I-tA)\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k=\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k-\sum_{k=1}^{+\infty}t^kA^k=I$ donc $(I-tA)f'(t)=A$.

Exercice 5 : [énoncé]
Posons $n\in\mathbb{N}$ tel que $u^n=\tilde{0}$. On peut écrire

$$\mathrm{e}^u=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}u^k$$

Si $x \in \ker u$ alors

$$(\mathrm{e}^u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k(x) = x + 0 = x$$

et donc

$$x \in \ker(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E)$$

Inversement, supposons $x \in \ker(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E)$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} u^k(x) = 0$$

Si $u(x) \neq 0$ alors en posant $\ell \geqslant 1$ le plus grand entier tel que $u^\ell(x) \neq 0$ et en composant la relation précédente avec $u^{\ell-1}$ on obtient

$$u^\ell(x) = 0$$

ce qui est absurde.
On en déduit $u(x) = 0$ et donc $x \in \ker u$.
Ainsi

$$\ker(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \ker u$$

Puisque

$$\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k = u \circ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^{k-1} \right)$$

on a de façon immédiate

$$\mathrm{Im}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im} u$$

En vertu de l'égalité des noyaux et de la formule du rang, on peut affirmer

$$\dim \mathrm{Im}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \dim \mathrm{Im} u$$

et donc conclure

$$\mathrm{Im}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im} u$$

Exercice 6 : [énoncé]
A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\exp(A)$ est alors semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & \star' \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

d'où la relation.

Exercice 7 : [énoncé]
$\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un espace fermé. e^A étant la limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}[A]$, on peut affirmer que $\mathrm{e}^A \in \mathbb{R}[A]$.

Exercice 8 : [énoncé]
On a

$$\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{A^k}{k!}$$

Posons $f_k : \mathbb{N} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par

$$f_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{A^k}{k!} \text{ si } k \leqslant n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

On remarque que

$$\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_k(n)\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$ donc $\|f_k\|_\infty \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$ qui est terme général d'une série convergente. Il en découle que $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} f_k(n) = \frac{A^k}{k!}$ donc par le théorème de la double limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \exp(A)$$

Exercice 9 : [énoncé]
On a

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{A^k}{n^k} = I_p + \frac{1}{n} A + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi

$$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Puisque I et $\frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)$ commutent, on peut développer par la formule du binôme de Newton et obtenir :

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(A+B+o(1))^k$$

Posons $f_k : \mathbb{N}^\star \mapsto \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par

$$f_k(n) = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(A+B+o(1))^k \text{ si } k \leqslant n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

On remarque que

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

Montrons la convergence normale de la série des f_k.
Puisque $A+B+o(1) \to A+B$, la norme de $A+B+o(1)$ est bornée par un certain M.
On observe alors $\|f_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{k!}M^k$ en choisissant une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
La série $\sum f_k$ converge normale sur $\mathbb{N}^\star$, cela permet de permuter limite et somme infinie.
Or, pour k fixé, $f_k(n) \to \frac{(A+B)^k}{k!}$ quand $n \to +\infty$, donc

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Cas $a = c$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ M^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } \exp(M) = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

Cas $a \neq c$:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & \alpha_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_n = b\left(a^{n-1}c^0 + a^{n-2}c + \dots + a^0c^{n-1}\right) = b\frac{a^n - c^n}{a-c}$$

et

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} e^a & x \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \text{ avec } x = \frac{b(e^a - e^c)}{a-c}$$

b) Avec des notations immédiates, si $\exp(M) = \exp(M')$ alors par identification des coefficients diagonaux, on obtient $a = a'$ et $c = c'$.
Dans le cas $a = c$, l'identification du coefficient d'indice $(1,2)$ donne

$$be^a = b'e^{a'}$$

d'où $b = b'$.
Dans le cas $a \neq c$, la même identification donne

$$\frac{b(e^a - e^c)}{a-c} = \frac{b'(e^{a'} - e^{c'})}{a'-c'}$$

et à nouveau $b = b'$.
Ainsi l'application $\exp : T \to T^+$ est injective.
Considérons maintenant

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in T^+$$

Si $\alpha = \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$ et $b = \beta/\alpha$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.
Si $\alpha \neq \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$, $c = \ln\gamma$ et $b = \beta(a-c)/(\alpha-\gamma)$, on obtient $M \in T$vérifiant $\exp(M) = N$.
Ainsi l'application $\exp : T \to T^+$ est surjective.

