Variables aléatoires

Loi binomiale

Exercice 1 [03369] [correction]
Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$. Pour quelle valeur de k, la probabilité $p_k = P(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 2 [03846] [correction]
Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$. On note

$$b(k,n,p) = P(X = k)$$

a) Pour quelle valeur m de k, le coefficient $b(k,n,p)$ est-il maximal ?
b) Etudier la monotonie de la fonction $f : x \mapsto x^m(1-x)^{n-m}$ sur $[0,1]$.
c) Vérifier que si $m \in [np,(n+1)p]$ alors

$$b\left(m,n,\frac{m}{n+1}\right) \leqslant b(m,n,p) \leqslant b\left(m,n,\frac{m}{n}\right)$$

d) Proposer en encadrement analogue pour $m \in [(n+1)p-1,np]$.
e) On donne la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}$$

Donner un équivalent simple de $b(m,n,p)$.

Exercice 3 [03975] [correction]
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

Indépendance de variables aléatoires

Exercice 4 [03974] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur un espace Ω. On suppose

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 5 [03973] [correction]
Montrer que deux évènements sont indépendants si, et seulement si, leurs fonctions indicatrices définissent des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 6 [03817] [correction]
Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p. Peut-on identifier la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$?

Exercice 7 [03818] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 [03825] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires prenant pour valeurs $a_1, \ldots, a_n$ avec

$$P(X = a_i) = P(Y = a_i) = p_i$$

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$$

Exercice 9 [03981] [correction]
Soient X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω,P) et f une application définie sur $X(\Omega)$.
À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Espérance

Exercice 10 [03833] [correction]
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Etablir

$$E\left(X\right)^2 \leqslant E\left(X^2\right)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 11 [03835] [correction]
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,N\}$.
Etablir
$$E(X)=\sum_{n=0}^{N-1}P(X>n)$$

Exercice 12 [03839] [correction]
On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p indépendamment des autres.
On dispose pour cela de deux protocoles :
Protocole 1 :
On analyse le sang de chacun des N individus.
Protocole 2 :
On regroupe les individus par groupe de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.
a) Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.
b) Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyse effectuée dans le deuxième protocole.
Exprimer l'espérance de Y en fonction de n,N et p.
c) Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N=1000$, $n=10$ et $p=0,01$.

Exercice 13 [03847] [correction]
Dans cet exercice, les variables aléatoires sont toutes supposées prendre leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire X l'application $\varphi_X:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par
$$\varphi_X(u)=E\left(\mathrm{e}^{iuX}\right)$$
a) Vérifier que φ_X est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Calculer $\varphi_X(0)$. Comment interpréter $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$?
b) Calculer la fonction caractéristique d'une variable X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Même question avec une loi binomiale de paramètres n et p.
c) Soient X une variable aléatoire réelle et x_0 un entier. Vérifier
$$P(X=x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iux_0}\,\mathrm{d}u$$
En déduire
$$\varphi_X=\varphi_Y\Rightarrow X=Y$$
d) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Vérifier
$$\varphi_{X+Y}=\varphi_X\varphi_Y$$
e) Exploiter ce résultat pour retrouver la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercice 14 [03980] [correction]
Soit $p\in\,]0,1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant
$$P(X_k=1)=p\text{ et }P(X_k=-1)=1-p$$
a) Calculer l'espérance de X_k.
b) On pose
$$Y_n=\prod_{k=1}^n X_k$$
En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n=P(Y_n=1)$.
c) Quelle est la limite de p_n quand $n\to+\infty$.

Exercice 15 [03987] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
a) Exprimer $E(X)$ en fonction de $P(X\geqslant k)$.
b) On suppose les variables X et Y uniformes.
Déterminer l'espérance de $\min(X,Y)$ puis de $\max(X,Y)$.
Déterminer aussi l'espérance de $|X-Y|$.

