Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires

Exercice 1 [04093] [correction]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{T})$. On définit une fonction Y par

$$\forall\omega\in\Omega, Y(\omega)=X_{N(\omega)}(\omega)$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 2 [04094] [correction]
Soit T une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, P(T>n)>0$$

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n=P\left(T=n\mid T\geqslant n\right)$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe à panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.
a) Justifier

$$\forall n\in\mathbb{N},\theta_n\in[0,1[$$

b) Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la probabilité $P(T\geqslant n)$.
En déduire la divergence de la série $\sum\theta_n$.
c) Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N},\theta_n\in[0,1[\text{ et }\sum\theta_n\text{ diverge}$$

Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

Espérances et variances

Exercice 3 [04018] [correction]
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a,b]$.
a) Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a,b]$.
La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer.
On introduit la variable aléatoire $Y=X-m$ et les quantités

$$t=\sum_{y\geqslant 0}yP(Y=y),\ s=\sum_{y\geqslant 0}y^2P(Y=y)\text{ et }u=P(Y\geqslant 0)$$

b) Vérifier

$$t^2\leqslant su$$

c) Calculer espérance et variance de Y. En déduire

$$t^2\leqslant(\sigma^2-s)(1-u)$$

d) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir

$$t^2\leqslant\sigma^2/4$$

e) Conclure

$$\sigma^2\leqslant(b-a)^2/4$$

Exercice 4 [04025] [correction]
Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
On suppose que X admet un moment d'ordre $n\in\mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment à tout ordre $k\leqslant n$.

Exercice 5 [04026] [correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que X admet une espérance finie si, et seulement si, la série $\sum P(X>n)$ converge et qu'alors

$$E\left(X\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(X>n\right)$$

Exercice 6 [04028] [correction]
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega)=\{n,n+1,\dots\}\text{ et }P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$$

a) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.
b) En déduire espérance et variance d'un loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice 7 [04032] [correction]
On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
- il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.
a) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 8 [04085] [correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $p \in]0,1[$ vérifiant

$$P(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 9 [04087] [correction]
Soit X une variable aléatoires réelle discrète admettant une variance σ^2 (avec $\sigma > 0$). Montrer

$$\forall \alpha > 0, P\left(|X - E(X)| < \alpha\sigma\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Covariances

Exercice 10 [04086] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant chacune une variance.
On suppose $V(X) > 0$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité

$$E\left(\left[Y - (aX + b)\right]^2\right)$$

Exercice 11 [04048] [correction]
Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S i.e. tel que l'espérance $E\left((Y - S)^2\right)$ soit minimale.

Lois usuelles

Exercice 12 [04020] [correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Quelle est la loi suivie par $X + Y$?

Exercice 13 [04021] [correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 14 [04022] [correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent des lois géométriques de paramètres p et q.
a) Déterminer $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.
c) Observer que la loi de Z est géométrique.

Exercice 15 [04029] [correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Reconnaître la loi de X sachant $X+Y=n$.

Exercice 16 [04034] [correction]
Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
a) Pour quelle valeur de $n\in\mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $(X=n)$ est-elle maximale ?
b) Inversement, n étant fixé, pour quelle valeur du paramètre λ, la probabilité de $(X=n)$ est-elle maximale ?

Exercice 17 [04036] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer

$$E\left(\frac{1}{X}\right)$$

Exercice 18 [04037] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
Calculer

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Exercice 19 [04038] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètres p et q.
Calculer l'espérance de $Z=\max(X,Y)$.

Exercice 20 [04045] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

Exercice 21 [04088] [correction]
Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1=1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.
a) Par quelle loi peut-on modéliser la variable $X_{k+1}-X_k$?
b) En déduire l'espérance de X_N.

Loi conjointes, Loi marginales

Exercice 22 [04054] [correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et que la loi de Y sachant $X=n$ est binomiale de paramètres n et $p\in\,]0,1[$.
a) Déterminer la loi conjointe de (X,Y).
b) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 23 [04055] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P\left(X=j,Y=k\right)=\frac{a}{j!k!}\text{ avec }a\in\mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 24 [04056] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall j,k\in\mathbb{R},P\left(X=j,Y=k\right)=a\frac{j+k}{2^{j+k}}\text{ avec }a\in\mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Déterminer les lois marginales de X et Y.
c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
d) Calculer $P\left(X=Y\right)$.

Exercice 25 [04057] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Déterminer la loi marginale de Y.
c) Sachant

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Reconnaître la loi de X
d) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

Fonctions génératrices

Exercice 26 [04027] [correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.
a) Reconnaître la loi de X lorsque $m=1$.
b) Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^\star$.
c) Exprimer le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-t)^{m+1}}$$

d) Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X.

