A. Repérer une forme indéterminée

La première chose à faire pour examiner les limites est de repérer les formes indéterminées.

- repérer la limite de chaque terme . s'il y a un doute, tracer les graphes des fonctions usuelles pour voir graphiquement... ;
  si $x \to 0$, faire dans sa tête :$x = \pm 10^{-3}; \pm 10^{-5}$, en faisant attention au signe...
  si $x \to +\infty$, prendre $x = 1000$ ou $x = 1000000$ dans sa tête pour s'assurer du résultat...
  si on demande $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}$; penser à séparer les cas : $\alpha > 0; < 0; = 0$. et prendre des exemples de α
- si tous les termes tendent vers des réels non nuls, pas de souci !
- SI un terme tend vers $+\infty$ ou 0, faire attention : est-il en concurrence avec un autre terme ? Y a-t-il une forme indéterminée ?
  ATTENTION AUX FORMES indéterminées : $0 \times \infty$; $+\infty - \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ CELA NE S'ECRIT PAS SUR UNE COPIE, ce n'est pas mathématique, mais s'identifie dans sa tête ou au brouillon.
- S'il y a une forme indéterminée, identifier les termes à problème des termes "neutres".
- Lorsqu'on passe à la limite, on passe PARTOUT ou nulle part : il est interdit de faire d'abord le numérateur, puis le dénominateur, ou remplacer un terme et pas un autre.

ERREURS A NE PAS FAIRE

- Si $u_n = n^2 + n - 2$ et $v_n = n^2 + n - 3$, ON N'ECRIT PAS : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = n^2$ CAR UNE LIMITE NE DEPEND PAS de la variable qui tend vers a.
- On n'écrit pas : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim n^2 - n^2$ CAR on ne remplace pas un seul terme ni par sa limite, ni par quelque chose de gros : ceci donne d'énormes fautes.

Exercices : Identifier si les limites suivantes présentent une forme indéterminée, et sinon donner la valeur de la limite.

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2+x} - 2}{x^2 - 9}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{6x-1}{2x+5}} - \sqrt{3}\right)$
5. $\lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}^-} x\left(\sqrt{\dfrac{6x-1}{2x+5}} - \sqrt{3}\right)$
6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3} - 3}{2 - x}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{2+x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} \ln x$

B. Utilisation des croissances comparées, et changement de variables

Certaines formes indéterminées découlent du cours de terminale, puis du cours de classe préparatoires.

Rappels -Croissance comparée $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Application : Soit α un réel strictement positif. montrons que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0}$

On pose $u = x^{\alpha}$.. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u = +\infty$. De plus, $x = u^{1/\alpha}$

et $\frac{\ln x}{x^{\alpha}} == \dfrac{\ln(u^{1/\alpha})}{u} = \dfrac{\ln u}{\alpha u}$

D'après les croissances cmoparées, $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$. Par changment de variables, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$

de même, si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\alpha}{u} e^u = +\infty$ en posant : $u = \alpha x$.

En prépa, vous pouvez utiliser limites suivantes :

$$\boxed{\text{si } \alpha > 0, \text{ alors } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = +\infty}$$

Exercices : Vérifier que ce sont des FI, et les lever.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{(x^2)}}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(e^x)}{x}$.

C. Factoriser par le terme prépondérant

Un des bons réflexes pour lever une forme indéterminée est de "factoriser par le terme le plus gros". Pour cela, il faut savoir repérer le plus gros terme, d'où l'importance de la partie précédente : dans le cas général, les fonctions puissances "'mangent" les fonctions logarithmes, et l'exponentielle mangent les puissances.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^x - 1$. C'est une forme indéterminée. le plus "gros terme" est e^x. On factorise : $x - e^x - 1 = e^x\left(\dfrac{x}{e^x} - 1 - \dfrac{1}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, le premier terme de la parenthèse tend vers 0 ; le deuxième vers -1 ; et le troisième vers 0. Donc la parenthèse tend vers -1. Ainsi, sans forme indéterminée, le produit tend vers $-\infty$.
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^x - 1 = -\infty$

Exercices : Vérifier que ce sont des FI, et les lever.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{1 + e^x + e^{-x}}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{1 + e^x + e^{-x}}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{(2x)} - x + 3}{x - \ln x}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3x\sqrt{x} + 2}{2x - 3}$
5. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} + \ln(x-2)$ (poser $u = \dfrac{1}{x-2}$).
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - x$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(e^{2x} + 1)}{x + 2}$(mettre en facteur dans le ln et utiliser : $ln(ab) = \ln a + \ln b$.

D. Quantités conjuguées

La méthode précédente est un point très important, même à utiliser à l'intérieur d'un ln ou d'une racine. Cependant, cela peut ne pas toujours aboutir. Pour un exemple proche de l'exo 6, on a :

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$.Comme $x>0$: or : $\sqrt{x^2+1}-x = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)$.
Ici, x tend vers $+\infty$, et la parenthèse tend vers 0. On a de nouveau une forme indéterminée.

