Equation de droite (méthode vectorielle)

Pour déterminer l'équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ d'une droite (d), puis son équation réduite de la forme $y = mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$ quand on dispose de deux points A$(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$ appartenant à la droite (d), on considère un point quelconque $M(x; y)$ appartenant à la droite (d), on calcule les composantes $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et celles $(x - x_A; y - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AM}$ ou celles $(x - x_B; y - y_B)$ du vecteur $\overrightarrow{BM}$, puis on utilise la relation de colinéarité entre les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$ pour trouver l'équation cartésienne de la droite (d) à partir de laquelle on peut déterminer l'équation réduite de (d).

Relation de colinéarité entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: *Si* $\vec{u}\left|\begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right.$ *et* $\vec{v}\left|\begin{array}{l} c \\ d \end{array}\right.$, *$\vec{u}$ colinéaire* à $\vec{v} \iff ad - bc = 0$.

Appliquons cette méthode dans un exemple
On dispose du point A de coordonnées (-7,3) et du point B de coordonnées (4,-2)
Quelle est l'équation cartésienne de la droite (AB) ?
On commence par chercher les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$
D'après le cours, $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$ d'ou $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 4-(-7) \\ -2-3 \end{array}\right.$ donc $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 11 \\ -5 \end{array}\right.$
Ensuite on cherche les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}$ ou du vecteur $\overrightarrow{BM}$

Avec le point A, on obtient :

$\overrightarrow{AM}\left|\begin{array}{l} x - x_A \\ y - y_A \end{array}\right.$ d'ou $\overrightarrow{AM}\left|\begin{array}{l} x-(-7) \\ y-3 \end{array}\right.$ donc $\overrightarrow{AM}\left|\begin{array}{l} x+7 \\ y-3 \end{array}\right.$

Puis on applique la relation de colinéarité aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$

$\left|\begin{array}{ll} 11 & x+7 \\ -5 & y-3 \end{array}\right| \iff 11(y-3)-(-5)(x+7) = 0 \iff 11(y-3)+5(x+7) = 0 \iff 11y-33+5x+35 = 0 \iff 5x + 11y + 2 = 0$

Avec le point B, on obtient :

$\overrightarrow{BM}\left|\begin{array}{l} x - x_B \\ y - y_B \end{array}\right.$ d'ou $\overrightarrow{BM}\left|\begin{array}{l} x-4 \\ y-(-2) \end{array}\right.$ donc $\overrightarrow{BM}\left|\begin{array}{l} x-4 \\ y+2 \end{array}\right.$

Puis on applique la relation de colinéarité aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$

$\left|\begin{array}{ll} 11 & x-4 \\ -5 & y+2 \end{array}\right| \iff 11(y+2)-(-5)(x-4) = 0 \iff 11(y+2)+5(x-4) = 0 \iff 11y+22+5x-20 = 0 \iff 5x + 11y + 2 = 0$

Dans les deux cas, on obtient la <u>même</u> équation cartésienne de la droite (AB), 5x + 11y + 2 = 0 que l'on transforme pour obtenir l'équation réduite de la droite (AB)
$5x + 11y + 2 = 0 \iff 11y = -5x - 2 \iff y = -\frac{5}{11} * x - \frac{2}{11}$

En utilisant cette technique, déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par chacun des couples de points donnés ci-dessous, ainsi que son équation réduite.

a) A(-5 ;3) B(7 ;-4) (AB) ?

b) C(2 ;-7) D(9 ;-3) (CD) ?

c) E(-3 ;5) F(4 ;5) (EF) ?

d) G(-2 ;6) H(-2 ;-3) (GH) ?

e) I$(-\frac{2}{3}; 4)$ J(-2 ;$\frac{7}{9}$) (IJ) ?