Exercice 27 [04039] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
a) Calculer

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1))$$

b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 28 [04040] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
a) Calculer

Non défin

b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 29 [04044] [correction]
Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'évènement $(X_1+X_2=Y_1+Y_2)$.
a) Montrer que

$$P(X_1+X_2=Y_1+Y_2) = P(14+X_1+X_2-Y_1-Y_2=14)$$

b) Déterminer la fonction génératrice de la variable à valeurs naturelles

$$Z = 14+X_1+X_2-Y_1-Y_2$$

c) En déduire la valeur de

$$P(X_1+X_2=Y_1+Y_2)$$

Exercice 30 [04046] [correction]
Soit N et $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \dots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

a) Établir $G_S(t) = G_N(G_X(t))$ pour $|t| \leqslant 1$
b) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald

$$E(S) = E(N)E(X_1)$$

Exercice 31 [04051] [correction]
Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit aussi N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes.

On pose

$$X=\sum_{k=1}^{N} X_k \text{ et } Y=\sum_{k=1}^{N}(1-X_k)$$

a) Pour $t,u\in[-1,1]$, exprimer à l'aide de la fonction génératrice de N

$$G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)$$

b) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
c) Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que N suit une loi de Poisson.

Exercice 32 [04024] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
a) Rappeler la fonction génératrice de la variable X.
b) Exploiter celle-ci pour calculer le moment centré d'ordre 3 de la variable X.

Exercice 33 [04091] [correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q=1-p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$.
Pour $m\in\mathbb{N}^\star$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m=k\Leftrightarrow X_1+\cdots+X_k=m \text{ et } X_1+\cdots+X_{k-1}<m$$

a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.
b) Même question avec S_m-S_{m-1} pour $m\geqslant 2$.
c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m

Applications

Exercice 34 [04049] [correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{X}$. Pour chaque valeur $x\in\mathcal{X}$, on pose

$$p(x)=P(X=x)$$

On appelle entropie de la variable X le réel

$$H(X)=-\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log(p(x))$$

où l'on convient $0\log 0=0$.
a) Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. A quelle condition celui-ci est-il nul ?
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.
b) On appelle entropie conjointe de X et Y , l'entropie de la variable $Z=(X,Y)$ simplement notée $H(X,Y)$.
On suppose les variables X et Y indépendantes, vérifier

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y)$$

c) On appelle entropie de X sachant Y la quantité

$$H(X\mid Y)=H(X,Y)-H(Y)$$

Vérifier

$$H(X\mid Y)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y=y)H(X\mid Y=y)$$

avec

$$H(X\mid Y=y)=-\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X=x\mid Y=y)\log\left(P(X=x\mid Y=y)\right)$$

Indépendance

Exercice 35 [04083] [correction]
Soient X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et f une application définie sur $X(\Omega)$.
À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Moments

Exercice 36 [04084] [correction]
Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On note I_X l'ensemble des $t\in\mathbb{R}$ pour lesquels existe

$$M_X(t)=E\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

a) Montrer que I_X est un intervalle contenant 0.
b) On suppose que 0 est intérieur à l'intervalle I_X. Montrer que la variable X admet des moments à tout ordre et que sur un intervalle centré en 0

$$M_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E(X^n)}{n!}t^n$$

Exercice 37 [04023] [correction]
Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application

$$M_X(t) = E\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $M_X(t)$.
b) On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a, a[$.
Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'on a

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Les $X_n(\Omega)$ sont des ensembles au plus dénombrables et

$$Y(\Omega) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\Omega)$$

On en déduit que l'ensemble $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable.
De plus, pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega / N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) = y\}$$

et donc

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{N(\omega) = n\} \cap \{X_n(\omega) = y\}$$

est bien élément de la tribu $\mathcal{T}$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) θ_n est une probabilité donc $\theta_n \in [0,1]$.
Si $\theta_n = 1$ alors $P(T = n) = P(T \geqslant n)$ et donc $P(T > n) = 0$ ce qu'exclut les hypothèses.
b) On a $P(T = n) = \theta_n P(T \geqslant n)$ et $P(T = n) + P(T \geqslant n+1) = P(T \geqslant n)$ donc

$$P(T \geqslant n+1) = (1-\theta_n) P(T \geqslant n)$$

Sachant $P(T \geqslant 0) = 1$, on obtient

$$P(T \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k)$$

Puisque $P(T \geqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Ainsi, il y a divergence de la série $\sum \ln(1-\theta_n)$.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum \theta_n$ est évidemment divergente.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $\ln(1-\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\theta_n$ et, par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum \theta_n$ diverge.

c) Analyse : Si T est une variable aléatoire solution alors

$$P(T = n) = P(T \geqslant n) - P(T \geqslant n+1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

ce qui détermine entièrement la loi de T.
Synthèse : Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