Exercice 16 [03992] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini (Ω,P).
On suppose
$$\forall k\in\mathbb{N},E(X^k)=E(Y^k)$$
Montrer que X et Y suivent les mêmes lois.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Calcul d'espérances et de variances

Exercice 17 [03836] [correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a \binom{n}{k}$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 18 [03837] [correction]
Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.
Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

Exercice 19 [03838] [correction]
Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0, 1[$.
Calculer l'espérance de la variable

$$Y = \frac{1}{X + 1}$$

Exercice 20 [03840] [correction]
Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges.
a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer son espérance et sa variance

Exercice 21 [03986] [correction]
On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme.
Pour chaque $s \in \mathcal{S}_n$, on pose $X(s)$ le nombre de points fixes de s.
Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 22 [03984] [correction]
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.
a) On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.
b) On pose

$$V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

Calculer l'espérance de V_n.

Covariance

Exercice 23 [03993] [correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, P).
Montrer

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}$$

Exercice 24 [03994] [correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, P) avec $V(X) > 0$.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la quantité

$$E\left(\left[Y - (aX + b)\right]^2\right)$$

soit minimale.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 25 [03832] [correction]
Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante.
Montrer que

$$\forall a \geqslant 0, P\left(|X| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E\left(g(|X|)\right)}{g(a)}$$

Exercice 26 [03816] [correction]
Une variable aléatoire X suit une loi du binôme de paramètre p et de taille n.
Etablir pour $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 27 [03834] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Montrer que pour tout $\lambda, \varepsilon > 0$

$$P\left(X - np > n\varepsilon\right) \leqslant E\left(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)$$

Exercice 28 [03982] [correction]
[Sondage]
Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$.
On choisit un échantillon de n personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toute une loi de Bernoulli de paramètre p.
a) Quelle est la loi suivie par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,?$$

b) Déterminer espérance et variance de S_n/n.
c) Soit $\varepsilon > 0$. Etablir

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

d) Pour $\varepsilon = 0,05$, quelle valeur de n choisir pour que S_n/n soit voisin de p à ε près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

Exercice 29 [04035] [correction]
Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Etablir

$$P(X_n \leqslant k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 30 [04042] [correction]
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer

$$P\left(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma\right) \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Exercice 31 [04043] [correction]
Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2.
En introduisant la variable aléatoire

$$Y = \left[\alpha(X - \mu) + \sigma\right]^2$$

Montrer que pour tout $\alpha > 0$

$$P\left(X \geqslant \mu + \alpha\sigma\right) \leqslant \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Par définition d'une loi binomiale

$$p_k = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

et donc pour $k \geqslant 1$

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{1-p}$$

On en déduit

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \geqslant 1 \Leftrightarrow k \leqslant (n+1)p$$

En notant k_0 la partie entière de $(n+1)p$. La suite $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant k_0}$ est croissante et la suite $(p_k)_{k_0\leqslant k\leqslant n}$ est décroissante. Le maximum de p_k est donc atteint en $k = k_0$.

Exercice 2 : [énoncé]
Rappelons

$$b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

a) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)} = \frac{n+1-k}{k}\frac{p}{1-p}$$

donc

$$\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)} \geqslant 1 \Leftrightarrow k \leqslant (n+1)p$$

La suite finie $(b(k,n,p))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc croissante jusqu'au plus grand entier m inférieur à $(n+1)p$ puis devient décroissante ensuite. On peut donc affirmer

$$m = \lfloor (n+1)p \rfloor$$

b) La fonction f est dérivable avec

$$f'(x) = (m-nx)x^{m-1}(1-x)^{n-m-1}$$

La fonction f est donc croissante sur $[0, m/n]$ et décroissante sur $[m/n, 1]$.

