Calcul matriciel

Soit M une matrice carrée (n,n)
On appelle polynôme caractéristique de la matrice M, le polynôme de degré n défini par $P_M(\lambda) = det(M - \lambda I_d)$ ou I_d est la matrice identité d'ordre n
Les solutions λ_i de l'équation $P_M(\lambda) = 0$ sont les valeurs propres de la matrice M, elles peuvent être réelles ou complexes selon que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Le spectre de la matrice M, noté $s_p(M)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice M
La matrice M est inversible si $0 \notin s_p(M)$
La matrice M est diagonalisable si toutes les valeurs propres λ_i sont distinctes deux à deux
Les solutions X_i des équations $MX_i = \lambda_i X_i$ donnent les vecteurs propres X_i associés aux valeurs propres λ_i
Le rang de la matrice M est donné par le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants. Une famille de vecteurs $X_0, X_1, \cdots, X_i$ est linéairement indépendante si $a_o X_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_i X_i = 0 \Rightarrow a_0, a_1, \cdots, a_i = 0$ avec $a_0, a_1, \cdots, a_i \in \mathbb{R}$

On travaille dans $\mathbb{R}$
Pour chacune des matrices suivantes, déterminer le polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$, les valeurs propres λ_i, le spectre, dire si la matrice est inversible ou pas, dire si elle est diagonalisable ou pas, le cas échéant donner les vecteurs propres et le rang de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -7 & -36 & 28 \\ 6 & 23 & -14 \\ 4 & 14 & -9 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 0 & -2 \\ 7 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$