Vérifions aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de somme égale à 1.
Introduisons $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$. On a

$$\ln P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

En effet, $\ln(1-\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\theta_n$ et $\sum -\theta_n$ est une série à termes négatifs divergente.
On a aussi $P_0 = 1$ et $P_n - P_{n+1} = u_n$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = P_0 - P_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On peut alors définir une variable aléatoire T dont la loi vérifie

$$P(T = n) = u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

On a alors

$$P(T \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

et

$$P(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$$

La variable aléatoire T est bien solution.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Posons $M = \max(-a, b)$. On a $|X| \leqslant M$ et la constante M admet une espérance. On en déduit que X admet une espérance. De plus

$$m = E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \geqslant \sum_{x \in X(\Omega)} aP(X = x) = a$$

et de même $m \leqslant b$.
b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{y \geqslant 0} yP(Y = y)\right)^2 \leqslant \sum_{y \geqslant 0} y^2 P(Y = y) \sum_{y \geqslant 0} P(Y = y) = su$$

c) De façon immédiate $E(Y) = 0$ et $V(Y) = \sigma^2$. On en déduit

$$t = -\sum_{y<0} yP(Y = y) \text{ et } \sum_{y<0} y^2 P(Y = y) = \sigma^2 - s$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$t^2 \leqslant (\sigma^2 - s)(1 - u)$$

d) Ce qui précède fournit

$$t^2 \leqslant \min\left\{su, (\sigma^2 - s)(1 - u)\right\}$$

pour $u \in [0, 1]$ et $s \in \left[0, \sigma^2\right]$. Sachant

$$su \leqslant (\sigma^2 - s)(1 - u) \Leftrightarrow s + \sigma^2 u \leqslant \sigma^2$$

Si $s + \sigma^2 u \leqslant \sigma^2$ alors

$$\min\left\{su, (\sigma^2 - s)(1 - u)\right\} = su \leqslant \sigma^2(1 - u)u \leqslant \sigma^2/4$$

Si $s + \sigma^2 u > \sigma^2$, c'est analogue et la conclusion demeure.
e) On a

$$\sigma^2 = E(Y^2) = \sum_{y \geqslant 0} y^2 P(Y = y) + \sum_{y<0} y^2 P(Y = y)$$

Puisque Y est à valeurs dans $[a - m, b - m]$, on a

$$\sum_{y \geqslant 0} y^2 P(Y = y) \leqslant \sum_{y \geqslant 0} (b - m)yP(Y = y) = (b - m)t$$

et

$$\sum_{y<0} y^2 P(Y = y) \leqslant \sum_{y<0} (a - m)yP(Y = y) = -(a - m)t$$

On en déduit

$$\sigma^2 \leqslant (b - a)t$$

En élevant au carré

$$\sigma^4 \leqslant (b - a)^2 t^2 = \frac{(b - a)^2}{4}\sigma^2$$

Enfin, que σ soit nul ou non, on obtient

$$\sigma^2 \leqslant \frac{(b - a)^2}{4}$$

Notons que cette inégalité est une égalité lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$.

Exercice 4 : [énoncé]
Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|x^k\right| \leqslant 1 + |x|^n$$

car l'inégalité est vraie que $|x| \leqslant 1$ ou non. On en déduit

$$\left|X^k\right| \leqslant 1 + |X|^n$$

Or 1 et $|X|^n$ admettent une espérance donc X^k aussi.

Exercice 5 : [énoncé]
On a

$$P\left(X > n\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$$

Puisque les termes sommés sont positifs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)$$

et la convergence d'un membre équivaut à celle de l'autre.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Cas $n = 1$. Si X suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et p alors

$$P(X = k) = \binom{k-1}{0} p(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre p.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
L'évènement $X_1 + \cdots + X_{n+1} = k$ peut se décomposer en la réunion des évènements incompatibles suivants

$$X_1 + \cdots + X_n = \ell \text{ et } X_{n+1} = k - \ell \text{ pour } \ell \in [\![n, k-1]\!]$$

On en déduit par indépendance

$$P(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) = \sum_{\ell=n}^{k-1} \binom{\ell-1}{n-1} p^n (1-p)^{\ell-n} p(1-p)^{k-\ell-1}$$

puis

$$P(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) = p^n(1-p)^{k-(n+1)} \sum_{\ell=n}^{k-1} \binom{\ell-1}{n-1}$$

Or par la formule du triangle de Pascal

$$\sum_{\ell=n}^{k-1} \binom{\ell-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$$

et donc

$$P(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) = \binom{k-1}{n} p^n (1-p)^{k-(n+1)}$$

Récurrence établie.
b) Par linéarité de l'espérance

$$E(X) = \frac{n}{p}$$

Par indépendance des variables sommées

$$V(X) = n\frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) Notons A_n l'évènement « le jeu dure au moins n parties »

A_{n+1} est la conjonction des évènements indépendants A_n et « le rouge sort au $n+1$ -ièm

Par continuité décroissante, on obtient

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$$

L'arrêt du jeu est donc presque sûr.
Lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le joueur a perdu $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$ brouzoufs et vient de gagner 2^n brouzoufs. Au total, il gagne 1 brouzouf. Son gain étant presque sûrement constant égal à 1 brouzoufs, son espérance de gain vaut 1 brouzouf.
b) Avec ce nouveau protocole, lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le gain du joueur vaut

$$3^n - (1 + 3 + \cdots + 3^{n-1}) = \frac{3^n + 1}{2}$$

L'espérance de gain est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+1}{2} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+1}{2^{n+1}} = +\infty$$

c) Puisque le joueur ne peut disputer que n parties, son espérance de gain devient