c) Si $m \in [np, (n+1)p]$ alors $m/(n+1) \leqslant p \leqslant m/n$ et puisque f est croissante sur $[0, m/n]$

$$f(m/(n+1)) \leqslant f(p) \leqslant f(m/n)$$

ce qui conduit à l'encadrement demandé.
d) Si $m \in [(n+1)p-1, np]$ alors $m/n \leqslant p \leqslant (m+1)/(n+1)$ et par décroissance de f sur $[m/n, 1]$, on obtient

$$b\left(m,n,\frac{m+1}{n+1}\right) \leqslant b(m,n,p) \leqslant b\left(m,n,\frac{m}{n}\right)$$

e) Quand $n \to +\infty$, on a $m = \lfloor (n+1)p \rfloor \sim np \to +\infty$ et $n-m \ \sim n(1-p) \to +\infty$ ce qui permet d'écrire simultanément

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n},\ m! \sim \sqrt{2\pi m}m^m\mathrm{e}^{-m} \text{ et } (n-m)! \sim \sqrt{2\pi(n-m)}(n-m)^{n-m}\mathrm{e}^{n-m}$$

On en déduit après calcul

$$b\left(m,n,\frac{m}{n}\right) \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

On obtient les mêmes équivalents pour

$$b\left(m,n,\frac{m}{n+1}\right) \text{ et } b\left(m,n,\frac{m+1}{n+1}\right)$$

et l'on peut donc conclure par encadrement

$$b\left(m,n,p\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

Exercice 3 : [énoncé]
$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

donc

$$P(Y=k) = P(X=n-k) = \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k$$

La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $q = 1-p$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 4 : [énoncé]
Soient $A \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ et $B \subset \{y_1, \dots y_m\}$. On a

$$(X = A) \cap (Y = B) = \left(\bigcup_{x \in A} X = x \right) \cap \left(\bigcup_{y \in B} Y = y \right)$$

En développant

$$(X = A) \cap (Y = B) = \bigcup_{(x,y) \in A \times B} (X = x) \cap (Y = y)$$

Cette réunion étant disjointe

$$P(X = A, Y = B) = \sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x)P(Y = y)$$

et donc

$$P(X = A, Y = B) = \sum_{x \in A} P(X = x) \sum_{y \in B} P(Y = y)$$

Finalement

$$P(X = A, Y = B) = P(X = A)P(Y = B)$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc bien indépendantes.

Exercice 5 : [énoncé]
Soient A, B deux évènements de l'espace probabilisé (Ω, P).
Supposons les fonctions indicatrices 1_A et 1_B indépendantes. On a

$$P(1_A = 1, 1_B = 1) = P(1_A = 1)P(1_B = 1)$$

ce qui se relit

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Inversement, supposons les évènements A et B indépendants. On sait qu'alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B),$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) \text{ et } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

Ceci se relit

$$P(1_A = 1, 1_B = 1) = P(1_A = 1)P(1_B = 1),\ P(1_A = 0, 1_B = 1) = P(1_A = 0)P(1_B = 1),\ P(1_A = 1, 1_B = 0) = P(1_A = 1)P(1_B = 0) \text{ et } P(1_A = 0, 1_B = 0) = P(1_A = 0)P(1_B = 0)$$

On en déduit que les variables aléatoires 1_A et 1_B sont indépendantes.

Exercice 6 : [énoncé]
La variable Z prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n + m\}$.
Soit $\ell \in \{0, 1, \dots, n + m\}$. Par la formule des probabilités totales

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Z = \ell \mid X = k)$$

Si $k > \ell$ alors

$$P(Z = \ell \mid X = k) = 0$$

Si $k \leqslant \ell$ alors

$$P(Z = \ell \mid X = k) = P(Y = \ell - k \mid X = k) = P(Y = \ell - k)$$

car les variables aléatoires X et Y sont supposées indépendantes.
On en déduit

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \binom{m}{\ell - k} p^{\ell}(1 - p)^{n+m-\ell}$$

Or, en considérant le coefficient de X^{ℓ} dans le développement des deux membres de l'identité

$$(1 + X)^{n+m} = (1 + X)^n (1 + X)^m$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \binom{m}{\ell - k} = \binom{n + m}{\ell}$$

et finalement

$$P(Z = \ell) = \binom{n + m}{\ell} p^{\ell}(1 - p)^{n+m-\ell}$$

La variable aléatoire Z suit une loi binomiale de taille $n + m$ et de paramètre p.