Méthode Pour a, b deux réels strictement positifs distincts, la quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. On utilise la formule : $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ en prenant $A=\sqrt{a}$, et $B=\sqrt{b}$.
Si $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ présente une forme indéterminée, on multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée :

$$\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$$

. LE numérateur se simplifie, et le dénominateur ne doit plus présenter de FI. Au pire, factoriser par le plus gros.

Dans notre exemple, $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x = 0$.

Exercices

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}-x$
3. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-3}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{\dfrac{4x+1}{x+2}}-2)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

E. Taux d'accroissement

Voici des limites qui proviennent de la définition de la dérivée en a. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et alors cette limite vaut $f'(a)$.
Quelques limites connues :

$$\boxed{\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$$

deux exemples • en associant à un changement de variable.
Exemple : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x/2)}{x}$. ON pose $u=x/2$. Ainsi, $x=2u$
$\dfrac{\sin(x/2)}{x} = \dfrac{\sin u}{2u}$. or $\lim\limits_{x\to0} u = 0$ et $\lim\limits_{u\to0} \frac{\sin u}{u} = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x/2)}{x} = \dfrac{1}{2}$
• " en balayant en haut et en bas par le terme de l'intérieur"
Exemple : $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sin(h)}{\ln(1+h^2)}$ or pour $h\neq0$: $\dfrac{\sin(h)}{\ln(1+h^2)} = \dfrac{\sin(h)}{h}\dfrac{h}{\ln(1+h^2)} = \dfrac{\sin(h)}{h}\dfrac{h}{h^2}\dfrac{h^2}{\ln(1+h^2)}$
La première fraction tend vers 1 par taux d'accroissement de sinus. La dernière, en posant $u=h^2$, et par inverse d'un taux d'accroissement tend aussi vers 1. Il ne reste plus qu'à trouver la limite de la fraction du milieu qui n'est pas une forme indéterminée.
$\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sin(h)}{\ln(1+h^2)} = +\infty$ si $h\to0^+$; $-\infty$ si $h\to0^-$

Exercices

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x})$
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)\sin x}{e^{x^2}-1}$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{e^{x-1}-1}{\ln x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\dfrac{x}{x+1})$
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$ (on peut poser $u=x-\frac{\pi}{6}$, et développer le sinus)
6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-1}{x^2}$, sachant que $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(2x^2)}{e^{x^2+x^3}-1}$

F. Méthodologie(à ne pas recopier, mais à retenir)

1. On fait tendre x vers a dans TOUS LES TERMES en même temps, ou dans AUCUN.
2. Repérer la limite de TOUS les termes, indépendamment les uns des autres.
3. Repérer s'il y a une forme indéterminée ou non.
4. en cas de forme indéterminée, Obligation de justifier la limite.
5. Avec une exp ou un ln : voir si exp ou ln tendent vers $\pm\infty$: dans ce cas, c'est une croissance comparée. faire un changement de variables pour se ramener A LA FORMULATION EXACTE du cours.
6. Forme indéterminée due à une différence avec une racine carrée : PENSER à la quantité conjuguée ($\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$)
7. Si on n'est pas dans un cas simple d'application directe du cours, FACTORISER à l'intérieur par le PLUS GROS TERME, afin d'avoir un terme simple facteur de (1+ quelque chose qui tend vers 0). Ceci permet de voir les termes "dominants" et les termes négligeables.
   Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n^3+3n+2)\sqrt{n+2}}{n}$. Factoriser à l'intérieur du ln par le plus gros, et à l'intérieur de la racine par : ... Mettre en facteur les termes posant une forme indéterminée, et la lever.
8. Si $x\to a\in\mathbb{R}$, parfois poser $y=x-a\to0$ et on se ramène à une limite lorsque $y\to0$ et DEVELOPPEMENTS LIMITES (lorsqu'on aura fait le chapitre).
9. si c'est lorsque x tend vers un réel, regarder si ce n'est pas la définition d'un taux d'accroissement et d'une dérivée.
10. Avec un sin ou cos, si le terme à l'intérieur tend vers 0; penser au taux d'accroissement en "'balayant"'.
    On peut parfois avoir à développer $\cos(a+b)$ si ce qui tend à l'intérieur à une limite finie.
    Enfin, si ce qui est à l'intérieur tend vers ∞, encadrer le cos ou le sin , et utiliser un théorème d'encadrement.
11. Si ln(..) tend vers 0 : poser(changement de variables) .. $=1+u$, alors $u\to0$ et faire la limite du taux d'accroissement en faisant apparaitre $\ln(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{u}\cdot u$.
    Si exp(..) tend vers 1 et présente une forme indéterminée. Poser(changement de variables) .. $=$ $u\to0$ et faire apparaitre : $\exp(..) = u\frac{e^u-1}{u}+1$ et tenter de conclure.