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \times P(A_n) - (2^n - 1) P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \frac{1}{2^n} - (2^n - 1) \times \frac{1}{2^n} = 0$$

Exercice 8 : [énoncé]
En dérivant successivement

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

La propriété
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)=1$$
fournit
$$a=(1-p)^{n+1}$$
De plus, une nouvelle dérivation donne
$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\binom{n+k}{k}x^{k-1}=\frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}}$$
donc
$$E(X)=a\sum_{k=0}^{+\infty} k\binom{n+k}{k}p^k=a\frac{(n+1)p}{(1-p)^{n+2}}=\frac{(n+1)p}{1-p}$$
De même
$$E(X(X-1))=\frac{(n+2)(n+1)p^2}{(1-p)^2}$$
puis
$$V(X)=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=\frac{(n+1)p}{(1-p)^2}$$

Exercice 9 : [énoncé]
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
$$P\left(|X-E(X)|\geqslant \alpha\sigma\right)<\frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma^2)}=\frac{1}{\alpha^2}$$
On conclut par considération d'évènement complémentaire.

Exercice 10 : [énoncé]
On a
$$E\left(\left[Y-(aX+b)\right]^2\right)=V\left(Y-(aX+b)\right)+E\left(Y-(aX+b)\right)^2$$
D'une part
$$V\left(Y-(aX+b)\right)=V(Y-aX)=a^2V(X)-2a\operatorname{Cov}(X,Y)+V(Y)$$
et donc
$$V\left(Y-(aX+b)\right)=V(Y-aX)=\left(a-\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{V(X)}\right)^2V(X)+\frac{V(X)V(Y)-(\operatorname{Cov}(X,Y))^2}{V(X)}$$
D'autre part
$$E\left(Y-(aX+b)\right)^2=0 \text{ pour } b=E(Y)-aE(X)$$
On en déduit que
$$E\left(\left[Y-(aX+b)\right]^2\right)$$
est minimale pour
$$a=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b=\frac{V(X)E(Y)-\operatorname{Cov}(X,Y)E(X)}{V(X)}$$
Ces valeurs de a et b réalisent une régression linéaire : elles donnent la meilleure expression linéaire de Y en fonction de X.

Exercice 11 : [énoncé]
Par la formule de Huygens
$$E\left((Y-S)^2\right)=V\left(Y-S\right)+\left[E\left(Y-S\right)\right]^2$$
avec
$$E\left(Y-S\right)=(a-1)m_S+b$$
et
$$V\left(Y-S\right)=V\left((a-1)S+aB+b\right)=(a-1)^2\sigma_s^2+a^2\sigma_B^2$$
car la covariance de S et B est nulle.
La quantité $V(Y-S)$ est minimale pour
$$a=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\sigma_B^2}$$
et l'on peut alors rendre le terme $\left[E\left(Y-S\right)\right]^2$ nul pour
$$b=(1-a)m_S$$
Au final
$$Y=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\sigma_B^2}X+\frac{\sigma_B^2}{\sigma_S^2+\sigma_B^2}m_S$$

Exercice 12 : [énoncé]
$X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
$$P(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^{k} P(X=\ell,Y=k-\ell)$$

Par indépendance

$$P(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^{k}P(X=\ell)P(Y=k-\ell)$$

puis

$$P(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^{k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

On réorganise

$$P(X+Y=k)=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\lambda^\ell\mu^{k-\ell}$$

Par la formule du binôme

$$P(X+Y=k)=\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

La variable $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Exercice 13 : [énoncé]
Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ donc $X+Y$ est à valeurs $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Pour $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a

$$P(X+Y=k)=\sum_{\ell=1}^{k-1}P(X=\ell,Y=k-\ell)$$

Par indépendance

$$P(X+Y=k)=\sum_{\ell=1}^{k-1}P(X=\ell)P(Y=k-\ell)$$

Il ne reste plus qu'à dérouler les calculs :

$$P(X+Y=k)=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

Exercice 14 : [énoncé]
a) Par sommation géométrique ou considération d'une succession de n échecs

$$P(X>n)=(1-p)^n$$

b) On a

$$(Z>n)=(X>n)\cap(Y>n)$$

et par indépendance

$$P(Z>n)=(1-p)^n(1-q)^n$$

On en déduit

$$P(Z=n)=P(Z>n-1)-P(Z>n)=(p+q-pq)\left((1-p)(1-q)\right)^{n-1}$$

c) On peut encore écrire

$$P(Z=n)=r(1-r)^{n-1}\text{ avec }r=p+q-pq$$

Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p+q-pq$.

Exercice 15 : [énoncé]
Il s'agit de calculer

$$P(X=k\mid X+Y=n)$$

pour une valeur de k qui est nécessairement élément de $[\![0,n]\!]$.

$$P(X=k\mid X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$

donc

$$P(X=k\mid X+Y=n)=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

Puisque $X+Y$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda+\mu$, on obtient

$$P(X=k\mid X+Y=n)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}$$

En écrivant

$$\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

on reconnaît une loi binomiale de paramètres n et $\lambda/(\lambda+\mu)$.