Exercice 7 : [énoncé]
La réponse est négative en général.
Supposons que X et Y suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$.
On a

$$P(X + Y = 2) = P(X = 1)P(Y = 1) = 1/4$$

et

$$P(X - Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) = 1/2$$

Or l'évènement $X + Y = 2$ est inclus dans l'évènement $X - Y = 0$ donc

$$P(X + Y = 2 \cap X - Y = 0) = P(X + Y = 2)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

et l'on constate

$$P(X+Y=2\cap X-Y=0)\neq P(X+Y=2)P(X-Y=0)$$

Exercice 8 : [énoncé]
L'événement $\{X=Y\}$ se décompose en les événements incompatibles $\{X=a_i\cap Y=a_i\}$.
Par hypothèse d'indépendance

$$P\left(\{X=a_i\cap Y=a_i\}\right)=P\left(\{X=a_i\}\right)P\left(\{Y=a_i\}\right)=p_i^2$$

donc

$$P\left(\{X=Y\}\right)=\sum_{i=1}^n p_i^2$$

puis par complémentation

$$P\left(\{X\neq Y\}\right)=1-\sum_{i=1}^n p_i^2$$

Enfin, on conclut sachant

$$1=\sum_{i=1}^n p_i$$

Exercice 9 : [énoncé]
Supposons les variables aléatoires X et $f(X)$ indépendantes.
Soient $\omega\in\Omega$ vérifiant $P(\{\omega\})>0$.
Posons $x=X(\omega)$ et $y=f(x)$.
On a

$$P\left(f(X)=y\mid X=x\right)=\frac{P(f(X)=y\cap X=x)}{P(X=x)}$$

Or $\{X=x\}\subset\{f(X)=y\}$, donc

$$P\left(f(X)=y\mid X=x\right)=1$$

Cependant, les variables X et $f(X)$ étant supposées indépendantes

$$P\left(f(X)=y\mid X=x\right)=P(f(X)=y)$$

Ainsi $f(X)=y$ presque sûrement.
La réciproque est immédiate et donc X et $f(X)$ sont indépendantes si, et seulement si, $f(X)$ est presque sûrement constante.

Exercice 10 : [énoncé]
Notons $x_1,\dots,x_n$ les valeurs prises par X. On a

$$E\left(X\right)=\sum_{k=1}^n x_kp_k \text{ et } E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^n x_k^2p_k$$

avec $p_k=P(X=x_k)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\sqrt{p_k}\times\sqrt{p_k}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^n x_k^2p_k\sum_{k=1}^n p_k$$

et donc $E\left(X\right)^2\leqslant E\left(X^2\right)$ car $\sum\limits_{k=1}^n p_k=1$.

Exercice 11 : [énoncé]
Notons $p_n=P(X=n)$. On a par définition

$$E(X)=\sum_{n=0}^N np_n=\sum_{n=1}^N np_n$$

Or $\{X=n\}=\{X>n-1\}\setminus\{X>n\}$ donc

$$p_n=P(X>n-1)-P(X>n)$$

donc

$$E(X)=\sum_{n=1}^N nP(X>n-1)-\sum_{n=1}^N nP(X>n)$$

Par décalage d'indice dans la première somme

$$E(X)=\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)P(X>n)-\sum_{n=1}^N nP(X>n)$$

En supprimant le dernier terme assurément nul de la deuxième somme et en y ajoutant un terme nul correspondant à l'indice 0

$$E(X)=\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)P(X>n)-\sum_{n=0}^{N-1} nP(X>n)$$