Exercice 11 : [énoncé]
Par la formule de Taylor adaptée aux polynômes

$$P(a+t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}t^k$$

En déduit que l'égalité polynomiale

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(X)}{k!}1^k$$

car les deux polynômes sont égaux pour une infinité de valeurs a.

On en déduit

$$\exp(D)(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!} = P(X+1)$$

Exercice 12 : [énoncé]
Par continuité de l'application linéaire de transposition, on justifie

$$^t\exp(T) = \exp(^tT)$$

Par suite

$$^t\exp(T)\exp(T) = \exp(-T)\exp(T)$$

Or T et $-T$ commutent donc

$$\exp(-T)\exp(T) = \exp(-T+T) = I_n$$

et on conclut.

Exercice 13 : [énoncé]
On a

$$^t\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(^tA\right)^k$$

En passant à la limite et par continuité de l'application de transposition, on a

$$^t(\exp A) = \exp(^tA)$$

Puisque les matrices A et $-A$ commutent, on a

$$^t(\exp A)\exp A = \exp(-A)\exp(A) = \exp(-A+A) = \exp(O_n) = I_n$$

Ainsi la matrice $\exp A$ est orthogonale.

Exercice 14 : [énoncé]
$\chi_A = X^3 - 2X$, $\pi_A = \chi_A$. On a donc

$$A^3 = 2A,\ A^{2k+1} = 2^k A \text{et } A^{2k+2} = 2^k A^2 \text{ pour } k > 0$$

avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} A + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(2k)!} A^2 = I_3 + \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\sqrt{2}) - 1) A^2$$

Exercice 15 : [énoncé]
$\chi_A = X(X^2+1)$, $\pi_A = X(X^2+1)$, $\exp(A)\exp(^tA) = \exp(A)\exp(-A) = I_3$.
En calculant $A^2, A^3, \ldots$ on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$,

$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.
b) Ci-dessus.
c) Par division euclidienne $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$

puis

$$\mathrm{e}^A = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}}{3} A + \frac{2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2}{3} I_3$$

Exercice 17 : [énoncé]
$A^2 = O$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Puisque $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$.

$$\exp(A) = I + A$$

L'étude se généralise pour $n \geqslant 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Puisque de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable et son polynôme minimal est

$$\Pi_A = (X+2)(X-1)(X-3)$$

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit

$$X^n = \Pi_A Q + R \text{ avec } \deg R < 3$$

Le polynôme R peut s'écrire

$$R(X) = a(X-1)(X-3) + b(X-3) + c$$

et l'évaluation de la relation division euclidienne en -2, 1 et 3 donne

$$\begin{cases} 15a - 5b + c = (-2)^n \\ 2b + c = 1 \\ c = 3^n \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = \dfrac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} \\ b = \dfrac{3^n - 1}{2} \\ c = 3^n \end{cases}$$

et enfin

$$R(X) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30}X^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30}X + -\frac{3^n - (-2)^n - 5}{5}$$

En évaluant la relation de division euclidienne en A, on obtient

$$A^n = R(A) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30}A^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30}A + \frac{-3^n + (-2)^n + 5}{5}I_3$$

b) En vertu de ce qui précède

$$\mathrm{ch}A = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{30}\left(3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{2n}}{(2n!)} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!} - 5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\right)$$

et donc

$$\alpha = \frac{3\mathrm{ch}3 + 2\mathrm{ch}2 - 5\mathrm{ch}1}{30}$$

De même, on obtient

$$\beta = \frac{3\mathrm{ch}3 - 8\mathrm{ch}2 + 5\mathrm{ch}1}{30} \text{ et } \gamma = \frac{5\mathrm{ch}1 + \mathrm{ch}2 - \mathrm{ch}3}{5}$$

Exercice 19 : [énoncé]
Par convergence absolue, on peut écrire

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k)!}I_n + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)!}A + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+2)!}A^2 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+3)!}A^3$$

ce qui donne

$$\exp(A) = \frac{\cos(1) + \mathrm{ch}(1)}{2}I_n + \frac{\sin(1) + \mathrm{sh}(1)}{2}A + \frac{\mathrm{ch}(1) - \cos(1)}{2}A^2 + \frac{\mathrm{sh}(1) - \sin(1)}{2}A^3$$