Exercice 16 : [énoncé]
a) Posons

$$u_n=P(X=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda}{n+1}$$

donc si $n+1 \leqslant \lambda$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et si $n+1 > \lambda$ alors $u_{n+1} < u_n$.
La valeur maximale de u_n est donc obtenue pour $n = \lfloor \lambda \rfloor$.
b) Il suffit d'étudier les variations de la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n$. La probabilité sera maximale si $\lambda = n$.

Exercice 17 : [énoncé]
Par la formule de transfert

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k}$$

Or pour $x \in \left]-1,1\right[$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}x^k = -\ln(1-x)$$

donc

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{p-1}\ln p$$

Exercice 18 : [énoncé]
Par la formule de Transfert

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)$$

donc

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$$

Exercice 19 : [énoncé]
On a

$$(Z > n) = (X > n) \cup (Y > n)$$

donc

$$P(Z > n) = P(X > n) + P(Y > n) - P(X > n, Y > n)$$

Par indépendance

$$P(Z > n) = P(X > n) + P(Y > n) - P(X > n)\,P(Y > n)$$

Puisque les lois de X et Y sont géométriques

$$P(Z > n) = (1-p)^n + (1-q)^n - (1-p)^n(1-q)^n$$

Or

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$$

donc

$$E(Z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-pq}$$

Exercice 20 : [énoncé]
L'évènement X est pair est la réunion dénombrable des évènements $(X = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Sa probabilité vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{ch}(\lambda) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}$$

Exercice 21 : [énoncé]
a) On a $X_{k+1} - X_k = n$ si, et seulement si, on tire $n-1$ images déjà obtenues puis une image nouvelle. La proportion en cours du nombre d'images déjà obtenues est k/N et donc

$$P(X_{k+1} - X_k = n) = \left(\frac{k}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{N-k}{N}\right) = \frac{k^{n-1}(N-k)}{N^n}$$

On identifie une loi géométrique de paramètre $p = (N-k)/N$ et d'espérance $N/(N-k)$.
b) Par télescopage

$$E(X_N) = \sum_{k=1}^{N-1} E(X_{k+1} - X_k) + E(X_1) = N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

Exercice 22 : [énoncé]
a) Pour $(n,k)\in\mathbb{N}^2$. Si $k\leqslant n$ alors

$$P(X=n,Y=k)=P(X=n)P(Y=k\mid X=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Si $k>n$ alors $P(X=n,Y=k)=0$.
b) Pour $k\in\mathbb{N}$

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n,Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=n,Y=k)$$

Après réorganisation et glissement d'indice

$$P(Y=k)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n=\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

La variable Y suit une loi de Poison de paramètre λp.

Exercice 23 : [énoncé]
a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=j,Y=k)=1$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=j,Y=k)=a\mathrm{e}^2$$

donc $a=\mathrm{e}^{-2}$.
b) Pour $j\in\mathbb{N}$

$$P(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=j,Y=k)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{j!}$$

et donc X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=1$. Il en est de même pour Y.
c) Les variables sont indépendantes car l'on vérifie aisément

$$P(X=j,Y=k)=P(X=j)P(Y=k)$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=j,Y=k)=1$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=j,Y=k)=8a$$

car

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j+k}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}}=\frac{1}{(1-1/2)^2}=4$$

On en déduit $a=1/8$
b) Pour $j\in\mathbb{N}$

$$P(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=j,Y=k)=\frac{j+1}{2^{j+2}}$$

et pour $k\in\mathbb{N}$

$$P(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}P(X=j,Y=k)=\frac{k+1}{2^{k+2}}$$

c) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$P(X=j,Y=k)\neq P(X=j)P(Y=k)$$

pour $j=k=0$.
d) Par probabilités totales

$$P(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n+3}}=\frac{1}{9}$$

Exercice 25 : [énoncé]
a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)=1$$

En réordonnant les sommes et en simplifiant les zéros

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}p\left(2a(1-p)\right)^n=p\frac{1}{1-(2a(1-p))}$$

On est donc amené à résoudre l'équation

$$1 - 2a(1-p) = p$$

ce qui conduit à la solution $a = 1/2$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P(Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p(1-p)^n = p(1-p)^n$$

c) Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p\left(\frac{1-p}{2}\right)^n = p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{k+1}}$$

En simplifiant

$$P(X=k) = \left(1-\frac{1-p}{1+p}\right)\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$$

d) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$P(X=k, Y=n) \neq P(X=k)\,P(Y=n)$$

pour $k = n = 0$.