Enfin, en combinant ces sommes

$$E(X)=\sum_{n=0}^{N-1}P(X>n)$$

Exercice 12 : [énoncé]
a) Dans un groupe donné, le nombre Z d'individus infectés suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p. L'échantillon du groupe sera positif si $Z \geqslant 1$. La probabilité qu'un échantillon de groupe soit positif est donc

$$q = \sum_{k=1}^{n} P(Z = k) = 1 - P(Z = 0) = 1 - (1-p)^n$$

L'infection ou non d'un groupe suit une loi de Bernoulli de probabilité q. Les groupes pouvant être considérés comme indépendants, le nombre X de groupes infectés suit une loi binomiale de taille N/n et de paramètre q.
b) Le nombre Y d'analyses se déduit du nombre X de groupes infectés par la relation

$$Y = \frac{N}{n} + nX$$

L'espérance de Y est

$$E(Y) = \frac{N}{n} + nE(X) = \frac{N}{n}(1+nq) = \frac{N}{n}(1+n-n(1-p)^n)$$

c) Le premier protocole conduit à 1000 analyses alors que le second n'en demande qu'en moyenne $\simeq 196$

Exercice 13 : [énoncé]
a) Notons $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs (entières) prises par X. On a

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{iux_k} P(X = x_k)$$

La fonction φ_X est alors combinaison linéaire de fonctions 2π-périodiques (car $x_k \in \mathbb{Z}$) et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\varphi_X(0) = E(1) = 1,\ \varphi_X'(0) = \sum_{k=1}^{n} ix_k P(X = x_k) = iE(X) \text{ et } \varphi_X''(0) = -E(X^2)$$

b) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$$\varphi_X(u) = (1-p) + p\mathrm{e}^{iu}$$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{e}^{iku} = (1-p+p\mathrm{e}^{iu})^n$$

c) Avec les notations qui précèdent

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iux_0}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} P(X = x_k) \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iu(x_k - x_0)}\,\mathrm{d}u$$

Puisque $x_k - x_0$ est un entier

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iu(x_k - x_0)}\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & \text{si } x_k \neq x_0 \\ 2\pi & \text{si } x_k = x_0 \end{cases}$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iux_0}\,\mathrm{d}u = 2\pi P(X = x_0)$$

Si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors

$$\forall x_0 \in \mathbb{Z}, P(X = x_0) = P(Y = x_0)$$

et donc $X = Y$.
d) Notons que $X+Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ comme X et Y.

$$\varphi_{X+Y}(u) = E\left(\mathrm{e}^{iu(X+Y)}\right) = E\left(\mathrm{e}^{iuX}\mathrm{e}^{iuY}\right) = E\left(\mathrm{e}^{iuX}\right)E\left(\mathrm{e}^{iuY}\right) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$$

car les variables X et Y sont supposées indépendantes.
e) Une loi binomiale de paramètres n et p peut se comprendre comme la somme de n loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
Avec cet exercice, on perçoit la trace dans une situation particulière de résultats beaucoup plus généraux. Il est assez fréquent d'étudier une variable aléatoire par la fonction caractéristique associée.

Exercice 14 : [énoncé]
a) $E(X_k) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$.
b) Par l'indépendance des variables

$$E(Y_n) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k) = (2p-1)^n$$

Aussi $Y_n \in \{1, -1\}$ et

$$E(Y_n) = 1 \times p_n + (-1) \times (1 - p_n) = 2p_n - 1$$

On en déduit

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}$$

c) Puisque $|p| < 1$, $p_n \to 1/2$.

Exercice 15 : [énoncé]

a) En écrivant

$$P(X=k)=P(X\geqslant k)-P(X\geqslant k+1)$$

on obtient

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}P(X\geqslant k)$$

b) Par la propriété au-dessus

$$E\left(\min(X,Y)\right)=\sum_{k=1}^{n}P(X\geqslant k\text{ et }Y\geqslant k)=\sum_{k=1}^{n}P(X\geqslant k)P(Y\geqslant k)$$

Puisque

$$P(X\geqslant k)=P(Y\geqslant k)=\frac{n+1-k}{n}$$

on obtient

$$E\left(\min(X,Y)\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

Aussi

$$\min(X,Y)+\max(X,Y)=X+Y$$

donc

$$E\left(\max(X,Y)\right)=n+1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

Encore

$$\min(X,Y)=\frac{1}{2}\left((X+Y)-|X-Y|\right)$$

donc

$$E\left(|X-Y|\right)=n+1-\frac{(n+1)(2n+1)}{3n}=\frac{n^2-1}{3n}$$

Exercice 16 : [énoncé]

Notons $x_1,\dots,x_n$ les éléments de $X(\Omega)\cup Y(\Omega)$.

On peut écrire

$$\forall k\in\mathbb{N},E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^kP(X=x_i)$$

Considérons maintenant un polynôme L_j prenant la valeur 1 en x_j et la valeur 0 en les x_i avec $i\neq j$.

En notant N le degré de L_j, on peut écrire

$$L_j(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$$

et alors

$$a_0+a_1E(X)+\cdots+a_NE(X^N)=\sum_{i=1}^{n}L_j(x_i)P(X=x_i)=P(X=x_i)$$

Parallèlement

$$a_0+a_1E(Y)+\cdots+a_NE(Y^N)=\sum_{i=1}^{n}L_j(x_i)P(Y=x_i)=P(Y=x_i)$$

et donc

$$P(X=x_i)=P(Y=y_i)$$

Exercice 17 : [énoncé]

La valeur de a se déduit de l'identité

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1$$

et l'on obtient $a=1/2^n$.

L'espérance de X est

$$E(X)=a\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=an\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=an2^{n-1}=\frac{n}{2}$$

et la variance est

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

Or

$$E(X(X-1))=a\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}=an(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$$

donc

$$E(X^2)=E(X(X-1))+E(X)=\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4}=\frac{n(n+1)}{4}$$

puis

$$V(X)=\frac{n}{4}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 18 : [énoncé]

En distinguant les boules, il y a $\binom{2n}{n}$ tirages possibles et, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, exactement $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ tirages conduisant à l'obtention de k boules rouges.

On en déduit

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$$

L'espérance de X est

$$E(X)=\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}=\binom{2n-1}{n-1}$$

en considérant le coefficient de X^{n-1} dans le développement de

$$(1+X)^{n-1}(1+X)^n=(1+X)^{2n-1}$$

et donc

$$E(X)=n\binom{2n}{n}^{-1}\binom{2n-1}{n-1}=\frac{n}{2}$$

On calcule la variance $V(X)$ par la relation $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ en commençant par calculer $E(X(X-1))$.

$$E(X(X-1))=\binom{2n}{n}^{-1}n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\binom{n}{n-k}$$

et en considérant le coefficient de X^{n-2} dans le développement de

$$(1+X)^{n-2}(1+X)^n=(1+X)^{2n-2}$$

on obtient

$$E(X(X-1))=n(n-1)\binom{2n}{n}^{-1}\binom{2n-2}{n-2}=\frac{n(n-1)^2}{2(2n-1)}$$

puis

$$E(X^2)=\frac{n^3}{2(2n-1)}$$

et enfin

$$V(X)=\frac{n^2}{4(2n-1)}$$

Exercice 19 : [énoncé]

Puisque

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

l'espérance de Y est donnée par

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Or

$$\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

donc

$$E(Y)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$$

puis par glissement d'indice

$$E(Y)=\frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{(n+1)-k}$$

et enfin par la formule du binôme avec un terme manquant

$$E(Y)=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

Exercice 20 : [énoncé]

a) Les valeurs prises pas X sont les éléments de $\{n, n+1, \ldots, 2n\}$.
Distinguons les boules. Le nombre de tirages possibles est $(2n)!$
Les tirages de $n+k$ boules contenant toutes les boules rouges (sans pour autant terminer par une boule rouge) sont au nombre de

$$\binom{n+k}{k} n!n!$$

En effet, on choisit k emplacements pour les boules blanches parmi les $n+k$ correspondant au début du tirage extrayant les n rouges. On positionne ensuite les boules rouges dans les emplacements restants et les boules blanches dans les emplacements réservés et sur la fin du tirage. On a donc

$$P(X \leqslant n+k) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\binom{n+k}{k}$$