Exercice 26 : [énoncé]
a) X suit une loi géométrique de paramètre p.
b) Notons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite de chaque expérience.
L'évènement $(X=n)$ est la réunion correspond à l'évènement $X_1 + \cdots + X_n = m$ et $X_n = 1$ soit encore
$X_1 + \cdots + X_{n-1} = m-1$ et $X_n = 1$. Par indépendance

$$P(X=n) = P(X_1 + \cdots + X_{n-1} = m-1)P(X_n = 1)$$

Puisque $X_1 + \cdots + X_{n-1} \sim \mathcal{B}(n-1,p)$ et $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, on obtient

$$P(X=n) = \binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}$$

et écriture vaut aussi quand $n \leqslant m$ car le coefficient binomial est alors nul.
c) En exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}t^n \text{ pour } t \in \left]-1,1\right[$$

d) Par définition

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}t^n$$

En isolant les premiers termes nuls et en décalant l'indexation

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1_n}(pt)^m\left((1-p)\,t\right)^n = \frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}$$

On en déduit

$$E(X) = G_X'(1) = \frac{m}{p}$$

Exercice 27 : [énoncé]
a) Par la formule de transfert

$$E\left(X(X-1)\ldots(X-r+1)\right) = \sum_{k=r}^{+\infty}\frac{k!}{(k-r)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^r$$

b) La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = E(t^X) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = E\left(X(X-1)\ldots(X-r+1)t^X\right) = \lambda^r\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = E\left(X(X-1)\ldots(X-r+1)\right) = \lambda^r$$

Exercice 28 : [énoncé]
a) Par la formule de transfert

$$E\left(X(X-1)\ldots(X-r+1)\right) = \sum_{k=r}^{+\infty}k(k-1)\ldots(k-r+1)(1-p)^{k-1}p$$

Or

$$\sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r} = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

donc

$$E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = (1-p)^{r-1}\frac{r!}{p^r}$$

b) La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = E(t^X) = \frac{pt}{1-(1-p)t} = \frac{p}{p-1} + \frac{\frac{p}{1-p}}{1-(1-p)t}$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X\right) = \frac{p}{1-p}\frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = r!\frac{(1-p)^{r-1}}{p^r}$$

Exercice 29 : [énoncé]

a) Les évènements $(X_1+X_2 = Y_1+Y_2)$ et $(14+X_1+X_2-Y_1-Y_2 = 14)$ sont identiques.

b) Puisque X_1 est uniformément distribuée sur $[\![1,6]\!]$

$$G_{X_1}(t) = \frac{1}{6}\left(t+t^2+\dots+t^6\right) = \frac{t}{6}\frac{1-t^6}{1-t} = G_{X_2}(t)$$

De même, $7-Y_i$ est uniformément distribuée sur $[\![1,6]\!]$ et par somme de variables aléatoires indépendante

$$G_Z(t) = t^4\left[\frac{1}{6}\frac{1-t^6}{1-t}\right]^4$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient de t^{14} dans le développement en série entière de $G_Z(t)$. Pour cela, on écrit

$$G_Z(t) = \frac{t^4}{6^4}\frac{\left(1-t^6\right)^4}{(1-t)^4} = \frac{t^4}{6^4}\left(1-4t^6+6t^{12}-\cdots\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+3}{3}t^n$$

Le coefficient de t^{14} est

$$P\left(X_1+X_2 = Y_1+Y_2\right) = \frac{1}{6^4}\left(\binom{13}{3} - 4\binom{7}{3}\right) = \frac{146}{6^4} \simeq 0,11$$

Un calcul direct est aussi possible en évaluant

$$P(X_1+X_2 = i) = \frac{\min(i-1,13-i)}{6^2} \text{ pour } i \in [\![1,12]\!]$$

auquel cas

$$P(X_1+X_2 = Y_1+Y_2) = \frac{1}{6^4}\sum_{i=2}^{12}\min\left(i-1,13-i\right)^2$$

Exercice 30 : [énoncé]

a) Par formule des probabilités totales

$$P(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)P(X_1+\cdots+X_k = n)$$

donc

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)P(X_1+\cdots+X_k=n)t^n$$

En réordonnant la somme de cette famille sommable

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1+\cdots+X_k=n)t^n$$

soit

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)G_{X_1+\cdots+X_k}(t)$$

Or, par indépendances des variables

$$G_{X_1+\cdots+X_k}(t) = \left[G_X(t)\right]^k$$

donc

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)\left[G_X(t)\right]^k = G_N\left(G_X(t)\right)$$

b) Si N et X possède une espérance alors G_N et G_X sont dérivables en 1 et G_S l'est alors avec

$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'(G_X(1)) = G_X'(1)G_N'(1)$$

On en déduit

$$E(S) = E(N)E(X_1)$$

Exercice 31 : [énoncé]

a) Par définition

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} t^k u^\ell P(X=k,Y=\ell)$$

En regroupant par paquets selon la valeur de $X+Y$

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} P(X=k,Y=n-k)$$

Or

$$(X=k,Y=n-k) = (X_1+\cdots+X_n=k)\cap(N=n)$$

donc

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} P(N=n)$$

en notant $q=1-p$. On obtient ainsi

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)(pt+qu)^n = G_N(pt+qu)$$

b) Si N suit une loi de Poisson alors $G_N(t)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ puis

$$G(t,u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)}\times\mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

En particulier

$$G_X(t) = G(t,1) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \text{ et } G_Y(t) = G(1,u) = \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λp tandis que Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.
De plus

$$G(t,u) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu q}\frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!}t^k u^\ell$$

En identifiant les coefficients (ce qui est possible en considérant une série entière en u dont les coefficients sont des séries entières en t), on obtient

$$P(X=k,Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^k}{k!} = P(X=k)P(Y=\ell)$$

Les variables X et Y apparaissent bien indépendantes.

c) Si les variables X et Y sont indépendantes alors t^X et u^Y aussi donc

$$G(t,u) = E(t^X)E(u^Y) = G(t,1)G(1,u)$$

puis

$$G_N(pt+qu) = G_N(pt+q)G_N(p+qu)$$

Posons $f(t)=G_N(t+1)$ définie et continue sur $[-2,0]$ avec $f(0)=G_N(1)=1$.
On a

$$f(pt+qu) = G_N(p(t+1)+q(u+1)) = G_N(pt+1)G_N(1+qu) = f(pt)f(qu)$$

ce qui fournit la propriété de morphisme

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pour $x\in[-2p,0]$ et $y\in[-2q,0]$. Pour $y\in[-2p,0[$

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

On choisit $x\in[-2p,0[$ tel que $f(x)\neq 0$ (ce qui est possible par continuité car $f(0)=1$). Le premier membre admet une limite finie quand $y\to 0$ car f est assurément dérivable sur $]-2,0[$. On en déduit que le second membre admet la même limite et donc f est dérivable en 0 avec la relation

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Posons $\lambda=f'(0)$ et sachant $f(0)=1$, on obtient

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ sur } [-2p,0]$$

puis

$$G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} \text{ sur } [1-2p,1]$$

Si $p\geqslant 1/2$, ceci détermine G_N au voisinage de 0 et l'on reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ.
Sinon, $q\geqslant 1/2$ et il suffit de raisonner en la variable y plutôt que x.

Exercice 32 : [énoncé]

a) On a

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k)t^k = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

b) $G_X'(1) = E(X) = \lambda$, $G_X''(1) = E\left(X(X-1)\right) = \lambda^2$ et
$G_X^{(3)}(1) = E\left(X(X-1)(X-2)\right) = \lambda^3$.
On en déduit

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda \text{ et } E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

puis

$$E\left((X-\lambda)^3\right) = E(X^3) - 3\lambda E(X^2) + 3\lambda^2 E(X) - E(X)^3 = \lambda$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) S_1 suit une loi géométrique de paramètre p et

$$G_{S_1}(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

b) $S_m - S_{m-1}$ suit la même loi géométrique de paramètre p.
c) On peut écrire

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} S_k - S_{k-1} \text{ avec } S_0 = 0$$

Or les variables aléatoires de cette somme sont indépendantes car la probabilité de l'événement

$$(S_1 - S_0 = n_1, S_2 - S_1 = n_2, \ldots, S_m - S_{m-1} = n_m)$$

n'est autre que celle de l'événement

$$X_{n_1} = X_{n_1+n_2} = \ldots = X_{n_1+\cdots+n_m} = 1$$

$$\text{et } X_k = 0 \text{ pour les autres indice } k \text{ de } [\![1, n_1 + \cdots + n_m]\!]$$

et les variables $X_1, \ldots, X_{n_1+\cdots+n_m}$ sont indépendantes.
On en déduit

$$G_{S_m}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^m$$

Puisque

$$G_{S_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{m-1} q^n p^m t^{n+m}$$

on obtient

$$P\left(S_m = n\right) = \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^m \text{ pour } n \geqslant m$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a $-p(x)\log\left(p(x)\right) \geqslant 0$ car $p(x) \leqslant 1$. On en déduit $H(X) \in \mathbb{R}^+$.
Si $H(X) = 0$ alors, par somme nulle de positifs, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x)\log\left(p(x)\right) = 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x) = 0 \text{ ou } p(x) = 1$$

Sachant que

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) = P(X \in \mathcal{X}) = 1$$

on peut affirmer qu'il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $p(x) = P(X = x) = 1$.
La variable X est alors presque sûrement constante.
b) Par définition

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)\log\left(P(X = x, Y = y)\right)$$

Or les variables X et Y étant indépendantes

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

puis

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} P(X = x)P(Y = y)\left[\log\left(P(X = x)\right) + \log\left(P(Y = y)\right)\right]$$

On sépare la somme en deux et l'on somme tantôt d'abord en x, tantôt d'abord en y et l'on obtient

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

car

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X = x) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y = y) = 1$$

b) On sait

$$P(X = x \mid Y = y) = P(X = x, Y = y)P(Y = y)$$

donc

$$P(Y = y)H(X \mid Y = y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X = x, Y = y)\left[\log\left(P(X = x, Y = y)\right) - \log\left(P(Y = y)\right)\right.$$

On sépare la somme en deux et l'on somme le résultat sur $y \in \mathcal{Y}$ pour obtenir

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) + \sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} P(X=x,Y=y)\log\left(P(Y=y)\right)$$