On en déduit

$$P(X = n+k) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}\right] = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\binom{n+k-1}{k}$$

b) L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n}(n+k)P\left(X = n+k\right)$$

Or

$$(n+k)\binom{n+k-1}{k} = n\binom{n+k}{k}$$

donc

$$E(X) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}n\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}n\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)n}{n+1}$$

Pour calculer la variance, commençons par calculer $E(X(X+1))$.

$$E(X(X+1)) = \sum_{k=0}^{n}(n+k)(n+k+1)P\left(X = n+k\right)$$

Or

$$(n+k)(n+k+1)\binom{n+k-1}{k} = n(n+1)\binom{n+k+1}{k}$$

puis

$$E(X(X+1)) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}n(n+1)\binom{2n+2}{n} = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+2)}$$

donc

$$E(X^2) = E(X^2+X) - E(X) = \frac{n^2(2n+1)(2n+3)}{(n+2)(n+1)}$$

et enfin

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n^2(2n+1)}{(n+2)(n+1)^2}$$

Exercice 21 : [énoncé]

Notons $\mathcal{S}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations possédant exactement $k \in [\![0, n]\!]$ points fixes.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{Card}\mathcal{S}_n(k)$$

Considérons alors

$$\Omega = \mathcal{S}_n \times [\![1, n]\!] = \{(s, x)/s \in \mathcal{S}_n \text{ et } x \in [\![1, n]\!]\}$$

On observe

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{Card}\mathcal{S}_n(k) = \mathrm{Card}\left\{(s, x) \in \Omega/s(x) = x\right\}$$

Puisqu'il y a autant de permutations dans $\mathcal{S}_n$ vérifiant $s(x) = a$ que de permutation vérifiant $s(x) = b$,

$$\mathrm{Card}\left\{(s, x) \in \Omega/s(x) = x\right\} = \frac{1}{n}\mathrm{Card}\Omega = n!$$

et donc

$$E(X) = 1$$

Aussi

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathrm{Card}\mathcal{S}_n(k)$$

Considérons alors

$$\Omega' = \{(s, x, y)/s \in \mathcal{S}_n \text{ et } x, y \in [\![1, n]\!], x \neq y\}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

On observe

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\text{Card}\mathcal{S}_n(k) = \text{Card}\left\{(s,x,y) \in \Omega'/s(x) = x \text{ et } s(y) = y\right\}$$

Un argument d'uniformité analogue au précédent fournit

$$\text{Card}\left\{(s,x,y) \in \Omega'/s(x) = x \text{ et } s(y) = y\right\} = n!$$

et donc

$$E(X(X-1)) = 1$$

On en déduit

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 1$$

Exercice 22 : [énoncé]

a) Par linéarité de l'espérance

$$E\left(\bar{X}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = m$$

Puisque de surcroît les variables sont mutuellement indépendantes

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

b) En développant

$$V_n = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}_n\sum_{i=1}^{n} X_i + n\bar{X}_n^2\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(V_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) - \frac{n}{n-1}E\left(\bar{X}_n^2\right)$$

puis

$$E(V_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + m^2\right) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sigma^2}{n} + m^2\right)$$

et enfin

$$E(V_n) = \sigma^2$$

Exercice 23 : [énoncé]

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, introduisons $Z = \lambda X + Y$. On a $V(Z) \geqslant 0$ avec

$$V(Z) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda\text{Cov}(X,Y) + V(Y)$$

Si $V(X) = 0$, on a nécessairement $\text{Cov}(X,Y) = 0$ pour que $V(Z)$ soit positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $V(X) \neq 0$, on a nécessairement $\Delta = 4\text{Cov}(X,Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leqslant 0$ pour que $V(Z)$ soit positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dans les deux cas, on obtient

$$|\text{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}$$

Exercice 24 : [énoncé]

On a

$$E\left([Y - (aX+b)]^2\right) = V\left(Y - (aX+b)\right) + E\left(Y - (aX+b)\right)^2$$