Or

$$\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} P(X=x,Y=y)\log\left(P(Y=y)\right) = \sum_{y\in\mathcal{Y}}\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X=x,Y=y)\log\left(P(Y=y)\right)$$

avec

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X=x,Y=y) = P(Y=y)$$

donc

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) - H(Y)$$

Exercice 35 : [énoncé]
Supposons les variables aléatoires X et $f(X)$ indépendantes.
Soient $\omega \in \Omega$ vérifiant $P(\{\omega\}) > 0$.
Posons $x = X(\omega)$ et $y = f(x)$. On a

$$P\left(f(X)=y \mid X=x\right) = \frac{P(f(X)=y \cap X=x)}{P(X=x)}$$

Or $\{X=x\} \subset \{f(X)=y\}$, donc

$$P\left(f(X)=y \mid X=x\right) = 1$$

Cependant, les variables X et $f(X)$ étant supposées indépendantes

$$P\left(f(X)=y \mid X=x\right) = P(f(X)=y)$$

Ainsi $f(X)=y$ presque sûrement.
La réciproque est immédiate et donc X et $f(X)$ sont indépendantes si, et seulement si, $f(X)$ est presque sûrement constante.

Exercice 36 : [énoncé]
a) Il est entendu $0 \in I_X$ et même $M_X(0) = E(1) = 0$.
Soit $t > 0$ élément de I_X et $s \in [0,t]$. Que la valeur de X soit positive ou négative

$$\mathrm{e}^{sX} \leqslant 1 + \mathrm{e}^{tX}$$

et donc$M_X(s)$ est bien définie.
De même pour $t < 0$ élément de I_X, on obtient $[t,0] \in I_X$.
On en déduit que I_X est bien un intervalle contenant 0.
b) Soit $t > 0$ tel que $t, -t \in I_X$. Les familles $\left(\mathrm{e}^{tx}P(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ et $\left(\mathrm{e}^{-tx}P(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ sont sommables et donc la famille $\left(\mathrm{e}^{t|x|}P(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ l'est aussi. Or on a la sommation à termes positifs

$$\mathrm{e}^{t|x|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n |x|^n}{n!}$$

Par sommation par paquets, la famille $\left(\frac{t^n x^n}{n!}P(X=x)\right)_{(n,x)\in\mathbb{N}\times X(\Omega)}$ est sommable.
On peut alors réorganiser la sommation

$$M_X(t) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n x^n}{n!}P(X=x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{x\in X(\Omega)} \frac{t^n x^n}{n!}P(X=x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!}t^n$$

c) On a alors $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.
La fonction M_X est appelée fonction génératrice des moments.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a, avec convergence absolue

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{kt} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$$

b) Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1,\dots,x_n\}$, l'affaire est entendue : la fonction génératrice des moments de X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_k}P(X=x_k)$$

et après permutation des sommes

$$M_X(t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\sum_{k=1}^{n} (x_k)^\ell P(X=x_k)t^\ell = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}E(X^\ell)t^\ell$$

Si X prend une infinité de valeurs, c'est plus technique...

Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X. Pour $t \in \left]-a,a\right[$

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\mathrm{e}^{tx_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = P(X = x_n)\mathrm{e}^{tx_n}$$

Par hypothèse, la série de fonctions convergence simplement sur $\left]-a,a\right[$.
Les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$u_n^{(k)}(t) = P(X = x_n)x_n^k\mathrm{e}^{tx_n}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha,\alpha] \subset \left]-a,a\right[$.
Pour $t \in [-\alpha,\alpha]$, on peut écrire

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \leqslant P(X = x_n)\left|x_n^k\right| \mathrm{e}^{\alpha|x_n|}$$

Introduisons $\rho \in \left]\alpha,a\right[$. On peut écrire

$$P(X = x_n)\left|x_n\right|^k \mathrm{e}^{\alpha|x_n|} = \left|x_n\right|^k \mathrm{e}^{(\alpha-\rho)|x_n|} \times P(X = x_n)\mathrm{e}^{\rho|x_n|}$$

D'une part, la fonction $t \mapsto t^k\mathrm{e}^{(\alpha-\rho)t}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée ce qui permet d'introduire une constante M_k vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|x_n\right|^k \mathrm{e}^{(\alpha-\rho)|x_n|} \leqslant M_k$$

D'autre part,

$$P(X = x_n)\mathrm{e}^{\rho|x_n|} \leqslant P(X = x_n)\mathrm{e}^{\rho x_n} + P(X = x_n)\mathrm{e}^{-\rho x_n}$$

En vertu de la convergence en $\pm\rho$ de la série définissant $M_X(t)$, on peut assurer la convergence de la série positive

$$\sum P(X = x_n)\mathrm{e}^{\rho|x_n|}$$

La majoration uniforme

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \leqslant M_k P(X = x_n)\mathrm{e}^{\rho|x_n|}$$

donne la convergence normale de $\sum u_n^{(k)}$ sur $[-\alpha,\alpha]$.
Via convergence uniforme sur tout segment, on peut conclure que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-a,a\right[$.
De plus, on a pour tout ordre de dérivation k et avec sommabilité la relation

$$M_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n) = E(X^k)$$