D'une part

$$V\left(Y - (aX+b)\right) = V(Y - aX) = a^2V(X) - 2a\text{Cov}(X,Y) + V(Y)$$

et donc

$$V\left(Y - (aX+b)\right) = V(Y - aX) = \left(a - \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)}\right)^2 V(X) + \frac{V(X)V(Y) - (\text{Cov}(X,Y))^2}{V(X)}$$

D'autre part

$$E\left(Y - (aX+b)\right)^2 = 0 \text{ pour } b = E(Y) - aE(X)$$

On en déduit que

$$E\left([Y - (aX+b)]^2\right)$$

est minimale pour

$$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b = \frac{V(X)E(Y) - \text{Cov}(X,Y)E(X)}{V(X)}$$

Ces valeurs de a et b réalisent une régression linéaire : elles donnent la meilleure expression linéaire de Y en fonction de X.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 25 : [énoncé]
Puisque la fonction g est strictement croissante, les événement $|X| \geqslant a$ et $g(|X|) \geqslant g(a)$ sont identiques. Or l'inégalité de Markov donne

$$E\left(g(|X)|\right) \geqslant g(a)P\left(g(|X|) \geqslant g(a)\right)$$

et donc

$$P\left(|X| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E\left(g(|X|)\right)}{g(a)}$$

Exercice 26 : [énoncé]
Rappelons

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)$$

Considérons la variable aléatoire

$$Y = X - np = X - E(X)$$

Par l'inégalité de Markov

$$P\left(|Y| \geqslant na\right) \leqslant \frac{E(|Y|)}{n\varepsilon}$$

donc

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{E(|Y|)}{n\varepsilon}$$

Or $E(|Y|) \leqslant \sqrt{E(Y^2)}$ avec $E(Y^2) = V(X) = np(1-p)$ donc

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 27 : [énoncé]
Par stricte croissance de l'exponentiel, l'événement $X - np > n\varepsilon$ équivaut à l'événement

$$\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right) \geqslant 1$$

L'inégalité de Markov appliquée à la variable $Y = \exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)$ permet alors de conclure

$$P\left(\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right) \geqslant 1\right) \leqslant \frac{E\left(\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)\right)}{1}$$

Exercice 28 : [énoncé]
a) S_n soit une loi binomiale de paramètres n et p.
b) Puisque S_n suit une loi binomiale, $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$.
Par conséquent

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = p \text{ et } V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$$

c) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2}$$

et donc

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Enfin, l'inégalité classique $p(1-p) \leqslant 1/4$ permet de conclure.
d) On choisit n de sorte que

$$1/4n\varepsilon^2 \leqslant 0,05$$

La valeur $n = 2000$ est convenable.

Exercice 29 : [énoncé]
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Non défin

Choisissons $\varepsilon > 0$ pour que

$$(X_n \leqslant k) \subset (|X_n - np| \geqslant \varepsilon)$$

La valeur $\varepsilon = np - k$ convient et est strictement positive pour n assez grand. On a alors

$$P\left(X_n \leqslant k\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{(np-k)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Exercice 30 : [énoncé]
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\left(|X - \mu| \geqslant \alpha\sigma\right) < \frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma^2)} = \frac{1}{\alpha^2}$$

On conclut par considération d'évènement complémentaire.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 31 : [énoncé]
On a
$$E(Y) = \alpha^2 E\left((X-\mu)^2\right) + 2\alpha E(X-\mu) + \sigma^2 = (\alpha^2+1)\sigma^2$$
L'inégalité de Markov appliquée à la variable positive Y donne
$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a}$$
Pour $a = \sigma^2(\alpha^2+1)^2$,
$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{1}{1+\alpha^2}$$
Or
$$(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) = \left(\alpha(X-\mu) + \sigma \geqslant (\alpha^2+1)\sigma\right)$$
et donc
$$(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) \subset (Y \geqslant a)$$
puis
$$P\left(X \geqslant \mu + \alpha\sigma\right) \leqslant \frac{1}{1+\alpha^2}$$